本章主要内容

- 李雅普诺夫关于稳定性的定义
- 李雅普诺夫第一法
- Lyapunov第二法
- 李雅普诺夫方法在线性系统中的应用
- Matlab在线性系统稳定性分析中的应用

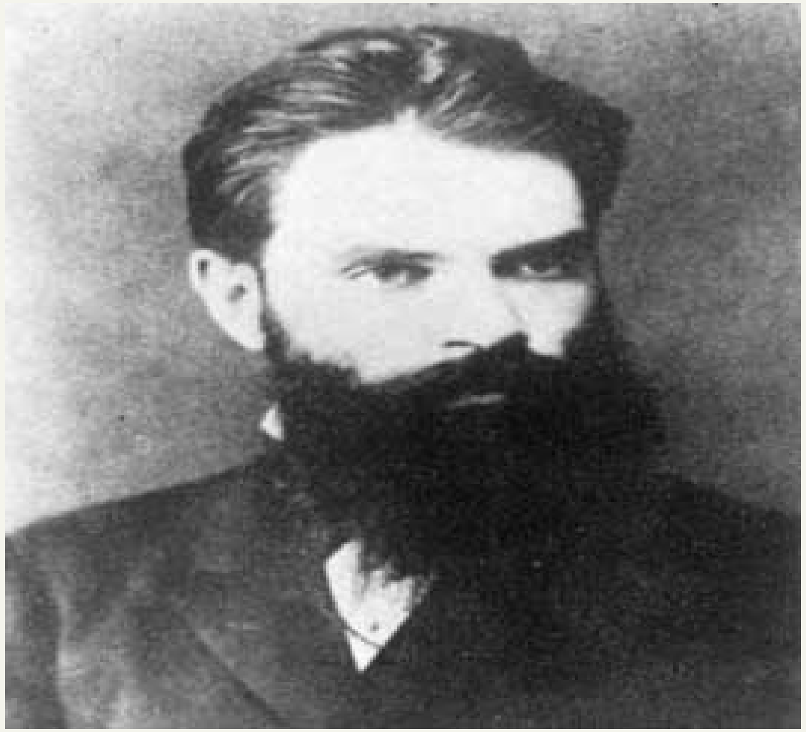
稳定性与李雅普诺夫方法

- 稳定性是一个控制系统工作的首要、必要条件。
- 经典控制理论判稳方法：

  劳斯判据、根轨迹法、奈氏判据、对数频率判据.

- 适用范围：线性定常系统
- 对于简单的非线性系统，采用负倒描述函数法

- 早在1892年，俄国学者李雅普诺夫（Aleksandr Mikhailovich Lyapunov ，
  1857 - 1918）发表题为“运动稳定性一般问题”的著名文献，建立了关于运动稳定性研究的一般理论。



百余年来，李雅普诺夫理论得到极大发展，在数学、力学、控制理论、机械工程等领域得到广泛应用。

稳定性与李雅普诺夫方法

- 1892年俄国学者李雅普诺夫（Lyapunov）提出的稳定性理论，给出了两种判别方法：

  Lyapunov第一法 和 Lyapunov第二法

- 不仅适用于单变量线性系统，还适用于多变量、非线性、时变系统，它是确定系统稳定性的更一般理论;

- Lyapunov第一法：通过求解系统微分方程，根据解的性质来判断系统的稳定性(和经典控制论是一致的）；

- Lyapunov第二法：不用求解方程，通过Lyapunov函数来判断系统的稳定性。

补充知识

1、范数

范数在数学上定义为度量n维空间中的点之间的距离。

对n维空间中任意两点x1和x2，它们之间距离的范数$\|x_1 - x_2\|$

由于所需要度量的空间和度量的意义的不同，相应有各种具体范数的定义。

在工程中常用的是2-范数，即欧几里德范数，其定义式为

$$\|x_1 - x_2\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{1,i} - x_{2,i})^2}$$

- 向量空间上的欧几里德范数（即向量长度）

欧几里德范数定义为：

$$\|x\| = |x| \qquad x \in R$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \qquad x \in R^2$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \qquad x \in R^3$$

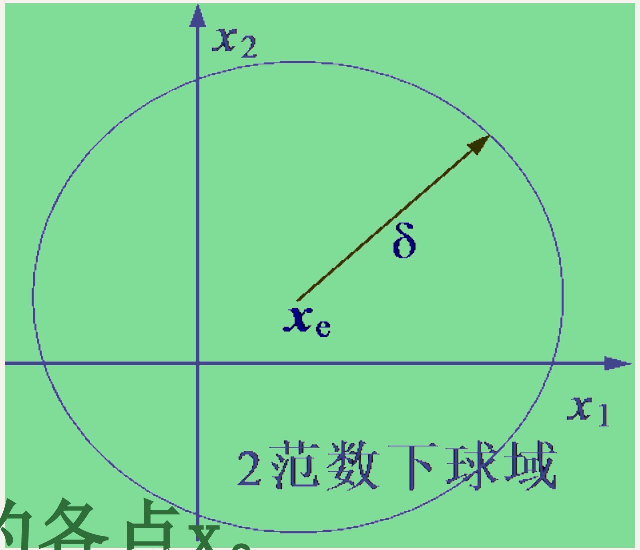
$$\|x\| = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} \qquad x \in R^n$$

向量x 与 x_e 的距离为：

$$\|x-x_e\|=\sqrt{(x_1-x_{e1})^2+\cdots+(x_n-x_{en})^2}$$

$\|x-x_e\|$ 限定在某一范围时 $\delta>0$ ，记作 $\|x-x_e\|\le\delta$

以n维空间中的点xe为中心，在范数度量意义下的长度δ 为半径内的各点所组成空间体称为球域，记为$S(x_e,\delta)$ ，即：



$S(x_e,\delta)$ 包含满足$\|x-x_e\|\le\delta$ 的n维空间中的各点x。

5.1李雅普诺夫关于稳定性的定义

在经典控制论中，线性系统的稳定性只取决于系统的结构和参数，

而与初始条件和外界扰动无关。

非线性系统的稳定性与初始条件及外界扰动的大小有关。

Lyapunov第二法是一种普遍适用于线性系统、非线性系统及时变

系统稳定性分析的方法。

Lyapunov稳定性定义则适用于任何系统。

5.1李雅普诺夫关于稳定性的定义

5.1.1 系统的平衡状态

齐次系统的状态方程：

$$\dot{x}=f(x,t),\ \ x(t_0)=x_0$$

在给定的初始条件 (x_0,t_0) 下有唯一解：

$$x=\Phi(t,x_0,t_0)$$

1 描述了系统在n维状态空间中从初始条件出发的一条 状态运动的轨迹

—状态轨线；

2. 平衡状态：如果存在状态矢量 x_e ，对于所有的t满足 $f(x_e,t)\equiv 0$

则称 x_e 为系统的平衡状态。

5.1李雅普诺夫关于稳定性的定义

注1：对一个任意系统不一定都存在着平衡状态，即使有了平衡状态，也不一定是唯一的。

例1 线性定常系统 $\dot{x} = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$

A非奇异，则原点是系统唯一的平衡状态.

线性定常系统 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x$

A为奇异矩阵时，系统有无穷多个平衡点。

5.1李雅普诺夫关于稳定性的定义

例2 非线性系统：$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2^3 \end{cases}$

有以下三个平衡状态：

$$x_{e1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_{e2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, x_{e3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

注2：对于非线性系统，通常有一个或多个平衡状态。

注3：由于任意一个已知的平衡状态，都可以通过坐标变换将其移到坐标原点处。

注4：稳定性问题都是相对于某个平衡状态而言的。

5.1.2　李雅普诺夫稳定性定义

用 $\|x-x_e\|$ 表示状态矢量x与平衡状态xe之间的距离，用点集 $S(\varepsilon)$ 表示以xe中心，ε 为半径的超球体，那么 $x\in S(\varepsilon)$ 则表示：

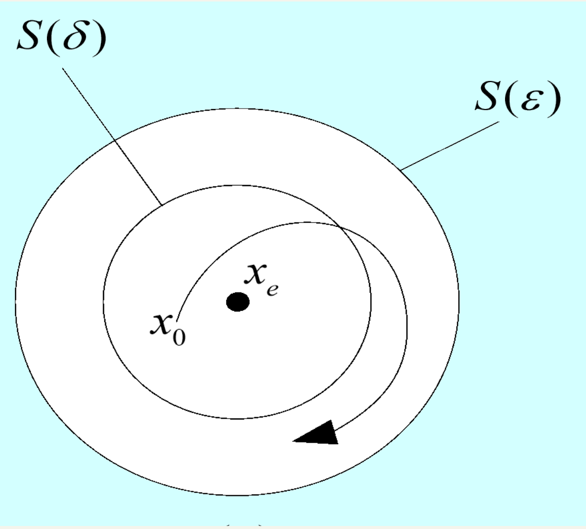
$$\|x-x_e\|\le\varepsilon$$

若状态方程 $\dot{x}=f(x,t), x_0=x(t_0)$ 的解 $\Phi(t,x_0,t_0)$ 位于球域 $x\in S(\varepsilon)$ 内，则有：

$$\|\Phi(t;x_0,t_0)-x_e\|\le\varepsilon\ ,t\ge t_0$$

5.1李雅普诺夫关于稳定性的定义

2.1. 李雅普诺夫意义下的稳定性



定义：状态方程 $\dot{x}= f(x,t)$，对于 $\forall\varepsilon>0$，

都对应 $\exists\,\delta(\varepsilon,t_0)>0$ ，使得

当 $\|x_0-x_e\|\le\delta(\varepsilon,t_0)$ 时 ，

从任意初始状态x₀出发的解都满足：

$$\|\Phi(t;x_0,t_0)-x_e\|\le\varepsilon\ ,t_0\le t<\infty$$

则称平衡状态 x_e 为李雅普诺夫意义下稳定的。

若 δ 与 t_0 无关，则称这种平衡状态为一致稳定。

2.2 渐近稳定

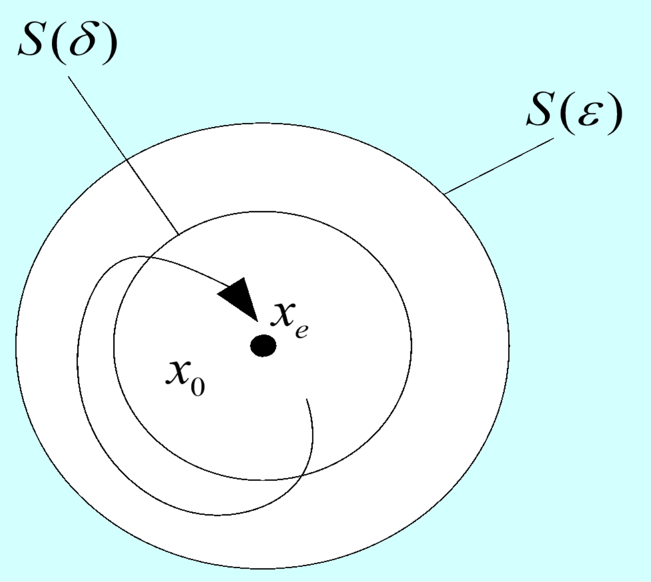
定义：如果平衡状态xe是Lyapunov意义下稳定，

且当 $t\to\infty$ 时 $x(t)\to x_e$ 时，有

即：

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\Phi(t;x_0,t_0)-x_e\right\|=0$$

则称平衡状态 x_e 是渐近稳定的。

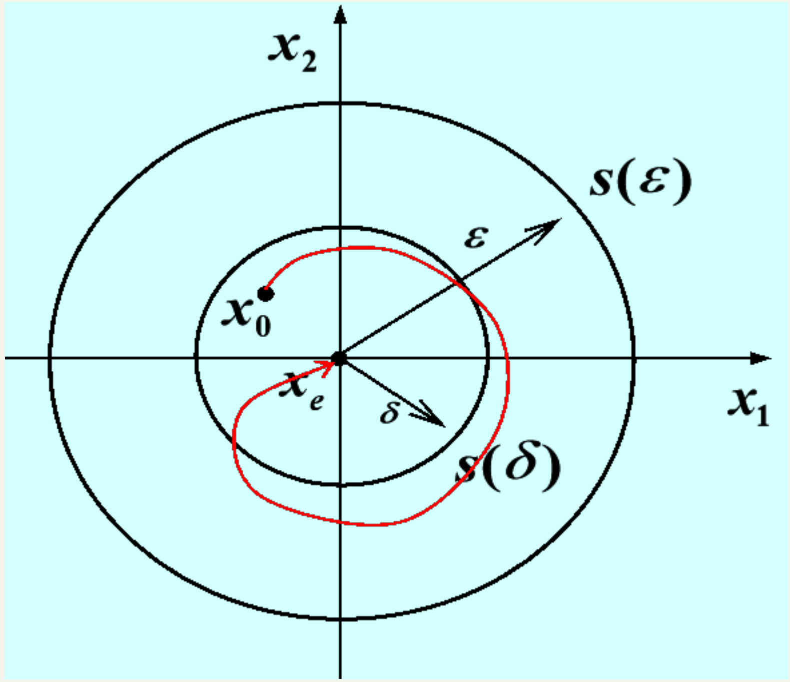


渐近稳定是一个局部概念，只能确定某平衡状态的稳定性，并不意味着整个系统能正常运行。

5.1李雅普诺夫关于稳定性的定义

2.3.大范围(全局)渐近稳定

若平衡状态xe为渐近稳定，且从状态空间中所有初始状态出发的轨线都具有渐近稳定性，则称平衡状态xe**大范围渐近稳定**。



大范围渐近稳定的必要条件是：**在整个状态空间只有一个平衡状态**。

线性系统，平衡状态的渐近稳定就是大范围渐近稳定；

非线性系统，一般只是小范围渐近稳定。

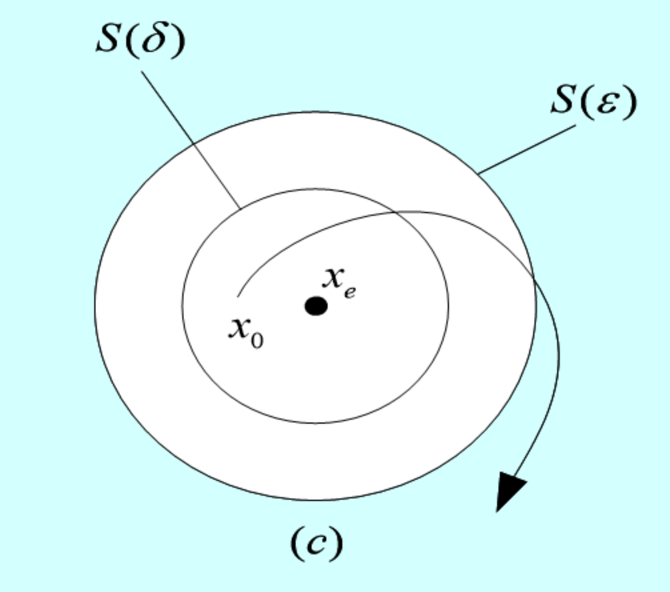
5.1李雅普诺夫关于稳定性的定义

2.4. 不稳定

如果对于某个实数 $\varepsilon > 0$ 和任一个实数 ∀ δ>0 ，

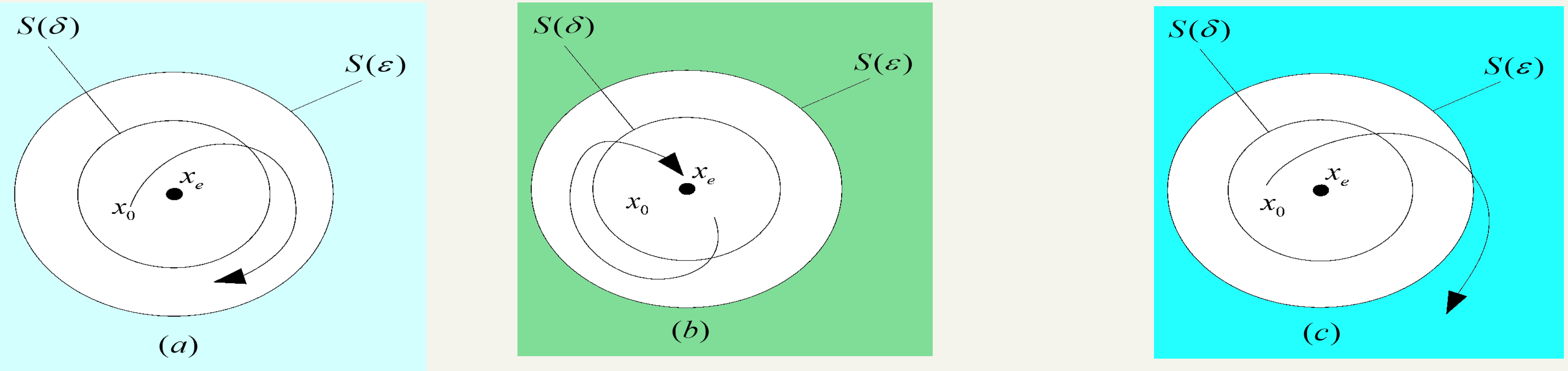
不管这个实数 $\varepsilon>0$ 多小，由 $S(\varepsilon)$ x_0 内发出的状态轨线，

至少有一个状态轨 平衡状态xe不稳定。



(c)

5.1李雅普诺夫关于稳定性的定义



稳定　　　　渐近稳定　　　　不稳定

球域 $S(\delta)$ 限制初始状态x0的取值，球域 $S(\varepsilon)$ 规定了系统响应x(t)的边界。

如果x(t)有界，xe在李雅普诺夫意义下稳定；

如果x(t)有界且 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=0$，收敛于原点，则xe渐近稳定；

如果x(t)无界，xe不稳定。

5.2李雅普诺夫第一法

- Lyapunov第一法又称间接法。它的基本思路是通过系统状态方程的解来判断系统的稳定性。

- 对于线性定常系统，只需解出特征方程的根就可以作出稳定性判断。

- 对于非线性不是很严重的系统，则可以通过线性化处 理，得到近似线性方程，然后再来判断。

5.2 李雅普诺夫第一法

5.2.1 线性系统的稳定判据

定理1：对于线性定常系统

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}$$

系统的平衡状态 $x_e=0$ 在李雅普诺夫意义下渐近稳定的充要条件是：

A 的所有特征值均具有负实部。

状态稳定性—内部稳定性

5.2 李雅普诺夫第一法

定义：若系统对有界输入引起的输出是有界，则称系统为输出稳定。

定理2： 对于线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

传递函数为： $W(s) = C(sI - A)^{-1}B$

线性定常系统 输出 稳定的充要条件为：

传递函数的所有极点均位于s左半平面

5.2 李雅普诺夫第一法

例1　分析系统 $\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$ 渐近稳定和输出稳定。

解：　1 $|\lambda I - A| = (\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

故系统不是渐近稳定。

2　$W(s) = c(sI - A)^{-1} b = \dfrac{s-1}{(s-1)(s+1)} = \dfrac{1}{s+1}$

闭环极点 $s = -1$，位于 s 平面左半部分，所以系统为输出稳定。

结论：　输出稳定 $\begin{matrix} \longleftarrow \\ \not\longrightarrow \end{matrix}$ 渐近稳定。

5.2.2　非线性系统的稳定性

设系统的状态方程

$$\dot{x} = f(x,t)$$

其中：xe为平衡状态；$f(x,t)$ 是和x同维的矢量函数且对x具有连续偏导.

把非线性函数在xe的邻域内展开成泰勒级数：

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_e) + R(x)$$

5.2 李雅普诺夫第一法

把非线性函数 $\dot{x}=f(x,t)$ 在xe的邻域内展开成泰勒级数：

$$\dot{x}=\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_e)+R(x)$$

R(x)是泰勒展开式中的高阶导数项

其中：
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

雅可比矩阵

若：$\Delta x=x-x_e$ ，可得到线性化方程：$\Delta\dot{x}=A\Delta x$

5.2 李雅普诺夫第一法

近似线性化方程： $\Delta\dot{x} = A\Delta x$

（1） 如果A的特征根都具有负实部，则非线性系统的平衡状态xe是渐近稳定；

（2） 如果A至少存在一个正实部的特征根，则非线性系统的平衡状态xe是不稳定；

（3）如果A至少存在一个零实部的特征根，则非线性系统的平衡状态xe是临界稳定，其稳定性取决于高阶导数项R(x)。

5.2 李雅普诺夫第二法

例2　已知非线性系统如下，分析在平衡点的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1 x_2 \end{cases}$$

解：系统有两个平衡状态：

$$x_{e1} = (0,0)^{\mathrm{T}}, x_{e2} = (1,1)^{\mathrm{T}}$$

在xe$_1$处将其线性化：

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - x_2 & -x_1 \\ x_2 & x_1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| sI - A \right| = 0 \ \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$$

5.2 李雅普诺夫第一法

在xe_2处将其线性化：

$$A=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-x_2 & -x_1\\ x_2 & x_1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$|sI-A|=0\Rightarrow\lambda_1=-j,\lambda_2=j$$

系统在xe_2处无法判断

5.2 李雅普诺夫第一法

- 已知非线性系统如下，分析在平衡点的稳定性

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = 4x_1 - x_1 x_2 \\
\dot{x}_2 = x_2 + x_1^2 x_2
\end{cases}
$$

5.3 李雅普诺夫第二法

- 李氏第二法称为直接法，建立在用能量观点分析稳定性的基础上。
- 若系统的平衡状态是渐近稳定，则系统激励后其存储的能量将随着时间的推移而衰减；
- 当趋于平衡状态时，其能量达到最小值；
- 反之，若系统的平衡状态是不稳定的，则系统将不断从外界吸收能量，其存储的能量将越来越大。

5.3 李雅普诺夫第二法

5.3.1 预备知识

1. 标量函数的符号性质

V(x)是n维矢量x所定义的标量函数，在x=0时，恒有V(x)=0. 对于其它任何非零x，有：

1) $V(x)>0$，V(x)正定；

2) $V(x)\geq 0$，V(x)正半定；

3) $V(x)<0$，V(x)负定；

4) $V(x)\leq 0$，V(x)负半定；

5) $V(x)<0, V(x)>0$，V(x)不定。

5.3 李雅普诺夫第二法

$$V(x)=x_1^2+x_2^2$$

正定的

$$V(x)=(x_1+x_2)^2$$

半正定

$$V(x)=-x_1^2-x_2^2$$

负定

$$V(x)=-(3x_1+2x_2)^2$$

半负定

$$V(x)=x_1x_2-x_2^2$$

不定

2. 二次型标量函数

1）二次型函数：由n个变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$

组成的二次齐次多项式，称（n元）二次型函数

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P_{ij} x_i x_j$$

2）二次型函数的矩阵表示

$$V(x) = x^{\mathrm{T}} P x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

通常P为对称方阵

5.3 李雅普诺夫第二法

对于二次型函数，如果P为实对称矩阵，则必存在着正交矩阵T，通过变换 $x = T\bar{x}$ ，可化为：

$$V(x) = x^{\mathrm{T}}Px = \bar{x}^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}PT\bar{x} = \bar{x}^{\mathrm{T}}(T^{-1}PT)\bar{x}$$

$$= \bar{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\bar{x}$$

二次型函数的标准型，其中 λ_i 是P阵的互异特征根。

$V(x)$ 正定的充要条件是所有的特征根均大于零。

5.3 李雅普诺夫第二法

二次型函数的符号性质

设二次型函数 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$ ，P为n维实对称方阵

1)若V(x)正定，则矩阵P正定，记为P>0；

2)若V(x)负定，则矩阵P负定，记为P<0；

3)若V(x)半正定，则矩阵P半正定，记为$P\geq 0$；

4)若V(x)半正定，则矩阵P半正定，记为$P\leq 0$。

3 希尔维斯特判据

实对称矩阵
$$P=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}, P_{ij}=P_{ji}$$

各阶顺序主子行列式：

$$\Delta_1 = p_{11},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix},\quad \ldots,\quad \Delta_n=|P|$$

则矩阵P 或V(x)定号性的充要条件是：

5.3 李雅普诺夫第二法

1 若 $\Delta_i > 0, (i = 1, 2, \ldots, n)$ ，则矩阵P或V(x)为正定；

2 若$\Delta_i \begin{cases} > 0, & i = 2, 4, 6, \ldots \\ < 0, & i = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$ ，则矩阵P或V(x)为负定；

3 若 $\Delta_i \begin{cases} \geq 0, & i = 1, 2, 3, \ldots n-1 \\ = 0, & i = n \end{cases}$ ，则矩阵P或V(x)为半正定(非负定)；

4 若$\Delta_i \begin{cases} \geq 0, & i = 2, 4, 6, \ldots \\ \leq 0, & i = 1, 3, 5, \ldots \\ = 0, & i = n \end{cases}$ ，则矩阵P或V(x)为半负定(非正定)。

5.3 李雅普诺夫第二法

例1　证明下列二次型函数是正定的。

$$V(x)=10x_1^{\ 2}+4x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+2x_1x_2-2x_2x_3-4x_1x_3$$

解：二次型函数 $V(x)$ 可写为：

$$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 1 & -2\\ 1 & 4 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

因为

$$\Delta1=10>0,\quad \Delta2=\begin{vmatrix}10 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}>0,$$

$$\Delta3=\begin{vmatrix}10 & 1 & -2\\ 1 & 4 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}=40+2+1+16-1+10>0$$

所以 $V(x)>0$

5.3.2 李雅普诺夫稳定判据

李雅普诺夫(Lyapunov)函数：

定义在状态空间上，满足李雅普诺夫定理的，正定的标量函数。