重难点突破 01 圆中的范围与最值问题

目录

01 方法技巧与总结

1、涉及与圆有关的最值，可借助图形性质，利用数形结合求解．一般地：

（1）形如 $\mu=\dfrac{y-b}{x-a}$ 的最值问题，可转化为动直线斜率的最值问题．

（2）形如 $t=ax+by$ 的最值问题，可转化为动直线截距的最值问题．

（3）形如 $m=(x-a)^2+(y-b)^2$ 的最值问题，可转化为曲线上的点到点（a，b）的距离平方的最值问题．

2、解决圆中的范围与最值问题常用的策略：

（1）数形结合

（2）多与圆心联系

（3）参数方程

（4）代数角度转化成函数值域问题

02 题型归纳与总结

题型一：斜率型

【典例 1-1】 已知实数 x，y 满足方程 $y=\sqrt{-x^2+4x-1}$，则 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值为（　）

A．0　　B．1　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【典例 1-2】 如果实数 x，y 满足 $(x-2)^2+y^2=2$，则 $\dfrac{y}{x}$ 的范围是（　）

A．$(-1,1)$　　B．$[-1,1]$　　C．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　D．$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

【变式 1-1】 若实数 x、y 满足条件 $x^2+y^2=1$，则 $\dfrac{x+y-1}{x+1}$ 的范围是（　）

A．$\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$　　B．$\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right]$　　C．$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$　　D．$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

【变式 1-2】（2024·山东日照·二模）若实数 x、y 满足条件 $x^2+y^2=1$，则 $\dfrac{y-2}{x+1}$ 的范围是（　）

A. $\left[0,\sqrt{2}\right]$　B. $\left[-3,5\right]$　C. $\left(-\infty,-1\right]$　D. $\left(-\infty,-\dfrac{3}{4}\right]$

【变式 1-3】已知$P(m,n)$为圆$C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$上任意一点，则$\dfrac{m+n}{m+1}$的最大值为（　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　B. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　C. $1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　D. $1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

题型二：直线型

【典例 2-1】（2024·江西吉安·宁冈中学校考一模）已知点$P(x,y)$是圆$x^2+y^2-6x-4y+12=0$上的动点，则$x+y$的最大值为（　）

A. $5+\sqrt{2}$　B. $5-\sqrt{2}$　C. 6　D. 5

【典例 2-2】已知点$P(x,y)$是圆C：$(x-a)^2+y^2=3(a>0)$上的一动点，若圆C经过点$A\left(1,\sqrt{2}\right)$，则$y-x$的最大值与最小值之和为（　）

A. 4　B. $2\sqrt{6}$　C. -4　D. $-2\sqrt{6}$

【变式 2-1】点$P(x,y)$在圆$(x-2)^2+(y+3)^2=1$上，则$x+y$的范围是____.

【变式 2-2】已知x，y满足$x^2+y^2+2x-4y=0$，则$2x+y$的范围是____.

【变式 2-3】如果实数x,y满足等式$x^2+y^2+4x-2y-4=0$，那么x^2+y^2的最大值是____；$2x-y$的最大值是____.

题型三：距离型

【典例 3-1】已知点$P(m，n)$在圆$C:(x-2)^2+(y-2)^2=9$上运动，则$(m+2)^2+(n+1)^2$的最大值为___，最小值为____，$\sqrt{m^2+n^2}$的范围为_____.

【典例 3-2】直线$l:kx-y-2k+2=0(k\in\mathrm{R})$过定点$Q$，若$P$为圆$C:(x-2)^2+(y-3)^2=4$上任意一点，则$|PQ|$的最大值为（　）

A. 1　B. 3　C. 4　D. 2

【变式 3-1】（2024·浙江·三模）已知$A(-2,-2),B(1,3)$，点P在圆$x^2+y^2=4$上运动，则$|PA|^2+|PB|^2$的最大值为（　）

A. $16-6\sqrt{2}$　B. $26+2\sqrt{2}$　C. $26+4\sqrt{2}$　D. 32

【变式 3-2】（2024·山东济南·三模）圆$(x-1)^2+(y+1)^2=4$上的点到直线$3x+4y-14=0$的距离的最大值为（　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．9

【变式 3-3】已知 $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=8$，且 $x_1x_2+y_1y_2=0$，则 $\left(x_1+x_2-2\right)^2+\left(y_1+y_2\right)^2$ 的最大值为（　）

A．9　　B．12　　C．36　　D．48

【变式 3-4】（2024·四川乐山·三模）已知圆 $O:x^2+y^2=16$，点 E 是 $l:2x-y+16=0$ 上的动点，过 E 作圆 O 的切线，切点分别为 A,B，直线 AB 与 EO 交于点 M，则 $|OM|$ 的最大值为（　）

A．2　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{6}$　　D．$\sqrt{7}$

题型四：周长面积型

【典例 4-1】（2024·高三·河南·开学考试）若直线 l：$kx-y+2-k=0$ 与圆 $C:x^2+y^2-4x-2y-4=0$ 交于 A，B 两点，则当 $\vee ABC$ 周长最小时，$k=$（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．1　　D．-1

【典例 4-2】在直角坐标系 xOy 中，已知 $A\left(4,0\right),B\left(1,3\right),C\left(0,-4\right)$，动点 M 满足 $\frac{MA}{MB}=2$，则△MAC 面积的范围为

【变式 4-1】若圆 C 的方程为 $x^2+y^2+mx+2my+(m-2)=0$，则圆 C 的最小周长为（　）

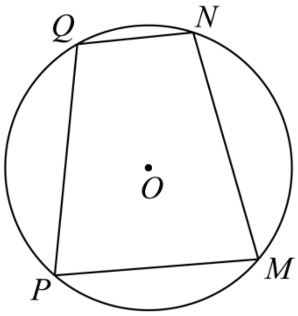
A．$\frac{36\pi}{5}$　　B．$\frac{18\sqrt{5}\pi}{5}$　　C．$\frac{12\sqrt{5}\pi}{5}$　　D．$\frac{6\sqrt{5}\pi}{5}$

【变式 4-2】已知点 A,B 在直线 $l:x-2y-2=0$ 上运动，且 $|AB|=2\sqrt{5}$，点 C 在圆 $(x+1)^2+y^2=5$ 上，则 $\vee ABC$ 的面积的最大值为（　）

A．8　　B．5　　C．2　　D．1

题型五：数量积型

【典例 5-1】已知 PQ,MN 是半径为 5 的圆 O 上的两条动弦，$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=6,\left|\overrightarrow{MN}\right|=8$，则 $\left|\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{QN}\right|$ 最大值是（　）



A．7　　B．12　　C．14　　D．16

【典例 5-2】在$\triangle ABC$中，$BC=2$，$\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$，$D$为$BC$中点，在$\triangle ABC$所在平面内有一动点$P$满足$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}$，则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}$的最大值为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

【变式 5-1】已知圆$(x-2)^2+y^2=9$的弦AB的中点为$Q(1,1)$，点P为圆上的动点，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的最大值为（　）

A．2　　B．$6\sqrt{2}-3$　　C．8　　D．$4+6\sqrt{2}$

【变式 5-2】在矩形$ABCD$中，$AB=2$，$AD=3$，P为矩形$ABCD$所在平面内的动点，且$PA=1$，则$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$的最大值是（　）

A．9　　B．10　　C．11　　D．12

题型六：坐标与角度型

【典例 6-1】已知圆C：$(x-1)^2+y^2=1$，点$P(x_0，y_0)$在直线$x-y+1=0$上运动.若C上存在点Q，使$\angle CPQ=30°$，则x_0的取值范围是______.

【典例 6-2】已知x，y满足$x^2+y^2=4y-3$，则$\dfrac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$的最大值为（　）

A．1　　B．2　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{5}$

【变式 6-1】动圆M经过坐标原点，且半径为 1，则圆心M的横纵坐标之和的最大值为（　）

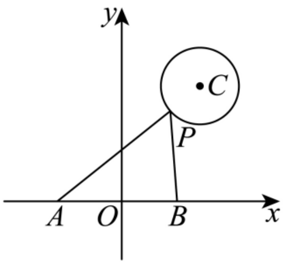
A．1　　B．2　　C．$\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{2}$

【变式 6-2】（2024·湖南邵阳·三模）已知直线l：$x-y-2=0$与圆O：$x^2+y^2=1$，过直线l上的任意一点P作圆O的切线PA，PB，切点分别为A，B，则$\angle APB$的最大值为（　）

A．$\dfrac{3\pi}{4}$　　B．$\dfrac{2\pi}{3}$　　C．$\dfrac{\pi}{2}$　　D．$\dfrac{\pi}{6}$

【变式 6-3】（2024·湖南衡阳·模拟预测）如图，已知P是圆$C:(x-2)^2+(y-3)^2=2$上一点，

$A(-1,0),B(1,0)$，则$\angle APB$的正切值的最大值为（　）



A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【变式 6-4】已知圆D：$(x-a)^2+y^2=r^2(r>0)$与x轴相交于A、B两点，且圆C：$x^2+(y-5)^2=9$，点$M(0,3)$．若圆C与圆D相外切，则$\tan\angle AMB$的最大值为（　）

A．$\frac{6}{5}$　　B．$\frac{12}{5}$　　C．$\frac{8}{9}$　　D．$\frac{16}{9}$

题型七：长度和差型

【典例 7-1】已知复数$z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，a，b，c，$d\in R$，若$|z_1|=|z_2|=2$，且$ac+bd=2$，则$|a+b-4|+2|c+d-4|$的最大值为___.

【典例 7-2】（2024·黑龙江佳木斯·三模）已知圆$x^2+y^2=8$上两点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，O为坐标原点，若$\angle AOB=120°$，则$|x_1+y_1-4|+|x_2+y_2-4|$的最大值是（　）

A．8　　B．$6\sqrt{2}$　　C．$8\sqrt{2}$　　D．12

【变式 7-1】设A为直线$x+y-2=0$上一点，P，Q分别在圆$C_1:\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$与圆$C_2:(x-1)^2+(y-4)^2=1$上运动，则$|AQ|-|AP|$的最大值为（　）

A．$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$　　B．$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$　　C．$\frac{3+\sqrt{73}}{2}$　　D．$\frac{-3+\sqrt{73}}{2}$

【变式 7-2】在定圆$C:x^2+y^2=4$内过点$P(-1,1)$作两条互相垂直的直线与C分别交于A，B和M，N，则$\frac{|AB|}{|MN|}+\frac{|MN|}{|AB|}$的范围是（　）

A．$\left[\sqrt{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$　　B．$\left[2,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

C．$\left(2,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$　　D．$\left[2,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$

【变式 7-3】（2024·广西贵港·模拟预测）已知圆C：$(x-2)^2+(y-2)^2=4$，直线l：$(m+2)x-my-4=0$

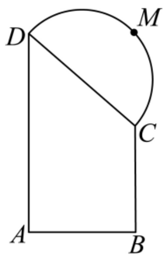
，若 l 与圆 C 交于 A，B 两点，设坐标原点为 O，则 $|OA|+2|OB|$ 的最大值为（　）

A．$4\sqrt{3}$　　B．$6\sqrt{3}$　　C．$4\sqrt{15}$　　D．$2\sqrt{30}$

题型八：方程中的参数型

【典例 8-1】（2024·山东泰安·二模）已知在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AD=\sqrt{3}$，动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的最大值为______；若 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}\left(m,n\in\mathrm{R}\right)$，则 $m+n$ 的最大值为______.

【典例 8-2】如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$A=B=90°, AD=4, AB=BC=2$，点 M 在以 CD 为直径的半圆上，且满足 $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}$，则 $m+n$ 的最大值为（　）



A．2　　B．3　　C．$-\dfrac{5}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{10}+5}{4}$

【变式 8-1】已知 $O(0,0)$，$P\left(\sqrt{3},1\right)$，$Q\left(1+4\cos\theta,\sqrt{3}-4\sin\theta\right)$，$\theta\in[0,2\pi]$，则 $\triangle OPQ$ 面积的最大值为（　）

A．4　　B．5　　C．$5\sqrt{3}$　　D．$\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$

【变式 8-2】已知点 $A(0,-4)$，点 $B(2,0),P$ 为圆 $O:x^2+y^2=4$ 上一动点，则 $\dfrac{|PB|}{|PA|}$ 的最大值是（　）

A．$\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$　　B．$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　C．$\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$　　D．$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

【变式 8-3】已知过点 $\left(1,\sqrt{3}\right)$ 的动直线 l 与圆 $C:x^2+y^2=16$ 交于 A,B 两点，过 A,B 分别作 C 的切线，两切线交于点 N.若动点 $M\left(\cos\theta,\sin\theta\right)(0\le 0<2\pi)$，则 $|MN|$ 的最小值为______.

03 过关测试

1．（多选题）已知实数 x，y 满足方程 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$，则下列说法正确的是（　）

A．$\frac{y}{x}$ 的最大值为 $\frac{4}{3}$　　B．$x+y$ 的最大值为 $3+\sqrt{2}$

C．x^2+y^2 的最大值为 $\sqrt{5}+1$　　D．$\frac{|3x+4y+5|}{5}$ 的范围是 $[2,4]$

2．（多选题）已知圆 $C:(x-1)^2+y^2=1, A(3,1)$，点 P 为圆 C 上一动点，O 为坐标原点，则下列说法中正确的是（　）

A．$|AP|$ 的最大值为 $\sqrt{5}+1$

B．$|OP|+|PA|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$

C．直线 AP 的斜率范围为 $\left[0,\frac{4}{3}\right]$

D．以线段 AC 为直径的圆与圆 C 的公共弦方程为 $y=-2x+\frac{3}{2}$

3．（多选题）点 $P\left(x_0,y_0\right)$ 是圆 $C:x^2+y^2-8x-6y+21=0$ 上的动点，则下面正确的有（　）

A．圆的半径为 3

B．$\frac{y_0}{x_0-3}$ 既没有最大值，也没有最小值

C．$2x_0+y_0$ 的范围是 $\left[11-2\sqrt{5},11+2\sqrt{5}\right]$

D．$x_0^2+y_0^2+2x_0+3$ 的最大值为 72

4．（多选题）（2024·高三·福建福州·期末）已知 $A(-3,0)$，$B(3,0)$，动点 C 满足 $|CA|=2|CB|$，记 C 的轨迹为 Γ .过 A 的直线与 Γ 交于 P，Q 两点，直线 BP 与 Γ 的另一个交点为 M，则(　)

A．Q，M 关于 x 轴对称　　B．$\triangle PAB$ 的面积的最大值为 $6\sqrt{3}$

C．当 $\angle PMQ=45^\circ$ 时，$|PQ|=4\sqrt{2}$　　D．直线 AC 的斜率的范围为 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$

5．（多选题）若实数 x、y 满足条件 $x^2+y^2=1$，则下列判断正确的是（　）

A．$x+y$ 的范围是 $\left[0,\sqrt{2}\right]$　　B．x^2-4x+y^2 的范围是 $[-3,5]$

C．xy 的最大值为 1　　D．$\frac{y-2}{x+1}$ 的范围是 $\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right]$

6．（多选题）数学家欧拉在 1765 年提出定理：三角形的外心、重心、垂心位于同一直线上，这条直线被

后人称为三角形的“欧拉线”.在平面直角坐标系中作$\triangle ABC$，$AB=AC=4$，点$B(-1，3)$，点C

(4，－2)，且其“欧拉线”与圆 M：$(x-3)^2+y^2=r^2$ 相切，则下列结论正确的是（　）

A．圆 M 上点到直线 $x-y+3=0$ 的最小距离为 $2\sqrt{2}$

B．圆 M 上点到直线 $x-y+3=0$ 的最大距离为 $3\sqrt{2}$

C．圆 M 上到直线 BC 的距离为 $\frac{1}{2}$ 的点有且仅有 2 个

D．圆 $(x-a-1)^2+(y-a)^2=8$ 与圆 M 有公共点，则 a 的范围是 $[1-2\sqrt{2},1+2\sqrt{2}]$

7．（多选题）设点 $P(x,y)$ 为圆 $C:x^2+y^2=1$ 上一点，已知点 $A(4,0)$，$B(5,0)$，则下列结论正确的有（　）

A．$x+y$ 的最大值为 $\sqrt{2}$

B．$x^2+y^2-4x-4y$ 的最小值为 -8

C．存在点 P 使 $|PB|=\sqrt{2}|PA|$

D．过 A 点作圆 C 的切线，则切线长为 $\sqrt{15}$

8．（多选题）（2024·高三·辽宁鞍山·开学考试）已知直线 $l:kx-y+k=0$，圆 $C:x^2+y^2-6x+5=0,P(x_0,y_0)$ 为圆 C 上任意一点，则下列说法正确的是（　）

A．$x_0^2+y_0^2$ 的最大值为 5

B．$\frac{y_0}{x_0}$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C．直线 l 与圆 C 相切时，$k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

D．圆心 C 到直线 l 的距离最大为 4

9．（多选题）（2024·江西宜春·三模）古希腊数学家阿波罗尼斯的著作《圆锥曲线论》中给出了阿波罗尼斯圆的定义：在平面内，已知两定点 A，B 之间的距离为 a（非零常数），动点 M 到 A，B 的距离之比为常数 λ（$\lambda>0$，且 $\lambda\neq1$），则点 M 的轨迹是圆，简称为阿氏圆．在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $A(-4,0),B(2,0)$，点 M 满足 $|MA|=2|MB|$，则下列说法正确的是（　）

A．$\triangle AMB$ 面积的最大值为 12　　B．$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 的最大值为 72

C．若 $Q(8,8)$，则 $|MA|+2|MQ|$ 的最小值为 10　　D．当点 M 不在 x 轴上时，MO 始终平分 $\angle AMB$

10．（多选题）已知点 P 在圆 C：$(x-4)^2+(y-4)^2=9$ 上，点 $A(4,0)$，$B(0,2)$，则（　）

A．直线 AB 与圆 C 相切

B．点 P 到直线 AB 的距离小于 7

C．当 $\angle PBA$ 最大时，$|PB|=\sqrt{11}$

D．$\angle PBA$ 的最小值小于 15°

11．（多选题）（2024·高三·浙江宁波·期末）已知 M 为直线 $x-y+5=0$ 上的一点，动点 N 与两个定点 $O(0,0)$，$A(3,0)$ 的距离之比为 2，则（　）

A．动点N的轨迹方程为$(x-4)^2+y^2=4$　B．$|MN|\ge 2+\frac{9\sqrt{2}}{2}$

C．$|MN|+\frac{1}{2}|NO|$的最小值为$4\sqrt{2}$　　　D．$\angle AON$的最大角为$\frac{\pi}{6}$

12．（多选题）已知点M在圆$Q:x^2+(y+2)^2=4$上，点P是直线$l:4x-3y+6=0$上一点，过点P作圆Q的两条切线，切点分别为A、B，又设直线l分别交x,y轴于C，D两点，则（　）

A．$|PA|$的最小值为$\frac{2\sqrt{10}}{5}$　　　B．直线AB必过定点

C．满足$MC\perp MD$的点有两个　　　D．$|MD|+2|MC|$的最小值为$\sqrt{13}$

13．（2024·高三·山东济宁·开学考试）过直线$l:x+y-4=0$上一点P作圆$C:x^2+y^2-2x-2y+1=0$的两条切线，切点分别为A,B，则线段AB的长度的范围是___.

14．已知$l_1:mx-y-3m+1=0$与$l_2:x+my-3m-1=0$相交于点P线段AB是圆$C:(x+1)^2+(y+1)^2=4$的一条动弦，且$|AB|=2\sqrt{3}$则$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$的范围为

15．（2024·高三·上海闵行·开学考试）阿波罗尼斯证明过这样一个命题：平面内到两定点距离之比为常数的点的轨迹是圆，后人将这个圆称为阿波罗尼斯圆.若平面内两定点A，B间的距离为3，动点P满足$\frac{|PA|}{|PB|}=2$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的范围为_____.

16．（2024·江西宜春·一模）已知点$A(-1,-1),B(1,-1)$，若圆$(x-a)^2+(y-2a+4)^2=1$上存在点M满足$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=3$，则实数$a$的取值的范围是_____.

17．已知$A(-m,0),B(m,0)(m>0)$，若圆$C:x^2+y^2+6x-8y+21=0$上存在点P，使得$|PA|^2+|PB|^2=4m^2$，则m的范围____.

18．（2024·上海·一模）已知点D为圆$O:x^2+y^2=4$的弦MN的中点，点A的坐标为$(1,0)$，且$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=1$，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$的范围是___.

19．已知$A(1,2)$，$B(-3,-1)$，若圆$x^2+y^2=r^2$（$r>0$）上恰有两点M，N，使得$\triangle MAB$和$\triangle NAB$的面积均为5，则r的范围是_____.

20．（2024·高三·河北邢台·开学考试）已知实数a,b满足$a^2+b^2=2a-2b$，则$\frac{3-b}{a+1}$的最大值为_____.

21．已知圆$C_1:x^2+y^2+4x-4y=0$，动点P在圆$C_2:x^2+y^2-4x-12=0$上，则$\triangle PC_1C_2$面积的最大值为___.

22．（2024·河南周口·模拟预测）已知点$A(1,0)$，M为圆$x^2+y^2=4$上一动点，N为直线$2x-y+7=0$上一点，则$2|AM|+|MN|$的最小值为___.

23．已知x,y满足$x^2+y^2=4$，则函数$T=3\sqrt{5-2x}+\sqrt{13-6y}$的最小值为_____.

重难点突破 01 圆中的范围与最值问题

目录

01 方法技巧与总结

1、涉及与圆有关的最值，可借助图形性质，利用数形结合求解．一般地：

（1）形如 $\mu=\dfrac{y-b}{x-a}$ 的最值问题，可转化为动直线斜率的最值问题．

（2）形如 $t=ax+by$ 的最值问题，可转化为动直线截距的最值问题．

（3）形如 $m=(x-a)^2+(y-b)^2$ 的最值问题，可转化为曲线上的点到点（a，b）的距离平方的最值问题.

2、解决圆中的范围与最值问题常用的策略：

（1）数形结合

（2）多与圆心联系

（3）参数方程

（4）代数角度转化成函数值域问题

02 题型归纳与总结

题型一：斜率型

【典例 1-1】已知实数x，y 满足方程 $y=\sqrt{-x^2+4x-1}$，则 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值为（　）

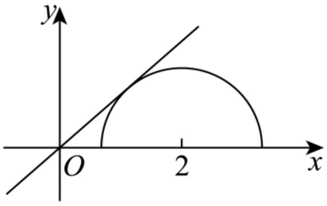
A．0　　B．1　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【答案】B

【解析】方程 $y=\sqrt{-x^2+4x-1}$ 化为 $(x-2)^2+y^2=3(y\geq 0)$，

表示的图形是一个以 $(2,0)$ 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的半圆，

令 $\dfrac{y}{x}=k$，即 $y=kx$，如图所示，



当直线与半圆相切时，圆心到直线的距离 $d=\frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{3}$，

解得 $k=\sqrt{3}$ 或 $k=-\sqrt{3}$（负值不满足条件，舍去），

所以 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$，

故选：C.

【典例 1-2】 如果实数 x，y 满足 $(x-2)^2+y^2=2$，则 $\frac{y}{x}$ 的范围是（　）

A．$(-1,1)$　　B．$[-1,1]$　　C．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　D．$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

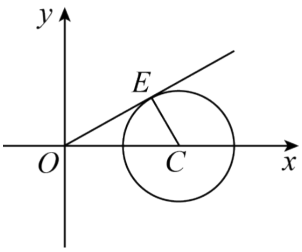
【答案】A

【解析】设 $\frac{y}{x}=k$，则 $y=kx$ 表示经过原点的直线，k 为直线的斜率.

如果实数 x，y 满足 $(x-2)^2+y^2=2$ 和 $\frac{y}{x}=k$，即直线 $y=kx$ 同时经过原点和圆上的点 (x,y).

其中圆心 $C(2,0)$，半径 $r=\sqrt{2}$

从图中可知，斜率取最大值时对应的直线斜率为正且刚好与圆相切，设此时切点为 E



则直线的斜率就是其倾斜角 $\angle EOC$ 的正切值，易得 $|OC|=2$，$|CE|=r=\sqrt{2}$，

可由勾股定理求得 $|OE|=\sqrt{OC^2-CE^2}=\sqrt{2}$，于是可得到 $k=\tan\angle EOC=\frac{CE}{OE}=1$ 为 $\frac{y}{x}$ 的最大值；

同理，$\frac{y}{x}$ 的最小值为－1.

则 $\frac{y}{x}$ 的范围是 $[-1,1]$.

故选：B.

【变式 1-1】 若实数 x、y 满足条件 $x^2+y^2=1$，则 $\frac{x+y-1}{x+1}$ 的范围是（　）

A．$\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$　　B．$\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]$　　C．$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$　　D．$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

【答案】A

【解析】令$\frac{x+y-1}{x+1}=k$，可得$(k-1)x-y+k+1=0$，

则直线$(k-1)x-y+k+1=0$与圆$x^2+y^2=1$有公共点，

所以，$\frac{|k+1|}{\sqrt{(k-1)^2+1}}\le 1$，解得$k\le\frac{1}{4}$，

即$\frac{x+y-1}{x+1}$的取值范围是$\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]$.

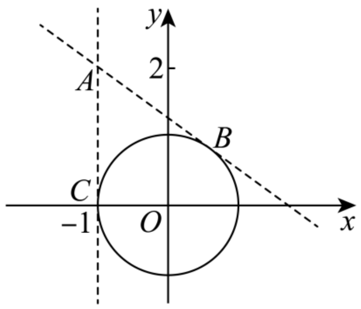
故选：B.

【变式 1-2】（2024·山东日照·二模）若实数x、y满足条件$x^2+y^2=1$，则$\frac{y-2}{x+1}$的范围是（　）

A．$\left[0,\sqrt{2}\right]$　　B．$\left[-3,5\right]$　　C．$\left(-\infty,-1\right]$　　D．$\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right]$

【答案】D

【解析】$\frac{y-2}{x+1}$的几何意义即圆上的点(x,y)到定点$(-1,2)$的斜率，由图知，斜率的范围处在圆的两条切线斜率之间，其中AC斜率不存在，设AB的斜率为k，



则AB的方程为$y=k(x+1)+2=kx+k+2$，

由切线性质有，$\frac{|k+2|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得$k=-\frac{3}{4}$，故$\frac{y-2}{x+1}$的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right]$，

故选：D

【变式 1-3】已知$P(m,n)$为圆$C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$上任意一点，则$\frac{m+n}{m+1}$的最大值为（　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$1+\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$1-\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】B

【解析】$\frac{m+n}{m+1}=\frac{m+1+n-1}{m+1}=1+\frac{n-1}{m+1}$，

由于$P(m,n)$为圆$C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$上任意一点，

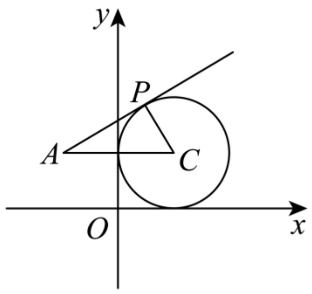
故$\frac{n-1}{m+1}$可看作圆上任意一点$P(m,n)$到定点$A(-1,1)$的斜率，

当直线PA与圆相切时，此时斜率最大，

由于相切时，$|AC|=2,|CP|=1$ 故 $|PA|=\sqrt{3}$，此时斜率 $k=\dfrac{|PC|}{|AP|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，

故 $\dfrac{m+n}{m+1}$ 的最大值为 $1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

故选：C



题型二：直线型

【典例 2-1】（2024·江西吉安·宁冈中学校考一模）已知点 $P(x,y)$ 是圆 $x^2+y^2-6x-4y+12=0$ 上的动点，则 $x+y$ 的最大值为（　）

A．$5+\sqrt{2}$　　B．$5-\sqrt{2}$　　C．6　　D．5

【答案】D

【解析】由 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$，令 $\begin{cases}x=3+\cos\theta\\ y=2+\sin\theta\end{cases}$，则 $x+y=5+\sqrt{2}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})$，

所以当 $\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})=1$ 时，$x+y$ 的最大值为 $5+\sqrt{2}$.

故选：A

【典例 2-2】已知点 $P(x,y)$ 是圆 C：$(x-a)^2+y^2=3(a>0)$ 上的一动点，若圆 C 经过点 $A(1,\sqrt{2})$，则 $y-x$ 的最大值与最小值之和为（　）

A．4　　B．$2\sqrt{6}$　　C．-4　　D．$-2\sqrt{6}$

【答案】B

【解析】因为圆 C：$(x-a)^2+y^2=3(a>0)$ 经过点 $A(1,\sqrt{2})$，

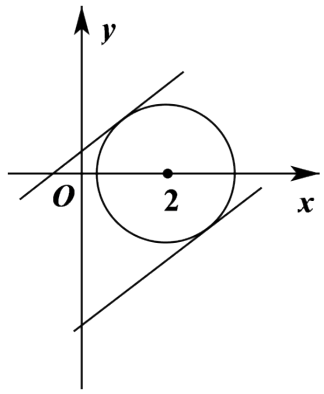
$(1-a)^2+2=3$．又 $a>0$，所以 $a=2$，

$y-x$ 可看成是直线 $y=x+b$ 在 y 轴上的截距.如图所示，

当直线 $y=x+b$ 与圆相切时，纵截距 b 取得最大值或最小值，此时 $\dfrac{|2-0+b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$，解得 $b=-2\pm\sqrt{6}$，

所以 $y-x$ 的最大值为 $-2+\sqrt{6}$，最小值为 $-2-\sqrt{6}$，故 $y-x$ 的最大值与最小值之和为 -4.

故选：C．



【变式 2-1】 点 $P(x,y)$ 在圆 $(x-2)^2+(y+3)^2=1$ 上，则 $x+y$ 的范围是____．

【答案】$\left[-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1\right]$

【解析】设 $x=2+\cos\theta$， $y=-3+\cos\theta$， 即 $P(2+\cos\theta,-3+\sin\theta)$，

所以 $x+y=\sin\theta+\cos\theta-1=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)-1$，

因为 $-1\le\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\le 1$， 所以 $-\sqrt{2}-1\le x+y\le\sqrt{2}-1$．

故答案为：$\left[-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1\right]$

【变式 2-2】 已知 x， y 满足 $x^2+y^2+2x-4y=0$， 则 $2x+y$ 的范围是____．

【答案】$[-5,5]$

【解析】因为 $x^2+y^2+2x-4y=0$， 所以 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$， 表示以 $(-1,2)$ 为圆心， $\sqrt{5}$ 为半径的圆， 即点 (x,y) 为圆 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$ 上的点，

令 $2x+y=z$， 即 $2x+y-z=0$， 当直线与圆 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$ 相切时 z 取得最值， 所以

$d=\dfrac{|2\times(-1)+2-z|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$， 即 $|z|=5$， 解得 $z=\pm 5$， 所以 $-5\le 2x+y\le 5$

故答案为：$[-5,5]$

【变式 2-3】 如果实数 x,y 满足等式 $x^2+y^2+4x-2y-4=0$， 那么 x^2+y^2 的最大值是____； $2x-y$ 的最大值是____．

【答案】 $14+6\sqrt{5}$ / $6\sqrt{5}+14$　　$3\sqrt{5}-5$ / $-5+3\sqrt{5}$

【解析】由 $x^2+y^2+4x-2y-4=0$， 得 $(x+2)^2+(y-1)^2=9, x^2+y^2$ 的几何意义为圆 $(x+2)^2+(y-1)^2=9$ 上的动点到原点距离的平方．

因为圆心 $(-2,1)$ 到原点的距离为 $\sqrt{5}$， 所以圆上的动点到原点距离的最大值为 $\sqrt{5}+3$，

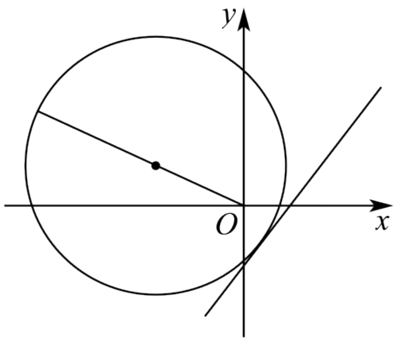
则 x^2+y^2 的最大值是 $(\sqrt{5}+3)^2=14+6\sqrt{5}$ ．

令 $2x-y=t$，则 $-t$ 是直线 $2x-y=t$ 在 y 轴上的截距，

当直线与圆相切时，直线 $2x-y=t$ 在 y 轴上的截距，一个是最大值，一个是最小值，

此时，圆心 $(-2,1)$ 到直线 $2x-y=t$ 的距离 $d=\dfrac{|-4-1-t|}{\sqrt{5}}=3$，解得 $t=-5\pm 3\sqrt{5}$，

所以 $2x-y$ 的最大值为 $3\sqrt{5}-5$．



故答案为：$14+6\sqrt{5}$；$3\sqrt{5}-5$．

题型三：距离型

【典例 3-1】已知点 $P(m，n)$在圆 $C:(x-2)^2+(y-2)^2=9$ 上运动，则 $(m+2)^2+(n+1)^2$ 的最大值为___，最小值为___，$\sqrt{m^2+n^2}$ 的范围为____．

【答案】 64 4 $[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}]$

【解析】由圆 C 的圆心为 $(2,2)$，半径为 3，且 P 在圆 C 上，

则 $(m+2)^2+(n+1)^2$ 表示在圆 C 上点到 $(-2,-1)$ 距离的平方，

而圆心到 $(-2,-1)$ 的距离为 $\sqrt{[2-(-2)]^2+[2-(-1)]^2}=5>3$，

所以在圆 C 上点到 $(-2,-1)$ 距离的最大值为 8，最小值为 2，

故 $(m+2)^2+(n+1)^2$ 的最大值为 64，最小值为 4；

又 $\sqrt{m^2+n^2}$ 表示在圆 C 上点到原点的距离，而圆心到原点距离为 $2\sqrt{2}<3$，

所以 $\sqrt{m^2+n^2}$ 的范围为 $[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}]$．

故答案为：64，4，$[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}]$

【典例 3-2】直线 $l:kx-y-2k+2=0(k\in\mathrm{R})$ 过定点 Q，若 P 为圆 $C:(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 上任意一点，则 $|PQ|$ 的最大值为（ ）

A．1 B．3 C．4 D．2

【答案】A

【解析】由 $l:kx-y-2k+2=0(k\in\mathrm{R})$，得 $y-2=k(x-2)$，

所以直线过定点$Q(2,2)$，

由$C:(x-2)^2+(y-3)^2=4$，知圆心坐标$(2,3)$，半径为2，

所以Q到圆心的距离为$d=\sqrt{(2-2)^2+(2-3)^2}=1<2$，则$Q$在圆内，

则$|PQ|$的最大值为$d+2=3$，

故选：B

【变式 3-1】（2024·浙江·三模）已知$A(-2,-2),B(1,3)$，点P在圆$x^2+y^2=4$上运动，则$|PA|^2+|PB|^2$的最大值为（　）

A．$16-6\sqrt{2}$　　B．$26+2\sqrt{2}$　　C．$26+4\sqrt{2}$　　D．32

【答案】B

【解析】设$P(2\cos\theta,2\sin\theta)$，

则$|PA|^2+|PB|^2=(2\cos\theta+2)^2+(2\sin\theta+2)^2+(2\cos\theta-1)^2+(2\sin\theta-3)^2$

$=4\cos^2\theta+8\cos\theta+4+4\sin^2\theta+8\sin\theta+4+4\cos^2\theta-4\cos\theta+1+4\sin^2\theta-12\sin\theta+9$

$=4\cos\theta-4\sin\theta+26=4\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+26$，

当$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$时，$|PA|^2+|PB|^2$取得最大值$26+4\sqrt{2}$．

故选：C.

【变式 3-2】（2024·山东济南·三模）圆$(x-1)^2+(y+1)^2=4$上的点到直线$3x+4y-14=0$的距离的最大值为（　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．9

【答案】B

【解析】圆$(x-1)^2+(y+1)^2=4$的圆心为$C(1,-1)$，半径$r=2$，

则圆心$C(1,-1)$到直线$3x+4y-14=0$的距离为$d=\frac{|3-4-14|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$，

所以圆$(x-1)^2+(y+1)^2=4$上的点到直线$3x+4y-14=0$的距离的最大值为$3+2=5$．

故选：C.

【变式 3-3】已知$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=8$，且$x_1x_2+y_1y_2=0$，则$(x_1+x_2-2)^2+(y_1+y_2)^2$的最大值为（　）

A．9　　B．12　　C．36　　D．48

【答案】B

【解析】设$A(x_1,y_1)$与$B(x_2,y_2)$为圆$O:x^2+y^2=8$上一点，

则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$，得$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$，$|OA|=|OB|=2\sqrt{2}$，

即$\triangle ABO$为等腰直角三角形，设M为AB的中点，

则$|OM|=\sqrt{x_M^2+y_M^2}=2$，得$x_M^2+y_M^2=4$，

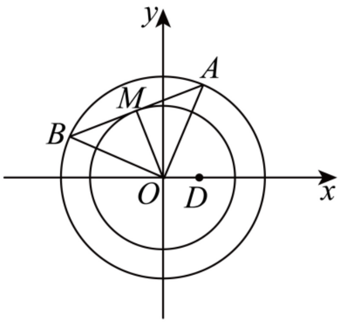
即点M在以O为圆心，2为半径的圆上，

故$(x_1+x_2-2)^2+(y_1+y_2)^2=4\left[\left(\frac{x_1+x_2}{2}-1\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2\right]=4\left[(x_M-1)^2+y_M^2\right]$，

因为点M到定点$D(1,0)$的距离的最大值为$d=3$，

因此$(x_1+x_2-2)^2+(y_1+y_2)^2$的最大值为36.

故选：C

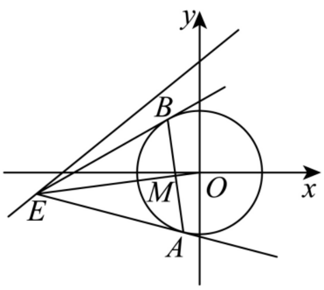


【变式 3-4】（2024·四川乐山·三模）已知圆$O:x^2+y^2=16$，点E是$l:2x-y+16=0$上的动点，过E作圆O的切线，切点分别为A,B，直线AB与EO交于点M，则$|OM|$的最大值为（　）

A．2　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{6}$　　D．$\sqrt{7}$

【答案】A

【解析】由题意作出图形如图所示



设$M(x,y)$，$E(x',y')$，由$\triangle AOE\backsim\triangle MOA$,可得$\frac{|OA|}{|OE|}=\frac{|OM|}{|OA|}$，

所以$\frac{|OE|}{|OM|}=\frac{|OA|^2}{|OM|^2}=\frac{16}{x^2+y^2}$，即$|OE|=\frac{16}{x^2+y^2}|OM|$，即$\overrightarrow{OE}=\frac{16}{x^2+y^2}\overrightarrow{OM}$，

所以$(x',y')=\frac{16}{x^2+y^2}(x,y)=\left(\frac{16x}{x^2+y^2},\frac{16y}{x^2+y^2}\right)$，

所以$\begin{cases} x'=\dfrac{16x}{x^2+y^2} \\ y'=\dfrac{16y}{x^2+y^2} \end{cases}$，

所以点$E\left(\dfrac{16x}{x^2+y^2},\dfrac{16y}{x^2+y^2}\right)$，

将点E的坐标代入直线$l:2x-y+16=0$中，

化简可得$(x+1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$（$x,y$不同时为0），

所以点M的轨迹是以$\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$为圆心，$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$为半径的圆，

所以$|OM|$的最大值为$\sqrt{(-1-0)^2+\left(\dfrac{1}{2}-0\right)^2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}.$

故选：B.

题型四：周长面积型

【典例 4-1】（2024·高三·河南·开学考试）若直线l：$kx-y+2-k=0$与圆$C:x^2+y^2-4x-2y-4=0$交于A，B两点，则当$\vee ABC$周长最小时，$k=$（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　　　C．1　　　　D．-1

【答案】B

【解析】直线l：$kx-y+2-k=0$的方程可化为$y-2=k(x-1)$

所以直线l恒过定点$D(1,2)$，

因为$1^2+2^2-4\times1-2\times4-4=-11<0$

所以点D在圆内，

由圆的性质可得当$CD\perp l$时，$|AB|$最小，$\vee ABC$周长最小，

又$C(2,1)$，$D(1,2)$

所以$k_{CD}=-1$，此时$k=1$.

故选：C.

【典例 4-2】在直角坐标系xOy中，已知$A(4,0),B(1,3),C(0,-4)$，动点M满足$\dfrac{MA}{MB}=2$，则$\triangle MAC$面积的范围为

【答案】$[8,24]$

【解析】设点$M(x,y)$，则$|MA|=\sqrt{(x-4)^2+y^2},|MB|=\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$

由已知得$|MA|=2|MB|$，

所以$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$，即$x^2+y^2-8y+8=0$

故点M的轨迹方程为$x^2+y^2-8y+8=0$，即$x^2+(y-4)^2=8$，其圆心$(0,4)$，半径为$r=2\sqrt{2}$.

直线AC的方程为$\frac{x}{4}+\frac{y}{-4}=1$，即$x-y-4=0$

圆心$(0,4)$到直线AC的距离$d=\frac{|-4-4|}{\sqrt{1+(-1)^2}}=4\sqrt{2}$

则点M到边AC的距离的最小值为$d-r=4\sqrt{2}-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，最大值为$d+r=4\sqrt{2}+2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

又$|AC|=\sqrt{(4-0)^2+(0+4)^2}=4\sqrt{2}$

则$\triangle MAC$面积的最小值为$\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=8$，最大值为$\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times6\sqrt{2}=24$，

所以$\triangle MAC$面积的范围为$[8,24]$.

故答案为：$[8,24]$.

【变式4-1】若圆C的方程为$x^2+y^2+mx+2my+(m-2)=0$，则圆C的最小周长为（　）

A．$\frac{36\pi}{5}$　　B．$\frac{18\sqrt{5}\pi}{5}$　　C．$\frac{12\sqrt{5}\pi}{5}$　　D．$\frac{6\sqrt{5}\pi}{5}$

【答案】D

【解析】因为圆C的方程为$x^2+y^2+mx+2my+(m-2)=0$，

所以圆C的半径为$r=\frac{\sqrt{m^2+(2m)^2-4(m-2)}}{2}=\frac{\sqrt{5m^2-4m+8}}{2}=\frac{\sqrt{5\left(m-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{36}{5}}}{2}\geq\frac{1}{2}\times\frac{6\sqrt{5}}{5}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，

所以圆C的最小周长为$2\pi r=\frac{6\sqrt{5}\pi}{5}$.

故选：D.

【变式4-2】已知点A,B在直线$l:x-2y-2=0$上运动，且$|AB|=2\sqrt{5}$，点C在圆$(x+1)^2+y^2=5$上，则$\vee ABC$的面积的最大值为（　）

A．8　　B．5　　C．2　　D．1

【答案】D

【解析】设圆心到直线的距离为d，C到直线的距离为d_1，

又圆心坐标为$(-1,0)$，则$d=\frac{|-1-2|}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$，

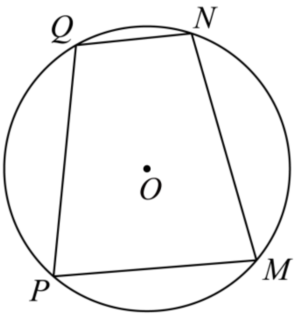
又半径为$\sqrt{5}$，则当d_1最大时，$d_1=d+\sqrt{5}=\frac{3}{\sqrt{5}}+\sqrt{5}$，

此时$\vartriangle ABC$面积也最大，$S_{\vartriangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\left(\frac{3}{\sqrt{5}}+\sqrt{5}\right)=8$．

故选：A．

题型五：数量积型

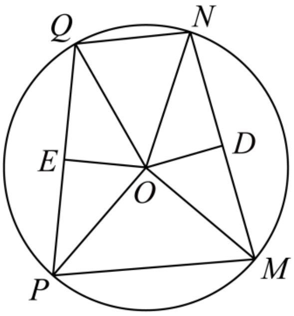
【典例 5-1】已知PQ,MN是半径为 5 的圆O上的两条动弦，$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=6,\left|\overrightarrow{MN}\right|=8$，则$\left|\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{QN}\right|$最大值是（　）



A．7　　　B．12　　　C．14　　　D．16

【答案】B

【解析】



如图，连接MO,OQ,OP,ON，作$PQ\perp OE$，$MN\perp OD$，

易知E是QP的中点，D是MN的中点，由勾股定理得$OE=4$，$OD=3$，

故$\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OQ}=(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})-(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})=2(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OE})$，

故$\left|\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{QN}\right|=2\left|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OE}\right|\le 2(\left|\overrightarrow{OD}\right|+\left|\overrightarrow{OE}\right|)=14$，当$\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD}$反向时等号成立，故 C 正确.

故选：C

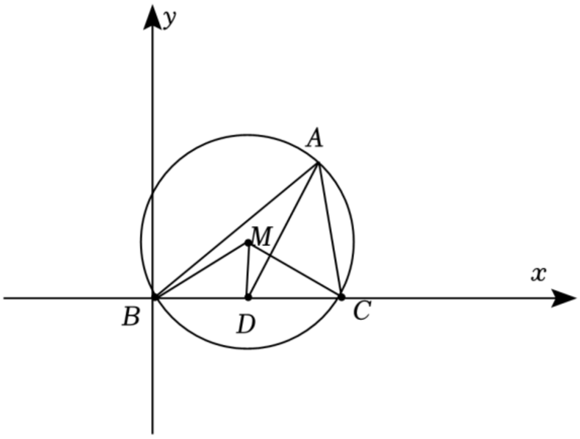
【典例 5-2】在$\triangle ABC$中，$BC=2$，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，D为BC中点，在$\triangle ABC$所在平面内有一动点P满足$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}$，则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}$的最大值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　B．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　　C．$\sqrt{3}$　　　D．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【答案】D

【解析】由$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}$，得$\overrightarrow{PD}\cdot(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB})=0$，即$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，

所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{PD})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.



因为 $BC=2$，$\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$，所以点 A 在以 BC 为弦的优弧上运动（不含端点）.

设 $\overset{\frown}{BAC}$ 所在圆的圆心为 M，连接 MB、MC、MD，

则 $MD\perp BC$，$\angle BMC=\dfrac{2\pi}{3}$，可得 $BD=1$，$MD=\dfrac{BD}{\tan\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$,BM=\dfrac{BD}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

以 B 为原点，BC 所在直线为 x 轴，建立如图所示平面直角坐标系，

可得 $C(2,0),D(1,0),M\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，圆 M 的方程为 $(x-1)^2+\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{4}{3}$，

设 $A(m,n)$，则 $\overrightarrow{AD}=(1-m,-n)$，结合 $\overrightarrow{BC}=(2,0)$，

可得 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=2(1-m)+0=2-2m$，

因为 A 点在圆 M：$(x-1)^2+\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{4}{3}$ 上运动，

所以 $1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\le m\le 1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，可得当 $m=1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，$2-2m=2-2(1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3})=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，达到最大值.

综上所述，当 $m=1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$ 有最大值 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

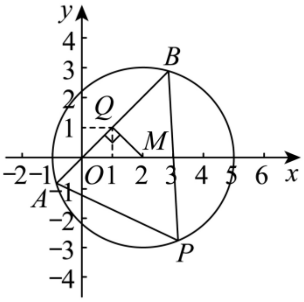
故选：D.

【变式 5-1】已知圆 $(x-2)^2+y^2=9$ 的弦 AB 的中点为 $Q(1,1)$，点 P 为圆上的动点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最大值为（　）

A. 2　　　　B. $6\sqrt{2}-3$　　　　C. 8　　　　D. $4+6\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】圆 $(x-2)^2+y^2=9$，圆心 $M(2,0)$，半径为 3，如图，



$\because Q(1,1)$ 为弦 AB 的中点，$\therefore MQ \perp AB, |MQ| = \sqrt{2}$，

$|AB| = 2\sqrt{|MB|^2 - |MQ|^2} = 2\sqrt{7}$,

$\because |PQ| \le |MQ| + 3 = 3 + \sqrt{2}$, P, M, Q 共线时等号成立，

$$\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB}\right) = \left(\overrightarrow{PQ} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$= |PQ|^2 - \frac{|AB|^2}{4} = |PQ|^2 - 7 \le 11 + 6\sqrt{2} - 7 = 4 + 6\sqrt{2}.$$

故选:D.

【变式 5-2】在矩形 $ABCD$ 中，$AB = 2$，$AD = 3$，P 为矩形 $ABCD$ 所在平面内的动点，且 $PA = 1$，则 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的最大值是（　）

A．9　　　B．10　　　C．11　　　D．12

【答案】A

【解析】如图，建立平面直角坐标系，设 $P(x, y)$，BC 中点为 H，

因为 $AB = 2$，$AD = 3$，所以 $A(0,0)$, $B(2,0)$，$C(2,3)$，$H(2, \frac{3}{2})$，

得到 $\overrightarrow{PB} = (2-x, -y), \overrightarrow{PC} = (2-x, 3-y)$，所以 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = (x-2)^2 + y^2 - 3y = (x-2)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}$，

又因为 $PA = 1$，所以 $x^2 + y^2 = 1$，

又 $PH = \sqrt{(x-2)^2 + (y - \frac{3}{2})^2} \le AH + AP = \sqrt{2^2 + \frac{9}{4}} + 1 = \frac{7}{2}$，当且仅当 H, A, P（P 在 HA 的延长线上）三点共线时取等号，

所以 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = (x-2)^2 + y^2 - 3y = (x-2)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} \le \frac{49}{4} - \frac{9}{4} = 10$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/758044142130007007