

河北省承德高新区第一中学 2024-2025 学年高二上学期 12 月

月考数学试卷

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、未知

1. 数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}$, 则它的一个通项公式是 ()

- A. $\frac{1}{2n-1}$ B. $\frac{1}{2n+1}$ C. $\frac{1}{3n-1}$ D. $\frac{1}{3n+1}$

2. 已知直线 $l_1: x + (2-k)y + 1 = 0$ 与 $l_2: 2y + 3 = 0$ 垂直, 则 $k =$ ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. $\frac{1}{2}$

3. 抛物线 $y = 4x^2$ 的焦点坐标为 ()

- A. (1,0) B. (0,1) C. $(0, \frac{1}{16})$ D. $(\frac{1}{16}, 0)$

4. 已知直线 $l_1: y = kx - 2k + 1$ 与直线 l_2 关于点 (1,0) 对称, 则 l_2 恒过的定点为 ()

- A. (2,1) B. (2,-1) C. (0,-1) D. (-1,-1)

5. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 若 C 上存在一点 P ,

使得 $|PF_1| = \frac{3}{2}|PF_2|$, 则椭圆 C 的离心率的取值范围是 ()

- A. $[0, \frac{1}{5}]$ B. $[0, \frac{1}{2}]$ C. $[\frac{1}{2}, 1)$ D. $[\frac{1}{5}, 1)$

6. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, B_1C 和 C_1D 与底面所成角分别为 60° 和 45° , 则异面直线

B_1C 和 C_1D 所成角的余弦值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 若在 C 上存在点 P

(不是顶点), 使得 $\angle PF_2F_1 = 3\angle PF_1F_2$, 则 C 的离心率的取值范围为 ()

- A. $(1, 2)$ B. $(\sqrt{2}, +\infty)$ C. $(1, \sqrt{3}]$ D. $(\sqrt{2}, 2)$

8. 设 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, O 为坐标原点, 点 P 在椭圆

C 上, 延长 PF_2 交椭圆 C 于点 Q 且 $|PF_1| = |PQ|$, 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{3}b^2$, 则 $\frac{|PQ|}{|F_1F_2|} =$

()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

9. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_n = -n^2 + 7n$, 则下列说法正确的是 ()

- A. $\{a_n\}$ 是递增数列 B. $a_{10} = -14$
C. 当 $n > 4$ 时, $a_n < 0$ D. 当 $n = 3$ 或 4 时, S_n 取得最大值

二、多选题

10. 已知圆 $C_1: (x-3)^2 + y^2 = 1$, 圆 $C_2: x^2 + (y-a)^2 = 16$, 则下列结论正确的是 ()

A. 若 C_1 和 C_2 外离, 则 $a > 2\sqrt{3}$ 或 $a < -2\sqrt{3}$

B. 若 C_1 和 C_2 外切, 则 $a = \pm 4$

C. 当 $a = 2$ 时, C_1 和 C_2 内含

D. 当 $a = 0$ 时, 有且仅有一条直线与 C_1 和 C_2 均相切

11. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , P 是 C 上的动点, 则 ()

A. $|PF_1| + |PF_2| = 8$

B. $|PF_1|$ 的最大值为 9

C. $\triangle PF_1F_2$ 的面积的最大值为 12

D. 存在点 P , 使得 $PF_1 \perp PF_2$

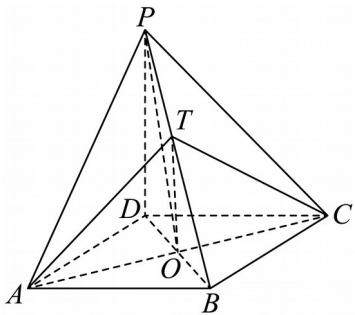
三、填空题

12. 已知直线 l 经过点 $P(\sqrt{2}, 1)$, 且倾斜角等于直线 $y = -\sqrt{3}x + 3$ 的倾斜角的一半, 则直线 l 的点斜式方程为_____.

13. 已知点 F 为抛物线 $x^2 = 16y$ 的焦点, 点 P 为抛物线上一动点, 平面内存在一点 $N(1, 2)$, 使 $\triangle PNF$ 的周长最小, 则点 P 的坐标为_____.

14. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为正方形,

$PD = AD = 2$, O 为线段 AC , BD 交点, T 为线段 BP 上的动点, 则以下结论正确的是_____.



①当 $PT = BT$ 时, $PD \parallel$ 平面 ACT ;

②当 $PT = 2BT$ 时, $PO \perp$ 平面 ACT ;

③线段 OT 的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$;

④直线 AP , CT 所成角取值范围为 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

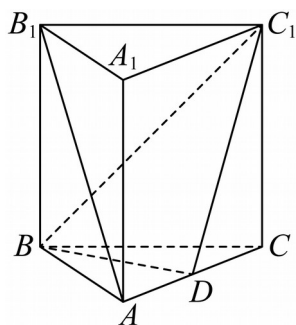
四、解答题

15. 已知圆 C 的圆心坐标为 $(2,1)$, 且点 $P(-1,-3)$ 在圆 C 上.

(1)求圆 C 的标准方程;

(2)若直线 $y = kx + m - 2k$ 与圆相交于 A 、 B 两点, 当 k 变化时, 线段 AB 的最小值为 6, 求 m 的值.

16. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D 是棱 AC 的中点.



(1)证明: $BD \perp DC_1$;

(2)证明: $AB_1 \parallel$ 平面 BC_1D ;

(3)若 $AB=2, AA_1=4$, 求 AB_1 到平面 BC_1D 的距离.

17. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长为 $2\sqrt{3}$, 且点 $M(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 在椭圆 E 上.

(1)求椭圆 E 的方程;

(2)设直线 $y = kx + \sqrt{2}$ 与椭圆 E 相交于不同的两点 P 和 Q , 当 $|PQ| = \sqrt{3}$ 时, 求实数 k 的值.

五、未知

18. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实轴长等于 2, 离心率 $e = 2$,

(1)求双曲线方程;

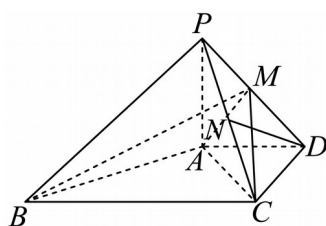
(2)过双曲线上一点 M 作直线 MA, MB 交双曲线于 A, B 两点, 且斜率分别为 k_1, k_2 , 若直线

AB 过原点, 判断 $k_1 \cdot k_2$ 是否为定值?若是, 求出定值. 若不是, 请说明理由.

六、解答题

19. 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD \perp CD$, $AD = CD = \sqrt{2}$,

$BC = 2\sqrt{2}$, $PA = 1$, N 为 PC 的中点.



(1)求证: $DN \parallel$ 平面 PAB ;

(2)求点 N 到平面 PAB 的距离;

(3)在线段 PD 上, 是否存在一点 M , 使得平面 MAC 与平面 ACD 的夹角为 45° ? 如果存在,

求出 BM 与平面 MAC 所成角的正弦值; 如果不存在, 请说明理由.

参考答案:

题号	10	11								
答案	BD	BCD								

1. C

【分析】根据数列的前₄项进行猜想，由此求得正确答案.

【详解】将 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{11}$ 可以写成 $\frac{1}{3 \times 1 - 1}$, $\frac{1}{3 \times 2 - 1}$, $\frac{1}{3 \times 3 - 1}$, $\frac{1}{3 \times 4 - 1}$

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $\frac{1}{3n-1}$.

故选: C

2. C

【分析】利用一般式方程下两直线垂直的公式代入求解即可得到结果.

【详解】因为直线 $l_1: x + (2-k)y + 1 = 0$ 与 $l_2: 2y + 3 = 0$ 垂直,

所以 $0 + 2(2-k) = 0$, 解得 $k = 2$.

故选: C.

3. C

【分析】将抛物线方程化为标准方程, 再求焦点坐标即可.

【详解】抛物线 $y = 4x^2$ 化为标准方程可得 $x^2 = \frac{1}{4}y$,

故 $p = \frac{1}{8}$, 焦点坐标为 $(0, \frac{1}{16})$.

故选: C.

4. C

【分析】求出直线 l_1 所过定点A的坐标, 求出点A关于点 $(1, 0)$ 的对称点B的坐标, 即为所求.

【详解】直线 l_1 的方程可化为 $k(x-2)+1-y=0$ ，由 $\begin{cases} x-2=0 \\ 1-y=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ ，

所以，直线 l_1 过定点 $A(2,1)$ ，点 $A(2,1)$ 关于点 $(1,0)$ 的对称点为 $B(0,-1)$ ，

因此，直线 l_2 恒过的定点 $(0,-1)$ 。

故选：C.

5. D

【分析】根据椭圆定义，结合椭圆的性质即可求解.

【详解】根据椭圆定义可得 $|PF_1|+|PF_2|=2a$ ，又 $|PF_1|=\frac{3}{2}|PF_2|$ ，故 $|PF_2|=\frac{4a}{5}$ ，

因此 $|PF_2|=\frac{4a}{5}\in[a-c,a+c]$ ，故 $a-c\leq\frac{4a}{5}\leq a+c\Rightarrow\frac{1}{5}\leq\frac{c}{a}=e$ ，故 $\frac{1}{5}\leq e<1$ ，

故选：D

6. A

【分析】建立空间直角坐标系，利用空间向量求解即可.

【详解】由题意，得 $\angle CB_1C_1=60^\circ$ ， $\angle DC_1D_1=45^\circ$ ，设 $B_1C_1=1$ ， $CC_1=DD_1=\sqrt{3}$ ，则 $C_1D_1=\sqrt{3}$ ，

以 A_1 为原点，以 A_1B_1, A_1D_1, A_1A 所在直线为 x, y, z 轴，建立如图所示空间直角坐标系.

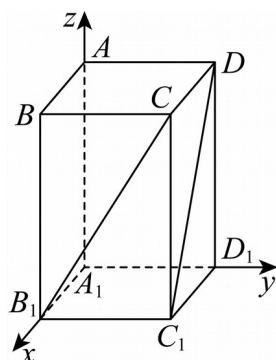
则有 $B_1(\sqrt{3}, 0, 0)$ ， $C(\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$ ， $C_1(\sqrt{3}, 1, 0)$ ， $D(0, 1, \sqrt{3})$ ，

所以 $\overrightarrow{B_1C}=(0, 1, \sqrt{3})$ ， $\overrightarrow{C_1D}=(-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$ ，

所以 $\cos\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{C_1D}=\frac{\overrightarrow{B_1C}\cdot\overrightarrow{C_1D}}{|\overrightarrow{B_1C}|\cdot|\overrightarrow{C_1D}|}=\frac{3}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ ，

即异面直线 B_1C 和 C_1D 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

故选：A.



7. D

【分析】设 PF_1 与 y 轴交点为 Q ，连接 QF_2 ，由双曲线的定义和对称性，结合已知条件得

$|QF_1| = 2a$ ，有 $|QF_1| > |OF_1|$ 且 $\frac{|OF_1|}{|QF_1|} > \cos 45^\circ$ ，可求离心率的取值范围.

【详解】设 PF_1 与 y 轴交点为 Q ，连接 QF_2 ，

由对称性可知 $\angle QF_1F_2 = \angle QF_2F_1$ ，

又因为 $\angle PF_2F_1 = 3\angle PF_1F_2$ ，

所以 $\angle PF_2Q = \angle PQF_2 = 2\angle PF_1F_2$ ，

所以 $|PQ| = |PF_2|$ ，

又因为 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$ ，

所以 $|PF_1| - |PF_2| = |PF_1| - |PQ| = |QF_1| = 2a$ ，

在 $\text{Rt}\triangle QOF_1$ 中， $|QF_1| > |OF_1|$ ，

所以 $2a > c$ ，

所以 $e = \frac{c}{a} < 2$,

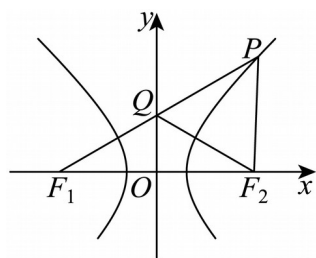
由 $\angle PF_2F_1 = 3\angle PF_1F_2$, 且三角形内角和为 180° ,

所以 $\angle PF_1F_2 < \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$,

所以 $\cos \angle PF_1F_2 = \frac{|OF_1|}{|QF_1|} > \cos 45^\circ$, 即 $\frac{c}{2a} > \frac{\sqrt{2}}{2}$,

则 $e = \frac{c}{a} > \sqrt{2}$,

综上: $e \in (\sqrt{2}, 2)$.



故选: D.

8. B

【分析】利用焦点三角形的面积公式及椭圆的定义可得 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$, 进一步得 $\triangle F_1PQ$ 为等

边三角形, 且 $PQ \perp x$ 轴, 从而可得解.

【详解】由椭圆的定义, 得 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$,

由余弦定理, 得 $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 4c^2}{2|PF_1||PF_2|} = \frac{(|PF_1| + |PF_2|)^2 - 2|PF_1||PF_2| - 4c^2}{2|PF_1||PF_2|}$

$$= \frac{4a^2 - 4c^2 - 2|PF_1||PF_2|}{2|PF_1||PF_2|} = \frac{4b^2 - 2|PF_1||PF_2|}{2|PF_1||PF_2|},$$

整理得: $2b^2 = |PF_1||PF_2|(\cos \angle F_1PF_2 + 1)$, 又 $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin \angle F_1PF_2$,

$$S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{b^2 \sin \angle F_1PF_2}{\cos \angle F_1PF_2 + 1} = \frac{2b^2 \sin \frac{\angle F_1PF_2}{2} \cos \frac{\angle F_1PF_2}{2}}{2 \cos^2 \frac{\angle F_1PF_2}{2}} = b^2 \tan \frac{\angle F_1PF_2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}b^2,$$

因此 $\tan \frac{\angle F_1PF_2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$, 又 $|PF_1| = |PQ|$, 则 $\triangle F_1PQ$ 为等边三角形,

由椭圆对称性得 $PQ \perp x$ 轴, 所以 $\frac{|PQ|}{|F_1F_2|} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故选: B.

9. CD

【分析】根据 S_n 表达式及 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1}$ 的关系, 算出数列 $\{a_n\}$ 通项公式, 即可判

断 A、B、C 选项的正误. $S_n = -n^2 + 7n$ 的最值可视为定义域为正整数的二次函数来求得.

【详解】当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = -2n + 8$, 又 $a_1 = S_1 = 6 = -2 \times 1 + 8$, 所以 $a_n = -2n + 8$,

则 $\{a_n\}$ 是递减数列, 故 A 错误;

$a_{10} = -12$, 故 B 错误;

当 $n > 4$ 时, $a_n = 8 - 2n < 0$, 故 C 正确;

因为 $S_n = -n^2 + 7n$ 的对称轴为 $n = \frac{7}{2}$, 开口向下, 而 n 是正整数, 且 $n = 3$ 或 4 距离对称轴一

样远, 所以当 $n = 3$ 或 4 时, S_n 取得最大值, 故 D 正确.

故选：CD.

10. BD

【分析】先根据圆的标准方程得到两圆圆心坐标与半径，从而求出圆心距，再由两圆的位置关系得到圆心距与半径的和、差的关系得到不等式(或方程)，即可判断.

【详解】由题知 $C_1(3,0)$, $C_2(0,a)$, $r_1=1$, $r_2=4$, $|C_1C_2|=\sqrt{a^2+9}$.

对于 A, 若 C_1 和 C_2 外离, 则 $|C_1C_2|=\sqrt{a^2+9}>r_1+r_2=5$, 解得 $a>4$ 或 $a<-4$, 故 A 错误;

对于 B, 若 C_1 和 C_2 外切, 则 $|C_1C_2|=\sqrt{a^2+9}=r_1+r_2=5$, 解得 $a=\pm 4$, 故 B 正确;

对于 C, 当 $a=2$ 时, $3=r_2-r_1<|C_1C_2|=\sqrt{a^2+9}=\sqrt{13}<r_1+r_2=5$, 则 C_1 和 C_2 相交, 故 C 错误;

对于 D, 当 $a=0$ 时, $|C_1C_2|=\sqrt{a^2+9}=3=r_2-r_1$, 则 C_1 和 C_2 内切, 有且只有一条公切线,

故 D 正确.

故选：BD.

11. BCD

【分析】求出椭圆的长短半轴长及半焦距，再结合椭圆的定义及性质逐项判断.

【详解】椭圆 $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的长半轴长 $a=5$, 短半轴长 $b=3$, 半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=4$,

对于 A, $|PF_1|+|PF_2|=2a=10$, A 错误;

对于 B, $|PF_1|_{\max}=a+c=9$, B 正确;

对于 C, 设 $\triangle PF_1F_2$ 的顶点 $P(x_0, y_0)$, 则 $|y_0| \leq 3$, $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} |F_1F_2| |y_0| = c \cdot |y_0| \leq 4 \times 3 = 12$, C

正确;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/766120123215011012>