

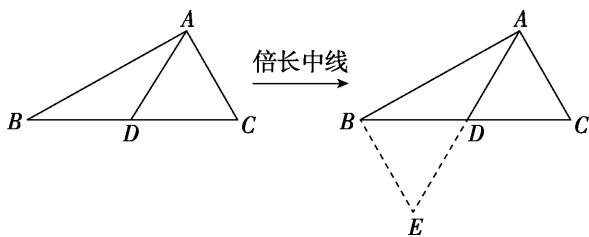
## 专题 31 中考命题核心元素有关中点问题（解析版）

### 模块一 典例剖析+针对训练

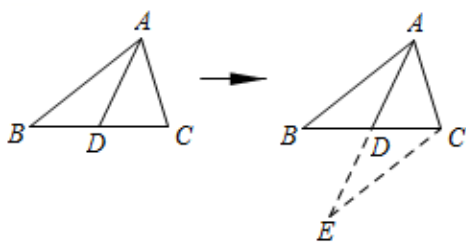
#### 模型一 倍长中线

**【模型解读】** 当已知条件中出现三角形中线时，常常将此中线倍长构造全等三角形解决问题。解题时，条件中若出现“中点”“中线”等字样，可以考虑延长中线构造全等三角形，把分散的已知条件和所求证的结论集合到同一个三角形中。

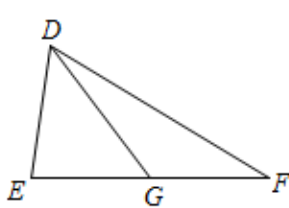
基本图形：



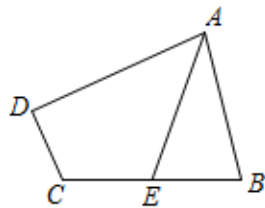
**典例 1** ((2022·南宁模拟) **【阅读理解】** 倍长中线是初中数学一种重要的数学思想，如图①，在 $\triangle ABC$ 中， $AD$ 是 $BC$ 边上的中线，若延长 $AD$ 至 $E$ ，使 $DE=AD$ ，连接 $CE$ ，可根据 $SAS$ 证明 $\triangle ABD \cong \triangle ECD$ ，则 $AB=EC$ 。



图①



图②



图③

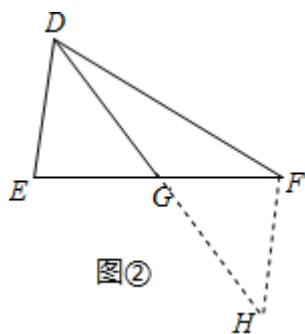
**【类比探究】** 如图②，在 $\triangle DEF$ 中， $DE=3$ ， $DF=7$ ，点 $G$ 是 $EF$ 的中点，求中线 $DG$ 的取值范围；

**【拓展应用】** 如图③，在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ，点 $E$ 是 $BC$ 的中点。若 $AE$ 是 $\angle BAD$ 的平分线。试探究 $AB$ ， $AD$ ， $DC$ 之间的等量关系，并证明你的结论。

**思路引领：** **【类比探究】** 结论： $2 < DG < 5$ 。延长 $DG$ 至 $H$ ，使 $GH=DG$ ，连接 $FH$ ，证明 $\triangle DGE \cong \triangle HGF$  ( $SAS$ )，再依据 $DF - FH < DH < DF + FH$ ，即可得出结论。

**【拓展应用】** 结论： $AD=AB+DC$ 。证明 $\triangle CEF \cong \triangle BEA$  ( $AAS$ )，推出 $AB=CF$ ，再证明 $DA=DF$ 即可解决问题。

**【类比探究】** 解：如图②，延长 $DG$ 至 $H$ ，使 $GH=DG$ ，连接 $FH$ ，



∵ 点  $G$  是  $EF$  的中点,

∴  $EG = FG$ ,

在  $\triangle DGE$  和  $\triangle HGF$  中,

$$\begin{cases} EG = FG \\ \angle DGE = \angle HGF \\ DG = HG \end{cases},$$

∴  $\triangle DGE \cong \triangle HGF$  (SAS),

∴  $FH = DE = 3$ ,

在  $\triangle DFH$  中,  $DF - FH < DH < DF + FH$ ,

∴  $7 - 3 < DH < 7 + 3$ ,

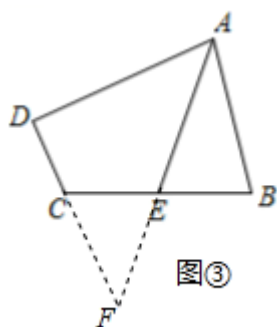
∵  $DH = 2DG$ ,

∴  $4 < 2DG < 10$ ,

∴  $2 < DG < 5$ ;

**【拓展应用】** 解: 结论:  $AD = AB + DC$ .

理由: 如图③中, 延长  $AE$ 、 $DC$  交于  $F$ ,



∵  $AB \parallel CD$ ,

∴  $\angle CFE = \angle EAB$ ,

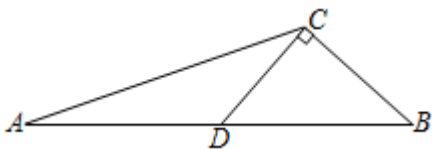
∵ 点  $E$  是  $BC$  的中点

$\therefore CE=EB,$   
 $\therefore \angle CEF=\angle AEB,$   
 $\therefore \triangle CEF \cong \triangle BEA (AAS),$   
 $\therefore AB=CF.$   
 $\therefore AF$  平分  $\angle DAB,$   
 $\therefore \angle DAF=\angle EAB,$   
 $\therefore \angle EAB=\angle CFE,$   
 $\therefore \angle DAF=\angle DFA,$   
 $\therefore AD=DF,$   
 $\therefore DF=DC+CF=DC+AB,$   
 $\therefore AD=AB+DC.$

**总结提升：**本题属于四边形综合题，主要考查了是全等三角形的判定和性质、三角形中线和角平分线，三角形三边关系等，合理添加辅助线、灵活运用相关的性质定理和判定定理是解题的关键。

### 针对训练

1. (2020·贵阳模拟) 如图，在  $\triangle ABC$  中， $\angle ACB=120^\circ$ ， $BC=4$ ， $D$  为  $AB$  的中点， $DC \perp BC$ ，则  $\triangle ABC$  的面积是 ( )



- A. 16                      B.  $16\sqrt{3}$                       C. 8                      D.  $8\sqrt{3}$

**思路引领** 延长  $CD$  到  $H$ ，使  $DH=CD$ ，由线段中点的定义得到  $AD=BD$ ，根据全等三角形的性质得到  $AH=BC=4$ ， $\angle H=\angle BCD=90^\circ$ ，根据三角形的面积公式计算，得到结论。

解：  $\therefore DC \perp BC,$   
 $\therefore \angle BCD=90^\circ,$   
 $\therefore \angle ACB=120^\circ,$   
 $\therefore \angle ACD=30^\circ,$

延长  $CD$  到  $H$ ，使  $DH=CD$ ，连接  $AH$ ，

$\therefore D$  为  $AB$  的中点，  
 $\therefore AD=BD,$

在 $\triangle ADH$ 与 $\triangle BCD$ 中,

$$\begin{cases} CD = HD \\ \angle CDB = \angle HDA \\ BD = AD \end{cases},$$

$\therefore \triangle ADH \cong \triangle BCD$  (SAS),

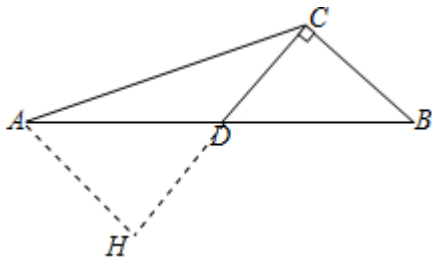
$\therefore AH = BC = 4, \angle H = \angle BCD = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle ACH = 30^\circ$ ,

$$\therefore CH = AH \cdot \tan 30^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积} = \triangle ACH \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3},$$

故选: D.

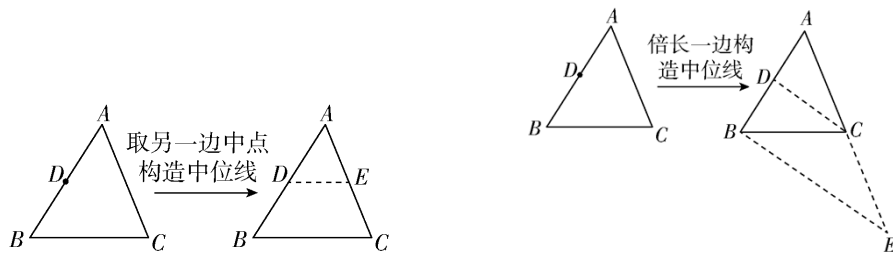


**总结提升:** 本题考查的是全等三角形的判定和性质、解直角三角形、三角形的面积的计算, 正确的作出辅助线是解题的关键.

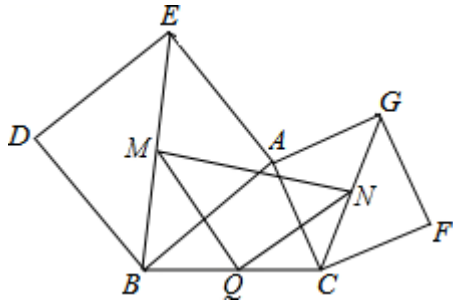
## 模型二 中位线

**【模型解读】** 当已知条件中同时出现两个及两个以上中点时, 常考虑构造中位线; 或出现一个中点, 要求证明平行线段或线段倍分关系时, 也常考虑构造中位线.

基本图形:



**典例 2** 如图, 在 $\triangle ABC$ 的两边 $AB$ 、 $AC$ 向形外作正方形 $ABDE$ 和 $ACFG$ , 取 $BE$ 、 $BC$ 、 $CG$ 的中点 $M$ 、 $Q$ 、 $N$ . 求证:  $MQ = QN$ .



**思路引领** 根据正方形性质  $AB=AE$ ,  $AC=AG$ ,  $\angle EAB=\angle GAC$ , 求出  $\angle GAB=\angle EAC$ , 证出  $\triangle BAG \cong \triangle EAC$ , 再根据三角形中位线求出即可.

证明: 连接  $BG$  和  $CE$  交于  $O$ ,

$\because$  四边形  $ABDE$  和四边形  $ACFG$  是正方形,

$\therefore AB=AE$ ,  $AC=AG$ ,  $\angle EAB=\angle GAC$ ,

$\therefore \angle EAB+\angle EAG=\angle GAC+\angle EAG$ ,

$\therefore \angle GAB=\angle EAC$ ,

在  $\triangle BAG$  和  $\triangle EAC$  中,

$$\begin{cases} AB=AE \\ \angle BAG=\angle EAC \\ AG=AC \end{cases},$$

$\therefore \triangle BAG \cong \triangle EAC$  (SAS),

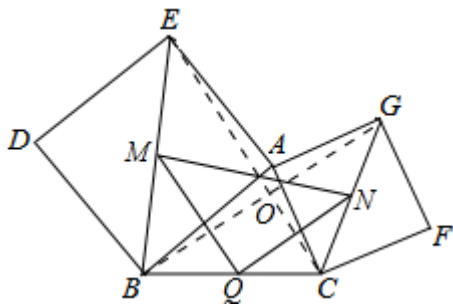
$\therefore BG=CE$ .

$\because$   $BE$ 、 $BC$ 、 $CG$  的中点  $M$ 、 $Q$ 、 $N$ ,

$$\therefore MQ = \frac{1}{2}CE, \quad QN = \frac{1}{2}BG,$$

$\because BG=CE$ ,

$\therefore QN=MQ$ .

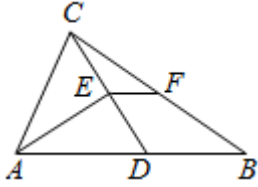


**总结提升** 本题考查了正方形的性质和判定, 全等三角形的性质和判定的应用, 关键是根据正方形性质  $AB$

$$=AE, AC=AG, \angle EAB=\angle GAC.$$

### 针对训练

1. (2022 春·凤翔县期末) 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $D$  是  $AB$  上一点,  $AD=AC$ ,  $AE \perp CD$ , 垂足为点  $E$ ,  $F$  是  $BC$  的中点, 若  $BD=10$ , 则  $EF$  的长为 ( )



- A. 8                      B. 10                      C. 5                      D. 4

**思路引领:** 根据等腰三角形的三线合一得到  $CE=ED$ , 根据三角形内角和定理解答即可.

解:  $\because AD=AC, AE \perp CD,$

$$\therefore CE=ED,$$

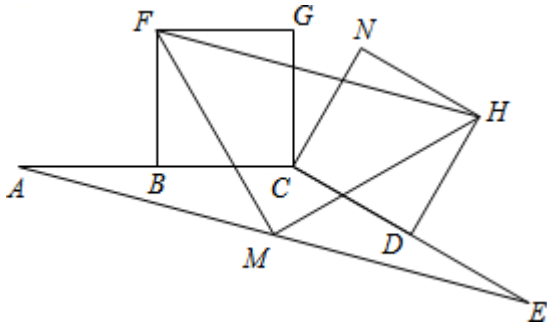
$$\because CE=ED, CF=FB,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 10 = 5,$$

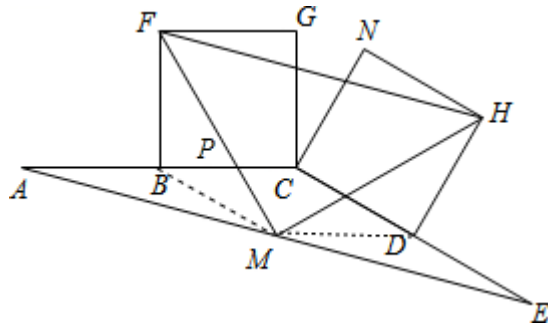
故选: C.

**总结提升:** 本题考查的是三角形中位线定理、等腰三角形的性质, 掌握三角形的中位线平行于第三边, 且等于第三边的一半是解题的关键.

2. 如图, 在  $\triangle ACE$  中, 点  $B$  是  $AC$  的中点, 点  $D$  是  $CE$  的中点, 点  $M$  是  $AE$  的中点, 四边形  $BCGF$  和四边形  $CDHN$  都是正方形. 求证:  $\triangle FMH$  是等腰直角三角形.



**思路引领:** 首先要连接  $MB$ 、 $MD$ , 然后证明  $\triangle FBM \cong \triangle MDH$ , 从而求出两边相等, 且有一角为  $90^\circ$ .



证明：连接  $MB$ 、 $MD$ ，设  $FM$  与  $AC$  交于点  $P$ ，

$\because B$ 、 $D$ 、 $M$  分别是  $AC$ 、 $CE$ 、 $AE$  的中点，四边形  $BCGF$  和四边形  $CDHN$  都是正方形，

$\therefore MD \parallel AC$ ，且  $MD = \frac{1}{2}AC = BC = BF$ ；

$MB \parallel CE$ ，且  $MB = \frac{1}{2}CE = CD = DH$ ，

$\therefore$  四边形  $BCDM$  是平行四边形，

$\therefore \angle CBM = \angle CDM$ ，

又  $\because \angle FBP = \angle HDC$ ，

$\therefore \angle FBM = \angle MDH$ ，

在  $\triangle FBM$  和  $\triangle MDH$  中，

$$\begin{cases} BF = MD \\ \angle FBM = \angle HDM \\ BM = DH \end{cases}$$

$\therefore \triangle FBM \cong \triangle MDH$  (SAS)，

$\therefore FM = MH$ ，且  $\angle FMB = \angle MHD$ ， $\angle BFM = \angle DMH$ 。

$\therefore \angle FMB + \angle HMD = 180^\circ - \angle FBM$ ，

$\because BM \parallel CE$ ，

$\therefore \angle AMB = \angle E$ ，

同理： $\angle DME = \angle A$ 。

$\therefore \angle AMB + \angle DME = \angle A + \angle AMB = \angle CBM$ ，

$\therefore \angle FMH = 180^\circ - (\angle AMB + \angle DME) - (\angle FMB + \angle HMD)$

$= 180^\circ - \angle CBM - (180^\circ - \angle FBM)$

$= \angle FBC = 90^\circ$ ，

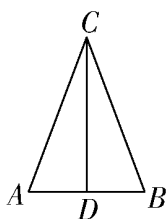
$\therefore \triangle FMH$  是等腰直角三角形。

总结提升：

此题主要考查了全等三角形的判定和性质，三角形的中位线，平行四边形的性质和判定应用，关键是找出能使三角形全等的条件，注意：全等三角形的判定定理有  $SAS$ ， $ASA$ ， $AAS$ ， $SSS$ ，全等三角形的对应角相等，对应边相等，本题综合考查了等腰三角形的判定，偏难，学生要综合运用学过的几何知识来证明。

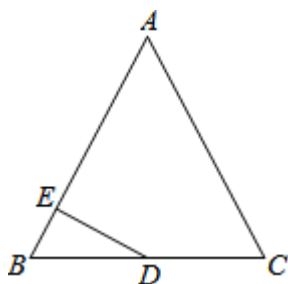
### 模型三 等腰三角形“三线合一”

【模型解读】当出现等腰三角形时，常作底边的中线，可利用“三线合一”的性质解题。



基本图形：

**典例 3**（2018 秋·高平市期末）如图，在  $\triangle ABC$  中， $AB=AC=13$ ， $BC=10$ ，点  $D$  为  $BC$  的中点， $DE \perp AB$ ，垂足为点  $E$ ，求  $DE$  的长。



**思路引领：**首先连接  $AD$ ，由  $\triangle ABC$  中， $AB=AC=13$ ， $BC=10$ ， $D$  为  $BC$  中点，利用等腰三角形的三线合一的性质，即可证得： $AD \perp BC$ ，然后利用勾股定理，即可求得  $AD$  的长，然后利用面积法来求  $DE$  的长。

**解：**连接  $AD$ ，

$\because \triangle ABC$  中， $AB=AC=13$ ， $BC=10$ ， $D$  为  $BC$  中点，

$$\therefore AD \perp BC, \quad BD = \frac{1}{2}BC = 5,$$

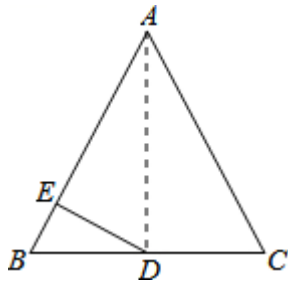
$$\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 12,$$

又  $\because DE \perp AB$ ，

$$\therefore \frac{1}{2}BD \cdot AD = \frac{1}{2}AB \cdot ED,$$

$$\therefore ED = \frac{BD \cdot AD}{AB} = \frac{5 \times 12}{13} = \frac{60}{13},$$

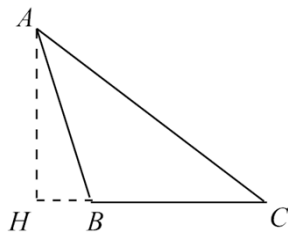
解得：  $DE = \frac{60}{13}$ .



**总结提升：**此题考查了等腰三角形的性质以及勾股定理．此题难度适中，解题的关键是准确作出辅助线，注意数形结合思想的应用．

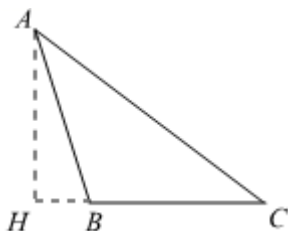
### 针对训练

1. (2021 秋·下城区期中) 如图，在钝角  $\triangle ABC$  中， $AH \perp BC$ ，垂足为点  $H$ ，若  $AB+BH=CH$ ， $\angle ABH=70^\circ$ ，则  $\angle BAC=$   $35^\circ$ ，若将题目改为在锐角  $\triangle ABC$  中，其它条件不变，则  $\angle BAC=$   $75^\circ$ ．



**思路引领：**当  $\angle ABC$  为钝角时，由  $AB+BH=CH$  可得出  $AB=BC$ ，利用等腰三角形的性质及三角形外角的性质即可求出  $\angle BAC$  的度数；当  $\angle ABC$  为锐角时，过点  $A$  作  $AD=AB$ ，交  $BC$  于点  $D$ ，根据等腰三角形的性质可得出  $\angle ADB=\angle ABH=70^\circ$ 、 $BH=DH$ ，结合  $AB+BH=CH$ 、 $CH=CD+DH$  可得出  $CD=AB=AD$ ，由等腰三角形的性质结合三角形外角的性质可求出  $\angle C$  的度数，再根据三角形内角为  $180^\circ$  即可求出  $\angle BAC$  的度数．

**解：**当  $\angle ABC$  为钝角时，如图：

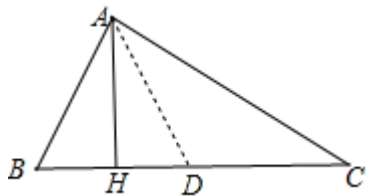


$$\because AB+BH=CH,$$

$$\therefore AB=BC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BCA = \frac{1}{2} \angle ABH = 35^\circ ;$$

当  $\angle ABC$  为锐角时，过点  $A$  作  $AD=AB$ ，交  $BC$  于点  $D$ ，如图所示：



$$\because AB=AD,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ABH = 70^\circ, \quad BH=DH.$$

$$\because AB+BH=CH, \quad CH=CD+DH,$$

$$\therefore CD=AB=AD,$$

$$\therefore \angle C = \frac{1}{2} \angle ADB = 35^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle ABH - \angle C = 75^\circ.$$

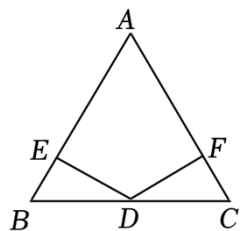
故答案为： $35^\circ$ ， $75^\circ$ 。

**总结提升：** 本题考查等腰三角形的判定与性质、三角形内角和定理以及三角形外角的性质，做出等腰三角形是解题的关键。

2. (2022 秋·扬州期中) 如图，在  $\triangle ABC$  中， $AB=AC=13$ ， $BC=10$ ， $D$  为  $BC$  的中点，

(1) 求  $AD$  长；

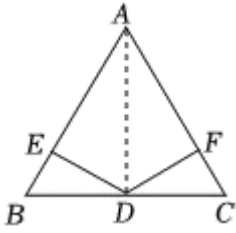
(2) 若  $DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，垂足为  $E$ 、 $F$ ，求证： $DE=DF$ 。



**思路引领：** (1) 连接  $AD$ ，根据等腰三角形的性质可得  $AD \perp BC$ ，再利用勾股定理即可；

(2) 利用等腰三角形的性质得  $AD$  是等腰  $\triangle BAC$  的角平分线，再根据角平分线的性质即可证明结论。

(1) 解：如图，连接  $AD$ ，



$\because D$  为  $BC$  的中点,  $BC=10$ ,

$\therefore BD=5$ ,

又  $\because AB=AC$ ,

$\therefore AD \perp BC$ ,

在  $Rt\triangle ABD$  中, 由勾股定理得,

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12;$$

(2) 证明:  $\because AB=AC, AD \perp BC$ ,

$\therefore AD$  是等腰  $\triangle BAC$  的角平分线,

又  $\because DE \perp AB, DF \perp AC$ ,

$\therefore DE=DF$ .

**总结提升:** 本题考查了等腰三角形的性质, 勾股定理, 角平分线的性质, 熟练掌握勾股定理以及角平分线的性质是解题的关键.

3. (2011 春·内江期末) 如图 1 所示, 等边  $\triangle ABC$  中,  $AD$  是  $BC$  边上的中线, 根据等腰三角形的“三线合一”特性,  $AD$  平分  $\angle BAC$ , 且  $AD \perp BC$ , 则有  $\angle BAD=30^\circ$ ,  $BD = CD = \frac{1}{2}AB$ . 于是可得出结论“直角三角形中,  $30^\circ$  角所对的直角边等于斜边的一半”.

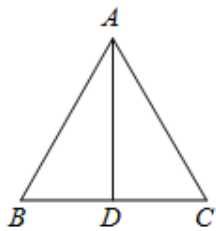


图 1

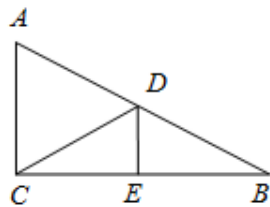


图 2

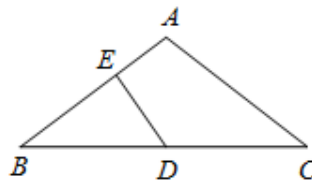


图 3

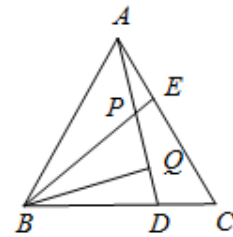


图 4

请根据从上面材料中所得到的信息解答下列问题:

(1)  $\triangle ABC$  中, 若  $\angle A: \angle B: \angle C=1: 2: 3$ ,  $AB=a$ , 则  $BC=\frac{a}{2}$ ;

(2) 如图 2 所示, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB=90^\circ$ ,  $BC$  的垂直平分线交  $AB$  于点  $D$ , 垂足为  $E$ , 当  $BD$

$=5\text{cm}$ ,  $\angle B=30^\circ$  时,  $\triangle ACD$  的周长 = 15cm.

(3) 如图 3 所示, 在  $\triangle ABC$  中,  $AB=AC$ ,  $\angle A=120^\circ$ ,  $D$  是  $BC$  的中点,  $DE \perp AB$ , 垂足为  $E$ , 那么  $BE:EA =$  3:1.

(4) 如图 4 所示, 在等边  $\triangle ABC$  中,  $D$ 、 $E$  分别是  $BC$ 、 $AC$  上的点, 且  $\angle CAD = \angle ABE$ ,  $AD$ 、 $BE$  交于点  $P$ , 作  $BQ \perp AD$  于  $Q$ , 猜想  $PB$  与  $PQ$  的数量关系, 并说明理由.

**思路引领:** (1) 根据三角形内角和定理推知  $\angle A=30^\circ$ ,  $\angle C=90^\circ$ .

(2) 根据线段垂直平分线的性质知  $CD=BD$ , 则  $\triangle ACD$  的周长等于  $AC+AB$ ;

(3) 如图 3, 连接  $AD$ . 利用等腰三角形的性质、垂直的定义推知  $\angle B = \angle ADE = 30^\circ$ , 然后由“30 度角所对的直角边是斜边的一半”分别求得  $BE$ 、 $AE$  的值;

(4) 如图 4, 根据三角形外角的性质, 可以得到  $\angle PBQ = 30^\circ$ , 根据直角三角形的性质即可得到.

**解:**



图 1

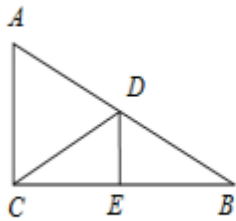


图 2

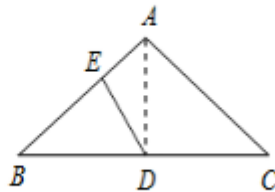


图 3

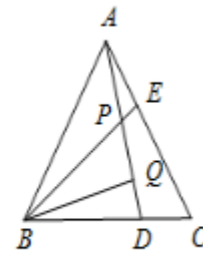


图 4

(1)  $\because \angle A: \angle B: \angle C = 1: 2: 3$ , 且  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ,

$\therefore \angle A = 30^\circ$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,

$$\therefore BC = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2}.$$

故填:  $\frac{a}{2}$ ;

(2) 如图 2,  $\because DE$  是线段  $BC$  的垂直平分线,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,

$\therefore CD = BD$ ,  $AD = BD$ .

又  $\because$  在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ ,

$$\therefore AC = \frac{1}{2} AB,$$

$\therefore \triangle ACD$  的周长  $= AC + AB = 3BD = 15\text{cm}$ .

故填：15cm；

(3) 如图 3，连接  $AD$ 。

$\because$  在  $\triangle ABC$  中， $AB=AC$ ， $\angle A=120^\circ$ ， $D$  是  $BC$  的中点，

$\therefore \angle BAD=60^\circ$ 。

又  $\because DE \perp AB$ ，

$\therefore \angle B = \angle ADE = 30^\circ$ ，

$$\therefore BE = \frac{\sqrt{3}}{2} BD, \quad AE = \frac{1}{2} AD,$$

$$\therefore BE : EA = \frac{\sqrt{3}}{2} BD : \frac{1}{2} AD,$$

$$\text{又} \because BD = \sqrt{3} AD,$$

$$\therefore BE : AE = 3 : 1.$$

故填：3：1。

(4)  $BP=2PQ$ 。理由如下

$\because \triangle ABC$  为等边三角形。

$\therefore AB=AC$ ， $\angle BAC = \angle ACB = 60^\circ$ ，

$\because \angle ABE = \angle CAD$ ， $\angle BPQ$  为  $\triangle ABP$  外角，

$\therefore \angle BPQ = \angle ABE + \angle BAD$ 。

$\therefore \angle BPQ = \angle CAD + \angle BAD = \angle BAC = 60^\circ$

$\because BQ \perp AD$ ，

$\therefore \angle PBQ = 30^\circ$ ，

$\therefore BP = 2PQ$ 。

**总结提升：** 本题考查了等腰三角形的性质、等边三角形的性质以及含  $30^\circ$  角直角三角形的性质。直角三角形中  $30^\circ$  的锐角所对的直角边等于斜边的一半。

#### 模型四 直角三角形斜边中线

**【模型解读】** 当已知条件中同时出现直角三角形和中点时，常构造直角三角形斜边中线，然后利用直角三角形斜边的中线性质的性质解决问题。

基本图形：

---

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/766133033013011040>