

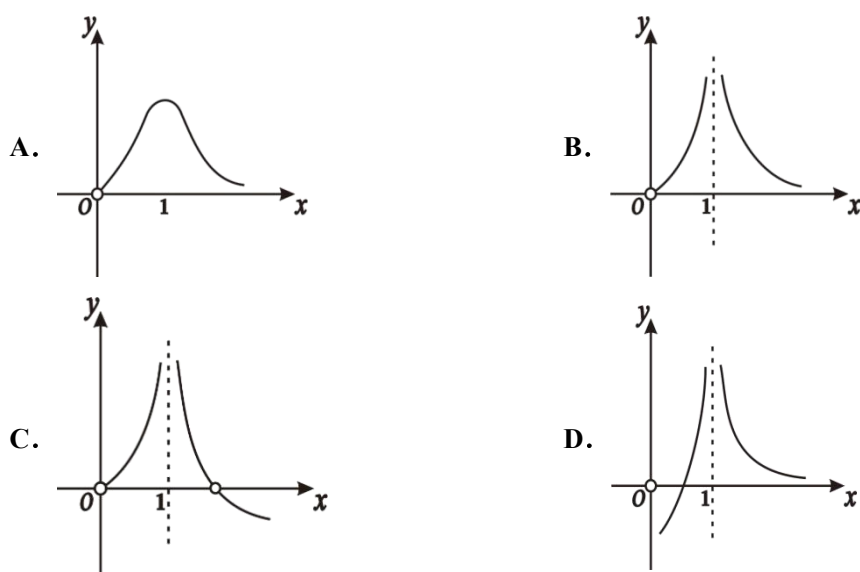
新疆维吾尔自治区阿克苏市高级中学 2024 届高三数学第一学期期末复习检测试题

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 函数 $f(x) = \frac{1}{x - \ln x - 1}$ 的图象大致是()



2. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ， P 为抛物线上一点， $A(1,1)$ ，当 $\triangle PAF$ 周长最小时， PF 所在直线的斜率为()

- A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

3. 已知 $\alpha \in (0, \pi)$ ，且 $\tan \alpha = 2$ ，则 $\cos 2\alpha + \cos \alpha =$ ()

- A. $\frac{2\sqrt{5}-3}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}-3}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}+3}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}+3}{5}$

4. 我们熟悉的卡通形象“哆啦 A 梦”的长宽比为 $\sqrt{2}:1$. 在东方文化中通常称这个比例为“白银比例”，该比例在设计和建筑领域有着广泛的应用. 已知某电波塔自下而上依次建有第一展望台和第二展望台，塔顶到塔底的高度与第二展望台到塔底的高度之比，第二展望台到塔底的高度与第一展望台到塔底的高度之比皆等于“白银比例”，若两展望台间高度差为 100 米，则下列选项中与该塔的实际高度最接近的是()

- A. 400 米 B. 480 米
C. 520 米 D. 600 米

5. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + x + 1$ 且 $f(a) + f(a+1) > 2$, 则实数 a 的取值范围是()

- A. $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

6. 已知斜率为 -2 的直线与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 交于 A, B 两点, 若 $M(x_0, y_0)$ 为线段 AB 中点且

$k_{OM} = -4$ (O 为坐标原点), 则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{5}$ B. 3 C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_1 + a_6 + a_{11} = 2\pi$, 则 $\sin(a_3 + a_9) =$ 的值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

8. 已知三棱锥 $D-ABC$ 的体积为 2, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, 且三棱锥 $D-ABC$ 的外接球的球心 O 恰好是 CD 中点, 则球 O 的表面积为 ()

- A. $\frac{52\pi}{3}$ B. $\frac{40\pi}{3}$ C. $\frac{25\pi}{3}$ D. 24π

9. 定义: $N\{f(x) \otimes g(x)\}$ 表示不等式 $f(x) < g(x)$ 的解集中的整数解之和. 若 $f(x) = |\log_2 x|$, $g(x) = a(x-1)^2 + 2$,

$N\{f(x) \otimes g(x)\} = 6$, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, -1]$ B. $(\log_2 3 - 2, 0)$ C. $(2 - \log_2 6, 0]$ D. $(\frac{\log_2 3 - 2}{4}, 0]$

10. 已知命题 $P: \forall x \in R, \sin x \leq 1$, 则 $\neg P$ 为()

- A. $\exists x_0 \in R, \sin x_0 \geq 1$ B. $\forall x \in R, \sin x \geq 1$
C. $\exists x_0 \in R, \sin x_0 > 1$ D. $\forall x \in R, \sin x > 1$

11. 公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2 + a_5 = 13$, 且 a_1, a_2, a_5 成等比数列, 则数列 $\{a_n\}$ 的公差等于()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

12. $(x-1)^3(y-2)^5$ 的展开式中, 满足 $m+n=2$ 的 $x^m y^n$ 的系数之和为 ()

- A. 640 B. 416 C. 406 D. -236

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + \frac{a}{x} + 1, & x < 0 \\ 2\ln x - 6x, & x > 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) + f(-x) = 0$ 恰有四个不同的解, 则实数 a

的取值范围是_____.

14. 函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(x-4)$, 当 $x \in [-2, 2)$ 时, $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 + a, & -2 \leq x \leq a \\ 1-x, & a < x < 2 \end{cases}$, 若函数 $f(x)$ 在 $[0, 2020)$

上有 1515 个零点, 则实数 a 的范围为_____.

15. 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB = BC = AC$, 侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 ABC , 且三棱柱的侧面积为 $3\sqrt{3}$. 若该三棱柱的顶点都在同一个球 O 的表面上, 则球 O 的表面积的最小值为_____.

16. (5 分) 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知棱长 $AB = 1$, 体对角线 $A_1C = \sqrt{6}$, 两异面直线 C_1D 与 A_1A 所成的角为 45° , 则该长方体的表面积是_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = (x-a)^2 - 2x \ln x$, 其导函数为 $f'(x)$,

(1) 若 $a = 0$, 求不等式 $f(x) > 1$ 的解集;

(2) 证明: 对任意的 $0 < s < t < 2$, 恒有 $\frac{f'(s) - f'(t)}{s - t} < 1$.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = (x-2)e^x - a(x-1)^2$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, $g(x) = x - \ln x$.

(1) 函数 $f(x)$ 的图象能否与 x 轴相切? 若能, 求出实数 a ; 若不能, 请说明理由.

(2) 若 $h(x) = f(x) - g(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值, 求实数 a 的取值范围.

19. (12 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

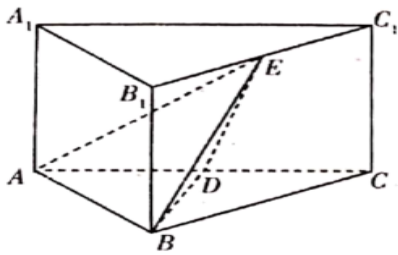
(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{(1+a_n) \cdot (1+a_{n+1})}$, T_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求证: $T_n < \frac{2}{3}$.

20. (12 分) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_3 + 2$ 是 a_2 和 a_4 的等差中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $b_n = a_n \log_2 a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

21. (12 分) 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB = BC = AA_1 = 1$, $AC = \sqrt{3}$, 点 D, E 分别为 AC 和 B_1C_1 的中点.



(I) 棱 AA_1 上是否存在点 P 使得平面 $PBD \perp$ 平面 ABE ? 若存在, 写出 PA 的长并证明你的结论; 若不存在, 请说明理由.

(II) 求二面角 $A-BE-D$ 的余弦值.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $0 < x < \pi$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程;

(2) 当 $0 < m < \pi$ 时, 证明: $f(x) < m \ln x + \frac{\pi}{x}$ 对任意 $x \in (0, \pi)$ 恒成立.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

根据函数表达式, 把分母设为新函数, 首先计算函数定义域, 然后求导, 根据导函数的正负判断函数单调性, 对应函数图像得到答案.

【详解】

设 $g(x) = x - \ln x - 1$, $g(1) = 0$, 则 $f(x) = \frac{1}{x - \ln x - 1}$ 的定义域为 $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$. $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, 当 $x \in (1, +\infty)$,

$g'(x) > 0$, $g(x)$ 单增, 当 $x \in (0, 1)$, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单减, 则 $g(x) \geq g(1) = 0$. 则 $f(x)$ 在 $x \in (0, 1)$ 上单增,

$x \in (1, +\infty)$ 上单减, $f(x) > 0$. 选 B.

【点睛】

本题考查了函数图像的判断, 用到了换元的思想, 简化了运算, 同学们还可以用特殊值法等方法进行判断.

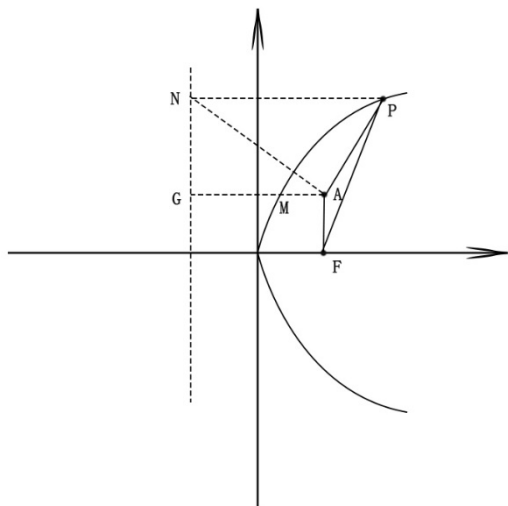
2、A

【解析】

本道题绘图发现三角形周长最小时 A,P 位于同一水平线上, 计算点 P 的坐标, 计算斜率, 即可.

【详解】

结合题意, 绘制图像



要计算三角形 PAF 周长最小值, 即计算 PA+PF 最小值, 结合抛物线性质可知, PF=PN, 所以

$PF + PA = PA + PN \geq AN \geq AG$, 故当点 P 运动到 M 点处, 三角形周长最小, 故此时 M 的坐标为 $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$, 所以斜

率为 $k = \frac{1-0}{\frac{1}{4}-1} = -\frac{4}{3}$, 故选 A.

【点睛】

本道题考查了抛物线的基本性质, 难度中等.

3、B

【解析】

分析: 首先利用同角三角函数关系式, 结合题中所给的角的范围, 求得 $\cos \alpha$ 的值, 之后借助于倍角公式, 将待求的式子转化为关于 $\cos \alpha$ 的式子, 代入从而求得结果.

详解: 根据题中的条件, 可得 α 为锐角,

根据 $\tan \alpha = 2$, 可求得 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

而 $\cos 2\alpha + \cos \alpha = 2\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} - 1 = \frac{\sqrt{5}-3}{5}$, 故选 B.

点睛：该题考查的是有关同角三角函数关系式以及倍角公式的应用，在解题的过程中，需要对已知真切求余弦的方法要明确，可以应用同角三角函数关系式求解，也可以结合三角函数的定义式求解。

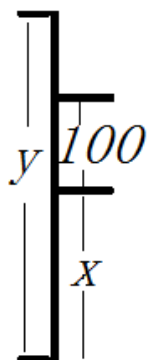
4、B

【解析】

根据题意，画出几何关系，结合各线段比例可先求得第一展望台和第二展望台的距离，进而由比例即可求得该塔的实际高度。

【详解】

设第一展望台到塔底的高度为 x 米，塔的实际高度为 y 米，几何关系如下图所示：



由题意可得 $\frac{100+x}{x} = \sqrt{2}$ ，解得 $x = 100(\sqrt{2}+1)$ ；

且满足 $\frac{y}{x+100} = \sqrt{2}$ ，

故解得塔高 $y = (x+100)\sqrt{2} = 200(\sqrt{2}+1) \approx 480$ 米，即塔高约为 480 米。

故选：B

【点睛】

本题考查了对中国文化的理解与简单应用，属于基础题。

5、B

【解析】

构造函数 $F(x) = f(x) - 1$ ，判断出 $F(x)$ 的单调性和奇偶性，由此求得不等式 $f(a) + f(a+1) > 2$ 的解集。

【详解】

构造函数 $F(x) = f(x) - 1 = \ln \frac{1+x}{1-x} + x$ ，由 $\frac{1+x}{1-x} > 0$ 解得 $-1 < x < 1$ ，所以 $F(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$ ，且

$F(-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} - x = -\ln \frac{1-x}{1+x} - x = -\left(\ln \frac{1-x}{1+x} + x\right) = -F(x)$ ，所以 $F(x)$ 为奇函数，而

$F(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + x = \ln\left(-1 + \frac{2}{1-x}\right) + x$ ，所以 $F(x)$ 在定义域上为增函数，且 $F(0) = \ln 1 + 0 = 0$ 。由

$$f(a)+f(a+1)>2 \text{ 得 } f(a)-1+f(a+1)-1>0, \text{ 即 } F(a)+F(a+1)>0, \text{ 所以 } \begin{cases} a+a+1>0 \\ -1<a<1 \\ -1<a+1<1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}<a<0.$$

故选: B

【点睛】

本小题主要考查利用函数的单调性和奇偶性解不等式, 属于中档题.

6、B

【解析】

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 代入双曲线方程相减可得到直线 AB 的斜率与中点坐标之间的关系, 从而得到 a, b 的等式, 求出离心率.

【详解】

$$k_{OM} = \frac{y_0}{x_0} = -4,$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases},$$

$$\text{两式相减得 } \frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2} - \frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2} = 0,$$

$$\therefore k_{AB} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)} = \frac{b^2x_0}{a^2y_0} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -2, \therefore \frac{b^2}{a^2} = 8, \therefore e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = 3.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查求双曲线的离心率, 解题方法是点差法, 即出现双曲线的弦中点坐标时, 可设弦两端点坐标代入双曲线方程相减后得出弦所在直线斜率与中点坐标之间的关系.

7、B

【解析】

由等差数列的性质和已知可得 $a_6 = \frac{2\pi}{3}$, 即可得到 $a_3 + a_9 = \frac{4\pi}{3}$, 代入由诱导公式计算可得.

【详解】

解: 由等差数列的性质可得 $a_1 + a_6 + a_{11} = 3a_6 = 2\pi$, 解得 $a_6 = \frac{2\pi}{3}$,

$$\therefore a_3 + a_9 = 2a_6 = \frac{4\pi}{3},$$

$$\therefore \sin(a_3 + a_9) = \sin \frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

故选：B.

【点睛】

本题考查等差数列的下标和公式的应用，涉及三角函数求值，属于基础题.

8、A

【解析】

根据 O 是 CD 中点这一条件，将棱锥的高转化为球心到平面的距离，即可用勾股定理求解.

【详解】

解：设 D 点到平面 ABC 的距离为 h ，因为 O 是 CD 中点，

所以 O 到平面 ABC 的距离为 $\frac{h}{2}$ ，

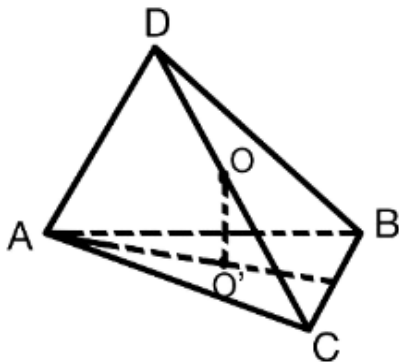
三棱锥 $D-ABC$ 的体积 $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ \cdot h = 2$ ，解得 $h = 2\sqrt{3}$ ，

作 $OO' \perp$ 平面 ABC ，垂足 O' 为 $\triangle ABC$ 的外心，所以 $CO' = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，且 $OO' = \frac{h}{2} = \sqrt{3}$ ，

所以在 $Rt\triangle CO'O$ 中， $OC = \sqrt{CO'^2 + O'O^2} = \sqrt{\frac{13}{3}}$ ，此为球的半径，

$$\therefore S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{13}{3} = \frac{52\pi}{3}.$$

故选：A.



【点睛】

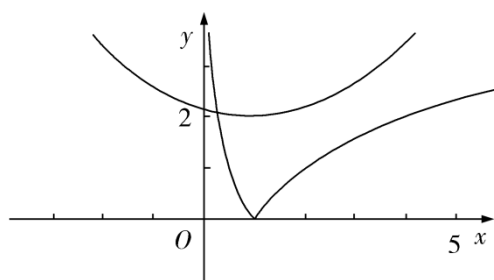
本题考查球的表面积，考查点到平面的距离，属于中档题.

9、D

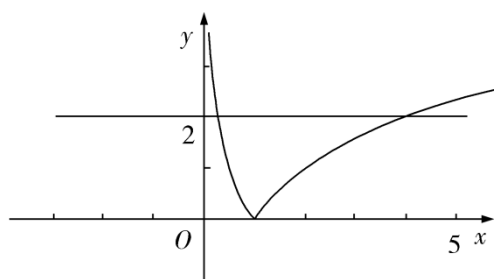
【解析】

由题意得， $N\{f(x) \otimes g(x)\} = 6$ 表示不等式 $|\log_2 x| < a(x-1)^2 + 2$ 的解集中整数解之和为 6.

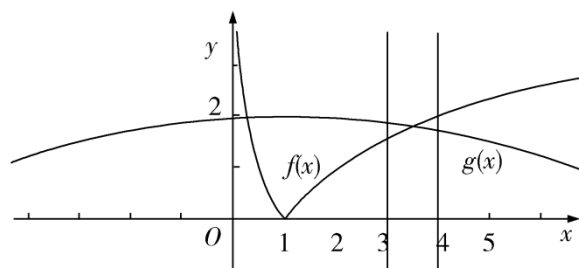
当 $a > 0$ 时，数形结合（如图）得 $|\log_2 x| < a(x-1)^2 + 2$ 的解集中的整数解有无数多个， $|\log_2 x| < a(x-1)^2 + 2$ 解集中的整数解之和一定大于 6.



当 $a = 0$ 时， $g(x) = 2$ ，数形结合（如图），由 $f(x) < 2$ 解得 $\frac{1}{4} < x < 4$. 在 $(\frac{1}{4}, 4)$ 内有 3 个整数解，为 1, 2, 3，满足 $N\{f(x) \otimes g(x)\} = 6$ ，所以 $a = 0$ 符合题意.



当 $a < 0$ 时，作出函数 $f(x) = |\log_2 x|$ 和 $g(x) = a(x-1)^2 + 2$ 的图象，如图所示.



若 $N\{f(x) \otimes g(x)\} = 6$ ，即 $|\log_2 x| < a(x-1)^2 + 2$ 的整数解只有 1, 2, 3.

只需满足 $\begin{cases} f(3) < g(3) \\ f(4) \geq g(4) \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} \log_2 3 < 4a + 2 \\ 2 \geq 9a + 2 \end{cases}$ ，解得 $\frac{\log_2 3 - 2}{4} < a \leq 0$ ，所以 $\frac{\log_2 3 - 2}{4} < a < 0$.

综上，当 $N\{f(x) \otimes g(x)\} = 6$ 时，实数 a 的取值范围是 $(\frac{\log_2 3 - 2}{4}, 0]$. 故选 D.

10、C

【解析】

根据全称量词命题的否定是存在量词命题，即得答案.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/765213200012011131>