第六章　§6.2　平面向量的运算

6.2.4　向量的数量积(一)

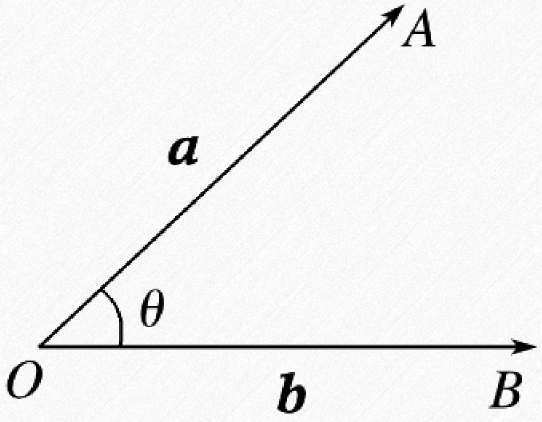
1

PART ONE

知识梳理

知识点一　两向量的夹角与垂直

1.夹角：已知两个_非零向量_$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，O是平面上的任意一点，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则_$\angle AOB$_$=\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$叫做向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角(如图所示).



当$\theta=0$时，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$_同向_；当$\theta=\pi$时，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$_反向_.

2.垂直：如果$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角是$\dfrac{\pi}{2}$，则称$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直，记作$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

知识点二　向量数量积的定义

已知两个非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，它们的夹角为θ，我们把数量_$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$_叫做向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的数量积(或内积)，记作$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$_$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$_.

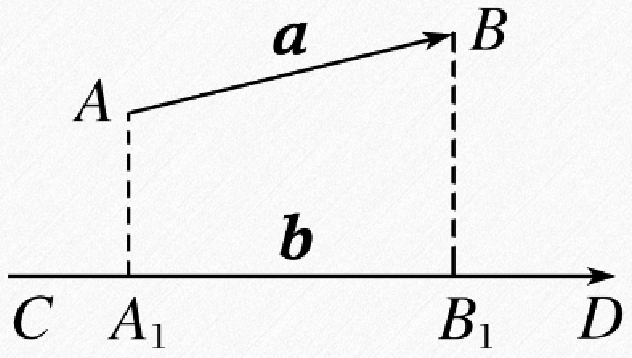
规定：零向量与任一向量的数量积为_0_.

思考　若$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，是否能推出$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$?

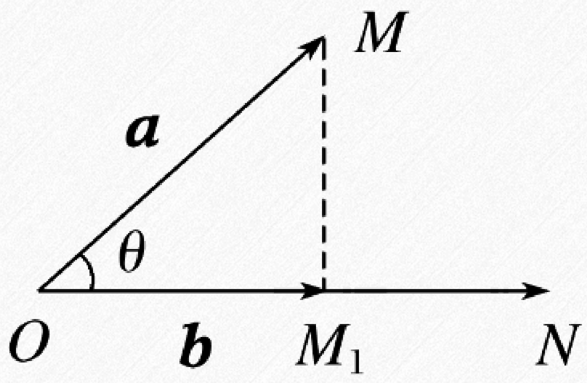
答案　在实数中，若$a\neq0$，且$a\cdot b=0$，则$b=0$；但是在数量积中，若$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，不能推出$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.因为其中$\boldsymbol{a}$有可能垂直于$\boldsymbol{b}$.

知识点三　投影向量

1.如图，设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}$，我们考虑如下的变换：过$\overrightarrow{AB}$的起点$A$和终点$B$，分别作$\overrightarrow{CD}$所在直线的垂线，垂足分别为$A_1$，$B_1$，得到 $\overrightarrow{A_1B_1}$ ，我们称上述变换为向量 $\boldsymbol{a}$ 向向量 $\boldsymbol{b}$ 的__投影__，$\overrightarrow{A_1B_1}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的__投影__向量.



2.如图，在平面内任取一点 O，作$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{b}$，过点 M 作直线 ON 的垂线，垂足为 M_1，则$\overrightarrow{OM_1}$就是向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量.设与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量为 $\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则$\overrightarrow{OM_1}$与 $\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{a}$，θ 之间的关系为$\overrightarrow{OM_1}=$ $\underline{|\boldsymbol{a}|\cos\theta\,\boldsymbol{e}}$.



知识点四　平面向量数量积的性质

设向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$都是非零向量，它们的夹角为θ，$\boldsymbol{e}$是与$\boldsymbol{b}$方向相同的单位向量.则

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$.

(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(3)当$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\begin{cases}\underline{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}，\boldsymbol{a}\text{与}\boldsymbol{b}\text{同向}，\\ \underline{-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}，\boldsymbol{a}\text{与}\boldsymbol{b}\text{反向}.\end{cases}$

特别地，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\underline{|\boldsymbol{a}|^2}$或$|\boldsymbol{a}|=\underline{\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}}$.

(4)$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\underline{\leqslant}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

思考辨析　判断正误

SI KAO BIAN XI　PAN DUAN ZHENG WU

1.两个向量的数量积是一个向量.(×)

2.向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影向量一定与$\boldsymbol{b}$共线.(√)

3.若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为钝角.(×)

4.若$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则对任一非零向量$\boldsymbol{b}$都有$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$.(×)

2

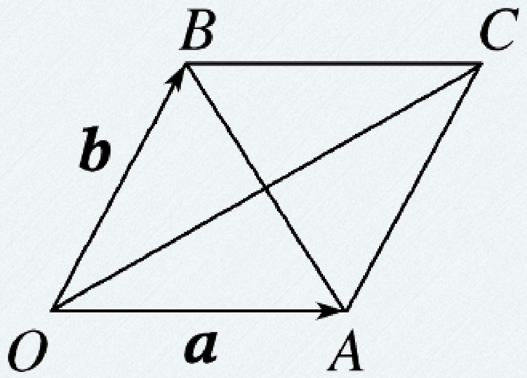
PART TWO

题型探究

一、向量的夹角

例1 已知$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为60°，则$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的夹角是多少？$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的夹角又是多少？

解 如图所示，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，且$\angle AOB=60°$.



以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为邻边作平行四边形$OACB$，

则$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

因为$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，所以平行四边形$OACB$是菱形，又$\angle AOB=60°$，

所以$\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{OA}$的夹角为30°，$\overrightarrow{BA}$与$\overrightarrow{OA}$的夹角为60°.

即$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的夹角是30°，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的夹角是60°.

反思感悟

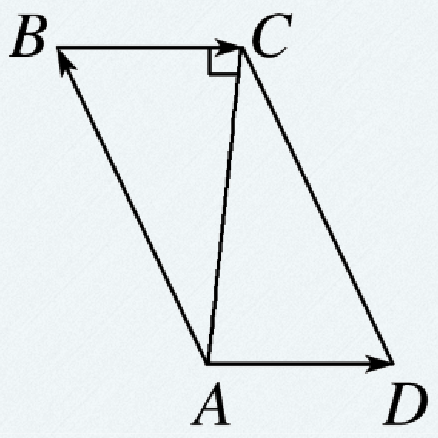
求两个向量夹角的关键是利用平移的方法使两个向量起点重合，作两个向量的夹角，按照“一作二证三算”的步骤求出.

跟踪训练 1　在△ABC 中，$\angle C=90°$，$BC=\frac{1}{2}AB$，则$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角是

A.30°　　　　B.60°

C.120°　　　　D.150°

解析　如图，作向量$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，



则$\angle BAD$ 是$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角，

在△ABC 中，因为$\angle ACB=90°$，$BC=\frac{1}{2}AB$，

所以$\angle ABC=60°$，所以$\angle BAD=120°$.

二、求两向量的数量积

例2　已知正三角形ABC的边长为1，求：(1)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$；

解　$\because \overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为 $60°$,

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60°=1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$

(2)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$；

(3)$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$.

解　$\because \overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角为 $120°$,

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos 120°=1\times 1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$

(3)$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$.

解 $\because\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为 60°,

$\therefore\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AC}|\cos 60°=1\times1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

反思感悟

定义法求平面向量的数量积

若已知两向量的模及其夹角，则直接利用公式$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$.运用此法计算数量积的关键是确定两个向量的夹角，条件是两向量的起点必须重合，否则，要通过平移使两向量符合以上条件.

跟踪训练 2 在等腰直角三角形 ABC 中，$AB=BC=4$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$__0__，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=$__$-16$__，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=$__$-16$__.

解析 由题意，得$|\overrightarrow{AB}|=4$，$|\overrightarrow{BC}|=4$，$|\overrightarrow{CA}|=4\sqrt{2}$，

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=4\times4\times\cos 90^\circ=0$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=4\times4\sqrt{2}\times\cos 135^\circ=-16$，

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=4\sqrt{2}\times4\times\cos 135^\circ=-16$.

三、投影向量

例3　已知$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=1$，向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$的夹角为120°，求$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量.

解　$\because |\boldsymbol{b}|=1$，$\therefore \boldsymbol{b}$为单位向量.

$\therefore \boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为$|\boldsymbol{a}|\cos 120°\cdot\boldsymbol{b}=3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\boldsymbol{b}=-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{b}$.

延伸探究 本例改为求$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$上的投影向量.

解 $\because |\boldsymbol{a}|=3$，$\therefore \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}$，

$\therefore \boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为$|\boldsymbol{b}|\cos 120° \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}=-\dfrac{1}{6}\boldsymbol{a}$.

反思感悟

投影向量的求法

(1)向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$|\boldsymbol{a}|\cos\theta\ \boldsymbol{e}$(其中$\boldsymbol{e}$为与$\boldsymbol{b}$同向的单位向量)，它是一个向量，且与$\boldsymbol{b}$共线，其方向由向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta$的余弦值决定.

(2)向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$|\boldsymbol{a}|\cos\theta\ \dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

跟踪训练3 已知$|\boldsymbol{a}|=12$，$|\boldsymbol{b}|=8$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=24$，求$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量.

解 $\because \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$,

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{24}{12\times 8}=\dfrac{1}{4}$,

$\therefore \boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为$|\boldsymbol{a}|\cos\theta\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=12\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{8}\boldsymbol{b}=\dfrac{3}{8}\boldsymbol{b}$.

3

PART THREE

随堂演练

1.已知$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{3}$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 120°，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于

A.3

B.-3

C.$-3\sqrt{3}$

D.$3\sqrt{3}$

解析　由数量积的定义，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 120°=\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-3.$

故选 B.

2.已知向量$|\boldsymbol{a}|=10$，$|\boldsymbol{b}|=12$，且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-60$，则向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为

A.60°　　　　B.120° √

C.135°　　　　D.150°

解析　设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ，

则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-60}{10\times 12}=-\dfrac{1}{2}$，

又$0°\leqslant\theta\leqslant 180°$，$\therefore\theta=120°$.

3.(多选)对于任意向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，下列命题中不正确的是

A.若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$中至少有一个为$\boldsymbol{0}$ √

B.$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ √

C.若$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

D.$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$

解析　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Rightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$或$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$或$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，所以A错误；

根据向量加法的平行四边形法则，知$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，只有当$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$同向时取“＝”，所以B错误；

由数量积的性质知，C正确；

因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2$，

所以$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$，所以 D 正确.