

机密★启用前

## 2025 届交大附中高三摸底考试卷 (3 月)

### 数 学

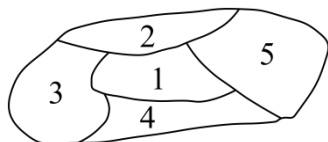
(本试卷共 4 页, 满分 150 分, 时间 120 分钟)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

一、填空题 (第 1-6 题每题 4 分, 第 7-12 题每题 5 分, 满分 54 分)

1. 已知集合  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4\}$ , 则  $A \cup B =$  \_\_\_\_\_.
2. 不等式  $|2x-1| - |x-2| < 0$  的解集是 \_\_\_\_\_.
3. 等差数列  $\{a_n\}$  中, 若  $a_1 = -12, S_{25} = 0$ , 则公差  $d =$  \_\_\_\_\_.
4. 直线  $2x - y - 1 = 0$  的倾斜角是 \_\_\_\_\_ (结果用反三角表示).
5. 将边长为 2 的正方形绕其一条边所在直线旋转一周, 所形成的旋转体的体积为 \_\_\_\_\_.
6.  $\left(x - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5$  的二项展开式中,  $x^2$  的系数是 \_\_\_\_\_.(用数字作答)
7. 若  $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+6)$ , 则  $f'(0) =$  \_\_\_\_\_.
8. 已知  $f(x) = \ln x$ , 若  $f(ab) = 1$ , 则  $f(a^2) \cdot f(b^2)$  的最大值为 \_\_\_\_\_.
9. 若  $\triangle ABC$  的内角满足  $3\sin A + 4\sin B = 5\sin C$ , 则  $C$  的最大值是 \_\_\_\_\_.
10. 如图, 一个区域分为 5 块, 现给每块着色, 要求相邻区域不得使用同一颜色. 若有 4 种颜色可供选择, 则不同的着色方法共有 \_\_\_\_\_ 种.



11. 研究发现：汽车在高速公路上行驶，发现紧急情况需要刹车时，刹车距离 = 反应距离  $d_1$  + 制动距离  $d_2$ 。其中反应距离  $d_1$  与汽车行驶速度  $v$  成正比，比例系数为  $\alpha$ ；制动距离  $d_2$  与汽车行驶速度  $v^2$  的平方成正比，比例系数为  $\beta$ 。下表是通过试验观测得到的  $v$ 、 $d_1$ 、 $d_2$  的对应关系：

$v$	$d_1$	$\alpha$	$d_2$	$\beta$
56	11.9	0.213	16.0	0.00510
64	13.4	0.209	21.9	0.00535
72	15.2	0.211	28.2	0.00544
80	16.7	0.209	36.0	0.00563
89	18.6	0.209	45.3	0.00572
97	20.1	0.207	55.5	0.00590
105	21.9	0.209	67.2	0.00610

用表中比例系数  $\alpha$  与  $\beta$  的平均数作为参数  $\alpha$ 、 $\beta$  的估计值。那么根据上表数据，估计  $v = 120$  时，刹车距离约为\_\_\_\_\_。（结果精确到 0.1）

12. 已知复平面上的点  $Z$  对应的复数  $z$  满足：存在模长为 1 的复数  $a$ ，使得  $z \cdot \bar{z} + a \cdot \bar{z} + \bar{a} \cdot z = 0$ 。那么所有满足条件的点  $Z$  组成的图形的面积为\_\_\_\_\_。

## 二、选择题（本大题共 4 题，满分 20 分）

13. 设  $ab > 0$ ，则“ $a > b$ ”是“ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”的（ ）

- A. 充分非必要条件  
B. 必要非充分条件  
C. 充分必要条件  
D. 既非充分也非必要条件

14. 若向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  方向相反，则下列等式中必定成立的是（ ）

- A.  $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$     B.  $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$     C.  $|\vec{a}| - |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$     D.  $|\vec{a}| - |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$

15. 下列函数中，在区间  $(0, +\infty)$  上是严格减函数的为 ( )

- A.  $y = x^{\frac{1}{2}}$                       B.  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$                       C.  $y = 2^x$                       D.  $y = \lg|x|$

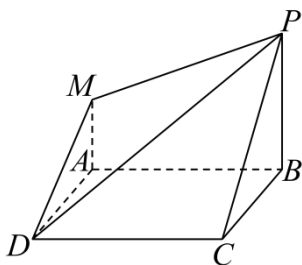
16. 设  $f_1(x) = x^2, f_2(x) = 2(x - x^2), f_3(x) = \frac{1}{3}|\sin 2\pi x|, a_i = \frac{i}{2025}, i = 0, 1, 2, \dots, 2025$ ，记

$I_k = |f_k(a_0) - f_k(a_1)| + |f_k(a_1) - f_k(a_2)| + \dots + |f_k(a_{2024}) - f_k(a_{2025})|, k = 1, 2, 3$ 。则 ( )

- A.  $I_1 < I_2 < I_3$                       B.  $I_2 < I_1 < I_3$                       C.  $I_1 < I_3 < I_2$                       D.  $I_3 < I_2 < I_1$

### 三、解答题。(本大题共有 5 题，满分 76 分)

17. 如图，四边形  $ABCD$  是正方形， $PB \perp$  平面  $ABCD$ ， $MA \parallel PB, PB = AB = 2MA$ 。



- (1) 求证： $DM \parallel$  平面  $PBC$ ；  
 (2) 求二面角  $M - PD - C$  的正弦值。

18. 设函数  $f(x) = \sin(\frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{6}) - 2\cos^2 \frac{\pi x}{8} + 1$ 。

- (I) 求  $f(x)$  的最小正周期。  
 (II) 若函数  $y = g(x)$  与  $y = f(x)$  的图像关于直线  $x = 1$  对称，求当  $x \in [0, \frac{4}{3}]$  时  $y = g(x)$  的最大值。

19. 机器人竞技是继电子竞技之后热门的科技竞技项目.某区为了参加市机器人竞技总决赛，开展了区内选拔赛，其中  $A、B、C、D$  四人进入区内个人组决赛，按照规则每人与其他三人各进行一场比赛，且这三场比赛互相独立.下表统计的是  $A$  在近期热身中分别与  $B、C、D$  三人比赛的情况。

	$B$	$C$	$D$
比赛的次数	12	10	15
$A$ 获胜的次数	4	5	12

- (1) 根据表格中的数据，试估计在区内决赛中  $A$  至少获胜一场的概率；  
 (2) 根据表格中的数据，请给  $B、C、D$  三人设计一个出场顺序，使得  $A$  在这三场比赛中连胜两场的概

率最大，并说明理由.

20. 已知抛物线  $\Gamma: y^2 = 4x$ ，动直线  $l$  经过定点  $P(a, b)$  且与抛物线交于  $A, B$  两点.

(1) 写出抛物线  $\Gamma$  的焦点坐标和准线方程;

(2)  $a = 2, b = 0$  时，求线段  $AB$  的长度的最小值;

(3) 若抛物线上存在一定点  $D$ ，使得以  $AB$  为直径的圆恒过点  $D$ ，求  $a, b$  满足的关系式.

21. 已知  $k, m \in \mathbf{R}$ ，函数  $y = f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ，直线  $l$  的方程为  $y = kx + m$ ，记集合

$$A_l = \{x \mid f(x) \geq kx + m\}.$$

(1) 若  $f(x) = 2^x, k^2 + (m-1)^2 = 0$ ，求集合  $A_l$ ;

(2) 若  $f(x) = -x^4 + x^3 + bx^2$ ，且存在实数  $k, m$  使得集合  $A_l$  中有且只有两个元素，求实数  $b$  的取值范围;

(3) 若函数  $y = f(x)$  的图像是一条连续曲线，且其导函数是定义域为  $\mathbf{R}$  的严格减函数，求证：“集合  $A_l$  是单元素集合  $\{t\}$ ”是“直线  $l$  是函数  $y = f(x)$  在点  $P(t, f(t))$  处的切线”的充要条件.

## 参考答案

一、填空题（第 1-6 题每题 4 分，第 7-12 题每题 5 分，满分 54 分）

1. 已知集合  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4\}$ ，则  $A \cup B =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $\{1, 2, 3, 4\}$

【解析】

【分析】

直接根据并集定义得到答案.

【详解】集合  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4\}$ ，则  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ .

故答案为： $\{1, 2, 3, 4\}$ .

【点睛】本题考查了并集计算，属于简单题.

2. 不等式  $|2x-1| - |x-2| < 0$  的解集是 \_\_\_\_\_.

【答案】  $(-1, 1)$

【解析】

【分析】讨论  $x$  的范围去绝对值符号，得到  $x$  不同范围下的解析式，分别进行求解，最后取并集即可得解.

【详解】当  $x > 2$  时， $|2x-1|-|x-2|=2x-1-x+2=x+1$ ；

$\frac{1}{2} \leq x \leq 2$  时， $|2x-1|-|x-2|=2x-1+x-2=3x-3$ ；

$x < \frac{1}{2}$  时， $|2x-1|-|x-2|=1-2x+x-2=-x-1$ ；

$$|2x-1|-|x-2| = \begin{cases} x+1, x > 2 \\ 3x-3, \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \\ -x-1, x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

当  $x > 2$  时， $x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$ ，无解；

$\frac{1}{2} \leq x \leq 2$  时， $3x-3 < 0 \Rightarrow x < 1$ ，解为  $\frac{1}{2} \leq x < 1$ ；

$x < \frac{1}{2}$  时， $-x-1 < 0 \Rightarrow x > -1$ ，解为  $-1 < x < \frac{1}{2}$ 。

取并集，所以最终解集为  $(-1, 1)$ 。

故答案为： $(-1, 1)$ 。

3. 等差数列  $\{a_n\}$  中，若  $a_1 = -12, S_{25} = 0$ ，则公差  $d =$ \_\_\_\_\_。

【答案】1

【解析】

【分析】根据等差数列求和公式即可代入求解。

【详解】由  $S_{25} = 25a_1 + \frac{25 \times 24}{2}d = 0$ ，解得  $d = 1$ ，

故答案为：1

4. 直线  $2x - y - 1 = 0$  的倾斜角是\_\_\_\_\_（结果用反三角表示）。

【答案】 $\arctan 2$

【解析】

【分析】求得直线斜率，进而可求得倾斜角。

【详解】设直线的倾斜角为  $\alpha$ ，

由  $2x - y - 1 = 0$ ，可得  $\tan \alpha = 2$ ，所以  $\alpha = \arctan 2$ 。

故答案为:  $\arctan 2$ .

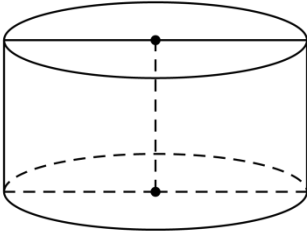
5. 将边长为2的正方形绕其一条边所在直线旋转一周, 所形成的旋转体的体积为\_\_\_\_\_.

【答案】  $8\pi$

【解析】

【分析】 分析可知, 旋转体为圆柱, 确定该圆柱的底面半径和高, 结合柱体的体积公式即可得解.

【详解】 如下图所示,



由图可知, 旋转体是底面半径为2, 高为2的圆柱,

故该旋转体的体积为  $V = \pi \times 2^2 \times 2 = 8\pi$ .

故答案为:  $8\pi$ .

6.  $\left(x - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5$  的二项展开式中,  $x^2$  的系数是\_\_\_\_\_.(用数字作答)

【答案】 40

【解析】

【分析】

根据二项展开式通项公式求  $x^2$  的系数.

【详解】 根据二项式定理,  $\left(x - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5$  的通项为  $T_{r+1} = C_5^r \cdot (-2)^r \cdot x^{\frac{10-3r}{2}}$ ,

当  $\frac{10-3r}{2} = 2$  时, 即  $r=2$  时, 可得  $T_3 = 40x^2$ .

即  $x^2$  项的系数为 40

故答案为: 40

【点睛】 方法点睛: 本题主要考查二项展开式定理的通项与系数, 属于简单题. 二项展开式定理的问题也是高考命题热点之一, 关于二项式定理的命题方向比较明确, 主要从以下几个方面命题: (1) 考查二项展开式的通项公式  $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$ ; (可以考查某一项, 也可考查某一项的系数) (2) 考查各项系数和和各

项的二项式系数和；(3)二项展开式定理的应用.

7. 若  $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+6)$ , 则  $f'(0) =$ \_\_\_\_\_.

【答案】 720

【解析】

【分析】 求出  $f'(x)$ , 代值计算可得  $f'(0)$  的值.

【详解】 因为  $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+6)$ ,

则  $f'(x) = (x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+6) + x[(x+1)(x+2)\cdots(x+6)]'$ ,

故  $f'(0) = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$ .

故答案为: 720.

8. 已知  $f(x) = \ln x$ , 若  $f(ab) = 1$ , 则  $f(a^2) \cdot f(b^2)$  的最大值为\_\_\_\_\_.

【答案】 1

【解析】

【分析】 由条件可得  $ab = e$ ,  $f(a^2) \cdot f(b^2) = 4(\ln|a|) \cdot (\ln|b|)$ , 结合不等式  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  可求得结论.

【详解】 因为  $f(x) = \ln x$ ,  $f(ab) = 1$ ,

所以  $\ln(ab) = 1$ , 故  $ab = e$ ,

又  $f(a^2) \cdot f(b^2) = 4(\ln|a|) \cdot (\ln|b|) \leq \ln^2|a| + \ln^2|b| + 2\ln|a|\ln|b| = (\ln|a| + \ln|b|)^2 = (\ln|ab|)^2 = 1$ ,

当且仅当  $a = b = \sqrt{e}$  或  $a = b = -\sqrt{e}$  时等号成立;

所以  $f(a^2) \cdot f(b^2)$  的最大值为 1.

故答案为: 1.

9. 若  $\triangle ABC$  的内角满足  $3\sin A + 4\sin B = 5\sin C$ , 则  $C$  的最大值是\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{\pi}{2}$

【解析】

【分析】 由已知条件结合正弦定理可得出  $3a + 4b = 5c$ , 利用余弦定理可求出  $\cos C$  的最小值, 结合余弦函数的单调性可得出角  $C$  的最大值.

【详解】 设  $\triangle ABC$  的内角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的对边长分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ,

因为  $3\sin A + 4\sin B = 5\sin C$ ，由正弦定理可得  $3a + 4b = 5c$ ，

$$\begin{aligned} \text{所以, } \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{25a^2 + 25b^2 - (5c)^2}{50ab} = \frac{25a^2 + 25b^2 - (3a + 4b)^2}{50ab} \\ &= \frac{16a^2 + 9b^2 - 24ab}{50ab} = \frac{1}{50} \left( \frac{16a}{b} + \frac{9b}{a} \right) - \frac{12}{25} \geq \frac{1}{50} \times 2\sqrt{\frac{16a}{b} \cdot \frac{9b}{a}} - \frac{12}{25} = 0, \text{ 即 } \cos C \geq 0, \end{aligned}$$

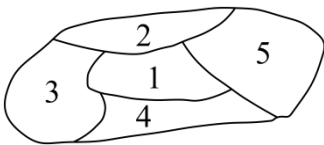
当且仅当  $\frac{16a}{b} = \frac{9b}{a}$  时，即当  $b = \frac{4}{3}a$  时，等号成立，

因为  $C \in (0, \pi)$  且余弦函数  $y = \cos x$  在  $(0, \pi)$  上单调递减，故  $0 < C \leq \frac{\pi}{2}$ ，

所以， $C$  的最大值为  $\frac{\pi}{2}$ 。

故答案为： $\frac{\pi}{2}$ 。

10. 如图，一个区域分为 5 块，现给每块着色，要求相邻区域不得使用同一颜色。若有 4 种颜色可供选择，则不同的着色方法共有 \_\_\_\_\_ 种。



【答案】72

【解析】

【分析】利用分类加法计数原理和分步乘法计数原理，按照颜色分类，用 3 种颜色与用 4 种颜色分为两类计算即可得结论。

【详解】按照使用颜色的种数分为两类：

第一类，使用了 4 种颜色，此时 2, 4 同色或 3, 5 同色，则共有  $C_2^1 \cdot A_4^4 = 48$ ，

第二类，使用了三种颜色，此时 2, 4 同色且 3, 5 同色，则共有  $A_4^3 = 24$ ，

所以共有  $48 + 24 = 72$  种。

故答案为：72。

11. 研究发现：汽车在高速公路上行驶，发现紧急情况需要刹车时，刹车距离 = 反应距离  $d_1$  + 制动距离

$d_2$ 。其中反应距离  $d_1$  与汽车行驶速度  $v$  成正比，比例系数为  $\alpha$ ；制动距离  $d_2$  与汽车行驶速度  $v^2$  的平方成

正比，比例系数为  $\beta$ 。下表是通过试验观测得到的  $v$ 、 $d_1$ 、 $d_2$  的对应关系：

$v$	$d_1$	$\alpha$	$d_2$	$\beta$
56	11.9	0.213	16.0	0.00510
64	13.4	0.209	21.9	0.00535
72	15.2	0.211	28.2	0.00544
80	16.7	0.209	36.0	0.00563
89	18.6	0.209	45.3	0.00572
97	20.1	0.207	55.5	0.00590
105	21.9	0.209	67.2	0.00610

用表中比例系数  $\alpha$  与  $\beta$  的平均数作为参数  $\alpha$ 、 $\beta$  的估计值. 那么根据上表数据, 估计  $v=120$  时, 刹车距离约为\_\_\_\_\_。(结果精确到 0.1)

**【答案】** 105.9

**【解析】**

**【分析】** 设刹车距离为  $f(v)$ , 求出  $\alpha$ 、 $\beta$  的平均值, 可得出  $f(v)$  的表达式, 代值计算可得  $f(120)$  的值.

**【详解】** 设刹车距离为  $f(v)$ , 由题意可得  $f(v) = \alpha v + \beta v^2$ ,

由表格中的数据可得  $\bar{\alpha} = \frac{0.213 + 0.209 \times 4 + 0.211 + 0.207}{7} \approx 0.20957$ ,

$\bar{\beta} = \frac{0.0051 + 0.00535 + 0.00544 + 0.00563 + 0.00572 + 0.0059 + 0.0061}{7} \approx 0.0056057$ ,

所以,  $f(v) = 0.20957v + 0.0056057v^2$ , 故  $f(120) = 0.20957 \times 120 + 0.0056057 \times 120^2 \approx 105.9$ .

所以, 当  $v=120$  时, 刹车距离约为 105.9.

故答案为: 105.9.

12. 已知复平面上的点  $Z$  对应的复数  $z$  满足: 存在模长为 1 的复数  $a$ , 使得  $z \cdot \bar{z} + a \cdot \bar{z} + \bar{a} \cdot z = 0$ . 那么所有满足条件的点  $Z$  组成的图形的面积为\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $4\pi$

**【解析】**

**【分析】** 设  $z = x + yi, a = p + qi$ , 由题意可得  $(x+p)^2 + (y+q)^2 = 1$ , 可求点  $Z$  组成的图形的面积.

【详解】设  $z = x + yi, a = p + qi$ , 由  $z \cdot \bar{z} + a \cdot \bar{z} + \bar{a} \cdot z = 0$ ,

可得  $(x + yi)(x - yi) + (p + qi)(x - yi) + (p - qi)(x + yi) = 0$ ,

所以  $x^2 + y^2 + px - pyi + qxi - qyi^2 + px + pyi - qxi - qyi^2 (p - qi)(x + yi) = 0$

所以  $x^2 + y^2 + 2px + 2qy = 0$ , 所以  $(x + p)^2 + (y + q)^2 = p^2 + q^2$ ,

因为复数  $a$  的模为 1, 所以  $p^2 + q^2 = 1$ , 所以  $(x + p)^2 + (y + q)^2 = 1$ ,

所以  $Z$  是以  $(-p, -q)$  为圆心, 1 为半径的圆上的点,

又  $(-p, -q)$  是以原点为圆心, 1 为半径的圆上的点,

所以点  $Z$  形成的图形是以  $(0, 0)$  为圆心, 2 为半径的圆面,

所以点  $Z$  组成的图形的面积为  $\pi \times 2^2 = 4\pi$ .

故答案为:  $4\pi$ .

【点睛】关键点点睛: 关键在于利用复数的代数形式, 结合利用复数的运算得到  $(x + p)^2 + (y + q)^2 = 1$ , 进而可求解.

## 二、选择题 (本大题共 4 题, 满分 20 分)

13. 设  $ab > 0$ , 则“ $a > b$ ”是“ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”的 ( )

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充分必要条件

D. 既非充分也非必要条件

【答案】C

【解析】

【分析】由  $ab > 0$  可推出  $a, b$  同号, 则根据  $a > b$  分类讨论可得出  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ , 根据  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ , 两边同乘  $ab$  可得  $a > b$ ,

即可选出选项.

【详解】解: 由题知  $ab > 0$ , 则  $a, b$  同号,

当  $a > b > 0$  时, 有  $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ,

当  $0 > a > b$  时, 有  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$ ,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/766033004223011053>