2024届浙江绍兴一中高三压轴卷数学试卷

注意事项：

1． 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。

2．选择题必须使用2B铅笔填涂；非选择题必须使用0．5毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。

3．请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。

4．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知定义在R上函数$f\left(x\right)$的图象关于原点对称，且$f\left(1+x\right)+f\left(2-x\right)=0$，若$f\left(1\right)=1$，则

$f\left(1\right)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2020)=$（　　）

A．0　　**B．1**　　**C．673**　　**D．674**

2．某大学计算机学院的薛教授在**2019**年人工智能方向招收了**6**名研究生.薛教授欲从人工智能领域的语音识别、人脸识别，数据分析、机器学习、服务器开发五个方向展开研究，且每个方向均有研究生学习，其中刘泽同学学习人脸识别，则这**6**名研究生不同的分配方向共有（　　）

A．480种　　**B．360种**　　**C．240种**　　**D．120种**

3．已知我市某居民小区户主人数和户主对户型结构的满意率分别如图和如图所示，为了解该小区户主对户型结构的满意程度，用分层抽样的方法抽取30%的户主进行调查，则样本容量和抽取的户主对四居室满意的人数分别为

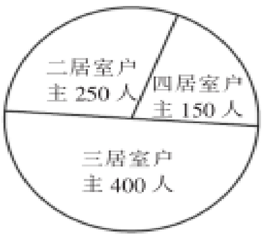


图1

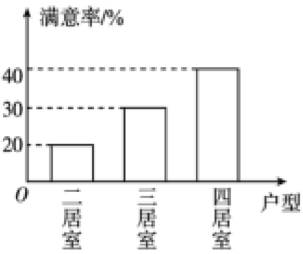
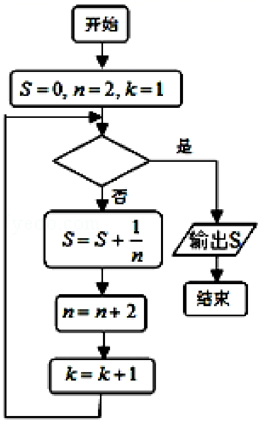


图2

A．240，18　　**B．200，20**

C．240，20　　**D．200，18**

4．如图是计算$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}$值的一个程序框图，其中判断框内应填入的条件是(　　)



A． $k\geq 5$

B． $k<5$

C． $k>5$

D． $k\leq 6$

5．已知 α，β 是两平面，l，m，n 是三条不同的直线，则不正确命题是（　　）

A．若 $m\perp\alpha$，$n//\alpha$，则 $m\perp n$　　B．若 $m//\alpha$，$n//\alpha$，则 $m//n$

C．若 $l\perp\alpha$，$l//\beta$，则 $\alpha\perp\beta$　　D．若 $\alpha//\beta$，$l\not\subset\beta$，且 $l//\alpha$，则 $l//\beta$

6．已知 P 与 Q 分别为函数 $2x-y-6=0$ 与函数 $y=x^2+1$ 的图象上一点，则线段 $|PQ|$ 的最小值为(　　)

A． $\frac{6}{5}$　　B． $\sqrt{5}$　　C． $\frac{6\sqrt{5}}{5}$　　D．6

7．设 i 为数单位，$\overline{z}$ 为 z 的共轭复数，若 $z=\frac{1}{3+i}$，则 $z\cdot\overline{z}=$（　　）

A． $\frac{1}{10}$　　B． $\frac{1}{10}i$　　C． $\frac{1}{100}$　　D． $\frac{1}{100}i$

8．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_n-a_{n-1}=n\ (n\geq 2)$,则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=$(　　)

A． $\frac{1}{2}n(n+1)$　　B． $\frac{1}{2}n(3n-1)$　　C． $\mathrm{n}^2-\mathrm{n}+1$　　D． n^2-2n+2

9．已知平面向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，满足 $|\vec{b}|=2, |\vec{a}+\vec{b}|=1, \vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ 且 $\lambda+2\mu=1$，若对每一个确定的向量 $\vec{a}$，记 $|\vec{c}|$ 的最小值为 m，则当 $\vec{a}$ 变化时，m 的最大值为（　　）

A． $\frac{1}{4}$　　B． $\frac{1}{3}$　　C． $\frac{1}{2}$　　D．1

10．已知函数 $f(x)=\ln x-2ax$，$g(x)=\frac{4ax^2}{\ln x}-2x$，若方程 $f(x)=g(x)$ 恰有三个不相等的实根，则 a 的取值范围为（　　）

A．$\left(0,e\right]$　　B．$\left(0,\frac{1}{2e}\right]$

C．$\left(e,+\infty\right)$　　D．$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

11．抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 ***F***，点 $P(x,y)$ 为该抛物线上的动点，若点 $A(-1,0)$，则 $\frac{PF}{PA}$ 的最小值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

12．已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2=1$，$a_6=16$，等差数列 $\{b_n\}$ 中 $b_5=a_4$，S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，则 $S_9=$（　　）

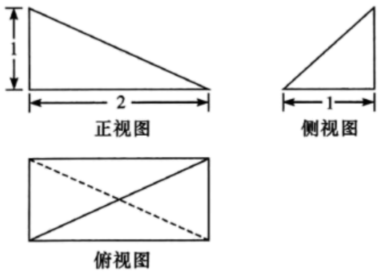
A．36　　B．72　　C．-36　　D．± 36

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．设函数 $f\left(x\right)=\left|\ln x+a\right|+\left|x+b\right|\left(a,b\in R\right)$，当 $x\in\left[1,e\right]$ 时，记 $f\left(x\right)$ 最大值为 $M\left(a,b\right)$，则 $M\left(a,b\right)$ 的最小值为______.

14．函数 $f(x)=\sin^3 x+3\cos^2 x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的值域为_________.

15．已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体外接球的表面积是______.



16．在三棱锥 $P-ABC$ 中，三条侧棱 PA、PB、PC 两两垂直，$PB=PA+1, PA+PC=4$，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积的最小值为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=a$（实数 a 为常数），$a_2=2, S_n$ 是其前 n 项和，$S_n=\frac{n\left(a_n-a_1\right)}{2}$ 且数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，$b_1=2, a_4$ 恰为 S_4 与 b_2-1 的等比中项.

（1）证明：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列；

（2）求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（3）若 $c_1=\frac{3}{2}$，当 $n\ge 2$ 时 $c_n=\frac{1}{b_{n-1}+1}+\frac{1}{b_{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{b_n}$，$\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求证：对任意 $n\ge 2$，都有

$12T_n \ge 6n+13$.

18.（12 分）已知 $\alpha \in \left(0，\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta \in \left(\frac{\pi}{2}，\pi\right)$，$\cos\beta = -\frac{1}{3}$，$\sin\left(\alpha+\beta\right)=\frac{7}{9}$.

（1）求 $\sin\alpha$ 的值；

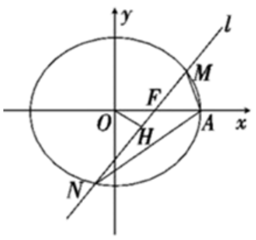
（2）求 $\tan\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)$ 的值.

19.（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=\left|x-2\right|-\left|2x+1\right|$.

（1）求不等式 $f\left(x\right)\ge 1$ 的解集；

（2）若关于 x 的不等式 $f\left(x\right)\le 3t-2t^2$ 在区间 $\left[-1,1\right]$ 内无解，求实数 t 的取值范围.

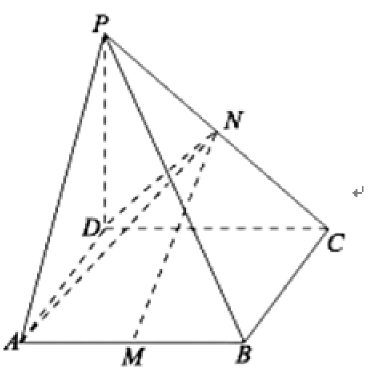
20.（12 分）如图，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $\left(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，且离心率 $e=\frac{1}{2}$，过右焦点 F 且不与坐标轴垂直的直线 l 与椭圆 C 相交于 M,N 两点.



（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）设椭圆 C 的右顶点为 A，线段 MN 的中点为 H，记直线 OH,AM,AN 的斜率分别为 k_0,k_1,k_2，求证：$\frac{k_1+k_2}{k_0}$ 为定值.

21.（12 分）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的菱形，$PA=PC=5$，点 M,N 分别是 AB,PC 的中点.



（1）求证：$MN//$ 平面 PAD；

（2）若 $cos\angle PCD=\frac{4}{5},\angle DAB=60^{\circ}$，求直线 AN 与平面 PAD 所成角的正弦值.

22.（10 分）设函数 $f(x)=2\sin x+|a-3|+|a-1|$.

（1）若 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>6$，求实数 a 的取值范围；

（2）证明：$\forall x\in R$，$f(x)\geq|a-3|-\left|\frac{1}{a}+1\right|$ 恒成立.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**B**

【解析】

由题知 $f\left(x\right)$ 为奇函数，且 $f\left(1+x\right)+f\left(2-x\right)=0$ 可得函数 $f\left(x\right)$ 的周期为 3，分别求出

$f\left(0\right)=0, f\left(1\right)=1, f\left(2\right)=-1,$ 知函数在一个周期内的和是 0，利用函数周期性对所求式子进行化简可得.

【详解】

因为 $f\left(x\right)$ 为奇函数，故 $f\left(0\right)=0$；

因为 $f\left(1+x\right)+f\left(2-x\right)=0$，故 $f\left(1+x\right)=-f\left(2-x\right)=f\left(x-2\right)$，

可知函数 $f\left(x\right)$ 的周期为 3；

在 $f\left(1+x\right)+f\left(2-x\right)=0$ 中，令 $x=1$，故 $f\left(2\right)=-f\left(1\right)=-1$，

故函数 $f\left(x\right)$ 在一个周期内的函数值和为 0，

故 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2020)=f(1)=1$.

故选：**B.**

【点睛】

本题考查函数奇偶性与周期性综合问题. 其解题思路：函数的奇偶性与周期性相结合的问题多考查求值问题，常利用奇偶性及周期性进行变换，将所求函数值的自变量转化到已知解析式的函数定义域内求解.

2、B

【解析】

将人脸识别方向的人数分成：有2人、有1人两种情况进行分类讨论，结合捆绑计算出不同的分配方法数.

【详解】

当人脸识别方向有 2 人时，有 $A_5^5=120$ 种，当人脸识别方向有 1 人时，有 $C_5^2A_4^4=240$ 种，∴共有 360 种.

故选：B

【点睛】

本小题主要考查简单排列组合问题，考查分类讨论的数学思想方法，属于基础题.

3、A

【解析】

利用统计图结合分层抽样性质能求出样本容量，利用条形图能求出抽取的户主对四居室满意的人数.

【详解】

样本容量为：（150+250+400）×30%＝240，

∴抽取的户主对四居室满意的人数为：$240\times\dfrac{150}{150+250+400}\times 40\%=18$.

故选 A.

【点睛】

本题考查样本容量和抽取的户主对四居室满意的人数的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意统计图的性质的合理运用.

4、B

【解析】

根据计算结果，可知该循环结构循环了 5 次；输出 S 前循环体的 n 的值为 12，k 的值为 6，进而可得判断框内的不等式.

【详解】

因为该程序图是计算$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{10}$值的一个程序框圈

所以共循环了 5 次

所以输出 S 前循环体的 n 的值为 12，k 的值为 6，

即判断框内的不等式应为$k\geq 6$或$k>5$

所以选 C

【点睛】

本题考查了程序框图的简单应用，根据结果填写判断框，属于基础题.

5、**B**

【解析】

根据线面平行、线面垂直和空间角的知识，判断**A**选项的正确性.由线面平行有关知识判断**B**选项的正确性.根据面面垂直的判定定理，判断**C**选项的正确性.根据面面平行的性质判断**D**选项的正确性.

【详解】

A．若$n//\alpha$，则在α中存在一条直线l，使得$l//n$, $m\perp\alpha$, $l\subset\alpha$，则$m\perp l$，又$l//n$，那么$m\perp n$，故正确；

B．若$m//\alpha$, $n//\alpha$，则$m//n$或相交或异面，故不正确；

C．若$l//\beta$，则存在$a\subset\beta$，使$l//\alpha$，又$l\perp\alpha$, $\therefore a\perp\alpha$，则$\alpha\perp\beta$，故正确.

D．若$\alpha//\beta$，且$l//\alpha$，则$l\subset\beta$或$l//\beta$，又由$l\not\subset\beta$, $\therefore l//\beta$，故正确.

故选：**B**

【点睛】

本小题主要考查空间线线、线面和面面有关命题真假性的判断，属于基础题.

6、**C**

【解析】

利用导数法和两直线平行性质，将线段$|PQ|$的最小值转化成切点到直线距离.

【详解】

已知P与Q分别为函数$2x-y-6=0$与函数$y=x^2+1$的图象上一点，

可知抛物线$y=x^2+1$存在某条切线与直线$2x-y-6=0$平行，则$k=2$，

设抛物线$y=x^2+1$的切点为$\left(x_0,x_0^2+1\right)$，则由$y'=2x$可得$2x_0=2$，

$\therefore x_0=1$，所以切点为$(1,2)$，

则切点$(1,2)$到直线$2x-y-6=0$的距离为线段$|PQ|$的最小值，

则$|PQ|_{\min}=\dfrac{|2\times1-2-6|}{\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

故选：**C**.

【点睛】

本题考查导数的几何意义的应用，以及点到直线的距离公式的应用，考查转化思想和计算能力.

7、**A**

【解析】

由复数的除法求出z，然后计算$z\cdot\overline{z}$.

【详解】

$z=\frac{1}{3+i}=\frac{3-i}{(3+i)(3-i)}=\frac{3}{10}-\frac{1}{10}i$，

$\therefore z\cdot\overline{z}=(\frac{3}{10}-\frac{1}{10}i)(\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i)=(\frac{3}{10})^2+(\frac{1}{10})^2=\frac{1}{10}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查复数的乘除法运算，考查共轭复数的概念，掌握复数的运算法则是解题关键.

8、A

【解析】

利用数列的递推关系式，通过累加法求解即可.

【详解】

数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_n-a_{n-1}=n(n\geq 2,n\in N^*)$，

可得$a_1=1$

$a_2-a_1=2$

$a_3-a_2=3$

$a_4-a_3=4$

…

$a_n-a_{n-1}=n$

以上各式相加可得：

$a_n=1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$，

故选：A.

【点睛】

本题考查数列的递推关系式的应用，数列累加法以及通项公式的求法，考查计算能力.

9、B

【解析】

根据题意,建立平面直角坐标系.令$\overrightarrow{OP}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. E为OB中点.由$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=1$即可求得$P$点的轨迹方程.将

$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$变形,结合$\lambda+2\mu=1$及平面向量基本定理可知$P,C,E$三点共线.由圆切线的性质可知$|\vec{c}|$的最小值$m$即为$O$到直线$PE$的距离最小值,且当$PE$与圆$M$相切时,$m$有最大值.利用圆的切线性质及点到直线距离公式即可求得直线方程,进而求得原点到直线的距离,即为m的最大值.

【详解】

根据题意,$|\vec{b}|=2$,设$\overrightarrow{OP}=\vec{a}=(x,y),\overrightarrow{OB}=\vec{b}=(2,0),\overrightarrow{OC}=\vec{c},E(1,0)$

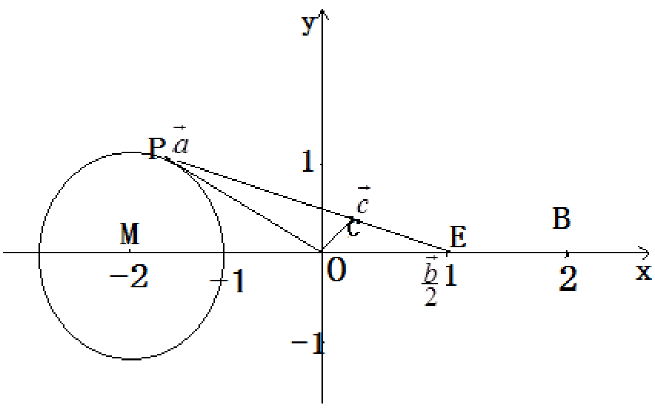
则$\overrightarrow{OE}=\dfrac{\vec{b}}{2}$

由$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=1$代入可得$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=1$

即P点的轨迹方程为$(x+2)^2+y^2=1$

又因为$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$,变形可得$\vec{c}=\lambda\vec{a}+2\mu\left(\dfrac{\vec{b}}{2}\right)$,即$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OP}+2\mu\overrightarrow{OE}$,且$\lambda+2\mu=1$

所以由平面向量基本定理可知P,C,E三点共线,如下图所示:



所以$|\vec{c}|$的最小值m即为O到直线PE的距离最小值

根据圆的切线性质可知,当PE与圆M相切时,m有最大值

设切线PE的方程为$y=k(x-1)$,化简可得$kx-y-k=0$

由切线性质及点M到直线距离公式可得$\dfrac{|-2k-k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,化简可得$8k^2=1$

即$k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

所以切线方程为$\dfrac{\sqrt{2}}{4}x-y-\dfrac{\sqrt{2}}{4}=0$或$\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+y-\dfrac{\sqrt{2}}{4}=0$

所以当 $\vec{a}$ 变化时，O 到直线 PE 的最大值为 $m=\dfrac{\left|-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+(\pm1)^2}}=\dfrac{1}{3}$

即 m 的最大值为 $\dfrac{1}{3}$

故选:**B**

【点睛】

本题考查了平面向量的坐标应用,平面向量基本定理的应用，圆的轨迹方程问题,圆的切线性质及点到直线距离公式的应用,综合性强,属于难题.

10、**B**

【解析】

由题意可将方程转化为 $\dfrac{\ln x}{x}-2a=\dfrac{4ax}{\ln x}-2$，令 $t(x)=\dfrac{\ln x}{x}$， $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，进而将方程转化为 $\left[t(x)+2\right]\left[t(x)-2a\right]=0$，即 $t(x)=-2$ 或 $t(x)=2a$，再利用 $t(x)$ 的单调性与最值即可得到结论.

【详解】

由题意知方程 $f(x)=g(x)$ 在 $(0,1)\cup(1,+\infty)$ 上恰有三个不相等的实根，

即 $\ln x-2ax=\dfrac{4ax^2}{\ln x}-2x$，①.

因为 $x>0$，①式两边同除以 x，得 $\dfrac{\ln x}{x}-2a=\dfrac{4ax}{\ln x}-2$.

所以方程 $\dfrac{\ln x}{x}-2a-\dfrac{4ax}{\ln x}+2=0$ 有三个不等的正实根.

记 $t(x)=\dfrac{\ln x}{x}$， $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，则上述方程转化为 $t(x)-2a-\dfrac{4a}{t(x)}+2=0$.

即 $\left[t(x)+2\right]\left[t(x)-2a\right]=0$，所以 $t(x)=-2$ 或 $t(x)=2a$.

因为 $t'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x\in(0,1)\cup(1,e)$ 时，$t'(x)>0$，所以 $t(x)$ 在 $(0,1)$，$(1,e)$ 上单调递增，且 $x\to0$ 时，$t(x)\to-\infty$.

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$t'(x)<0$，$t(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，且 $x\to+\infty$ 时，$t(x)\to0$.

所以当 $x=e$ 时，$t(x)$ 取最大值 $\dfrac{1}{e}$，当 $t(x)=-2$，有一根.

所以 $t(x)=2a$ 恰有两个不相等的实根，所以 $0<a<\dfrac{1}{2e}$.