

甘肃省会宁县第五中学 2023-2024 学年高考压轴卷数学试卷

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新答案; 不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 m, n 是两条不重合的直线, α, β 是两个不重合的平面, 下列命题正确的是 ()

A. 若 $m \perp \alpha$, $m \perp \beta$, $n \parallel \alpha$, $n \parallel \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

B. 若 $m \parallel n$, $m \perp \alpha$, $n \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

C. 若 $m \perp n$, $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

D. 若 $m \perp n$, $m \perp \alpha$, $n \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

2. 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, $3 + ai = b - (2a - 1)i$, 则 ()

A. $b = 3a$

B. $b = 6a$

C. $b = 9a$

D. $b = 12a$

3. 已知函数 $f(x) = 4\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, $x \in \left[0, \frac{13}{3}\pi\right]$, 若函数 $F(x) = f(x) - 3$ 的所有零点依次记为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, 且

$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$, 则 $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_{n-1} + x_n =$ ()

A. $\frac{50\pi}{3}$

B. 21π

C. $\frac{100\pi}{3}$

D. 42π

4. 直线 l 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点且与抛物线交于 A, B 两点, 则 $4|AF| + |BF|$ 的最小值是

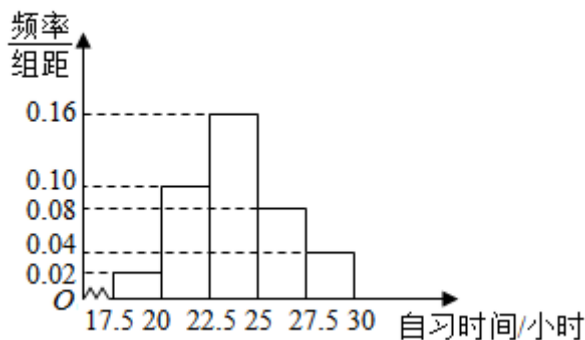
A. 10

B. 9

C. 8

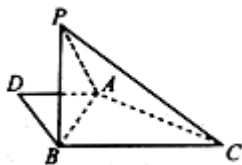
D. 7

5. 某学校调查了 200 名学生每周的自习时间 (单位: 小时), 制成了如图所示的频率分布直方图, 其中自习时间的范围是 $[17.5, 30]$, 样本数据分组为 $[17.5, 20)$, $[20, 22.5)$, $[22.5, 25)$, $[25, 27.5)$, $[27.5, 30]$. 根据直方图, 这 200 名学生中每周的自习时间不少于 22.5 小时的人数是 ()



- A. 56 B. 60 C. 140 D. 120

6. 如图，平面四边形 $ACBD$ 中， $AB \perp BC$ ， $AB = \sqrt{3}$ ， $BC = 2$ ， $\triangle ABD$ 为等边三角形，现将 $\triangle ABD$ 沿 AB 翻折，使点 D 移动至点 P ，且 $PB \perp BC$ ，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为（ ）



- A. 8π B. 6π C. 4π D. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

7. 已知 F_1 ， F_2 是椭圆与双曲线的公共焦点， P 是它们的一个公共点，且 $|PF_2| > |PF_1|$ ，椭圆的离心率为 e_1 ，双曲线的离心率为 e_2 ，若 $|PF_1| = |F_1F_2|$ ，则 $\frac{3}{e_1} + \frac{e_2}{3}$ 的最小值为（ ）

- A. $6 + 2\sqrt{3}$ B. $6 + 2\sqrt{2}$ C. 8 D. 6

8. 已知实数 x ， y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ x - 2y - 2 \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$ ，则目标函数 $z = \frac{y-2}{x+1}$ 的最小值为

- A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{5}{4}$
C. $-\frac{4}{3}$ D. $-\frac{1}{2}$

9. 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_5 a_6 = 3$ ，则 $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \dots + \log_3 a_{10} =$ （ ）

- A. $1 + \log_3 5$ B. 6 C. 4 D. 5

10. 下列四个结论中正确的个数是

(1) 对于命题 $p: \exists x_0 \in R$ 使得 $x_0^2 - 1 \leq 0$ ，则 $\neg p: \exists x \in R$ 都有 $x^2 - 1 > 0$ ；

(2) 已知 $X: N(2, \sigma^2)$, 则 $P(X > 2) = 0.5$

(3) 已知回归直线的斜率的估计值是 2, 样本点的中心为 (4,5), 则回归直线方程为 $\hat{y} = 2x - 3$;

(4) “ $x \geq 1$ ”是“ $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ”的充分不必要条件.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{(x-1)\pi}{2}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 2f(x-2), & 3 < x \leq 100 \end{cases}$, 若函数 $f(x)$ 的极大值点从小到大依次记为 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 并记相应的

极大值为 $b_1, b_2, \dots, b_n$, 则 $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$ 的值为 ()

A. $2^{50} + 2449$ B. $2^{50} + 2549$ C. $2^{49} + 2449$ D. $2^{49} + 2549$

12. 过直线 $x + y = 0$ 上一点 P 作圆 $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 2$ 的两条切线 l_1, l_2 , A, B 为切点, 当直线 l_1, l_2 关于直线 $x + y = 0$ 对称时, $\angle APB =$ ()

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 设 α, β 为互不重合的平面, m, n 是互不重合的直线, 给出下列四个命题:

- ①若 $m \parallel n$, 则 $m \parallel \alpha$;
- ②若 $m \subset \alpha, n \subset \alpha, m \parallel \beta, n \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$;
- ③若 $\alpha \parallel \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $m \parallel n$;
- ④若 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = m, n \subset \alpha, m \perp n$, 则 $n \perp \beta$;

其中正确命题的序号为_____.

14. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD = 3, AA_1 = AB = 4$, 则异面直线 A_1B 与 AC 所成角的余弦值为 ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

15. 函数 $f(x) = \frac{2 + \ln 2x}{x^2}$ 的图象在 $x = \frac{e}{2}$ 处的切线方程为_____.

16. 已知函数 $f(x) = -x^3 + \sin x$, 若 $f(a) = M$, 则 $f(-a) =$ _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 上顶点为 A , 直线 AF 与直线 $x + y - 3\sqrt{2} = 0$

垂直，垂足为 B，且点 A 是线段 BF 的中点.

(I) 求椭圆 C 的方程;

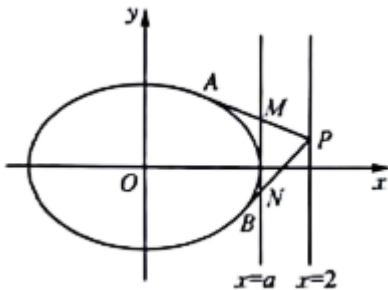
(II) 若 M, N 分别为椭圆 C 的左, 右顶点, P 是椭圆 C 上位于第一象限的一点, 直线 MP 与直线 $x=4$ 交于点 Q, 且 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{NQ} = 9$, 求点 P 的坐标.

18. (12 分) 已知数列的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_n = \frac{1}{2}S_n + 1 (n \in N^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \log_2 a_n$, $c_n = \frac{1}{b_n b_{n+1}}$, 且数列 $\{c_n\}$ 前 n 项和为 T_n , 求 T_n 的取值范围.

19. (12 分) 已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长半轴长为 $\sqrt{2}$, 点 $(1, e)$ (e 为椭圆 C 的离心率) 在椭圆 C 上.



(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 如图, P 为直线 $x=2$ 上任一点, 过点 P 椭圆 C 上点处的切线为 PA, PB, 切点分别 A, B, 直线 $x=a$ 与直线 PA, PB 分别交于 M, N 两点, 点 M, N 的纵坐标分别为 m, n , 求 mn 的值.

20. (12 分) 已知 F_1, F_2 为椭圆 E: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 离心率为 $\frac{1}{2}$, 点 $P(2, 3)$ 在椭圆上.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 过 F_1 的直线 l_1, l_2 分别交椭圆于 A, C 和 B, D, 且 $l_1 \perp l_2$, 问是否存在常数 λ , 使得 $\frac{1}{|AC|}, \lambda, \frac{1}{|BD|}$ 成等差数列?

若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.

21. (12 分) 已知 a, b 都是大于零的实数.

(1) 证明 $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$;

(2) 若 $a > b$, 证明 $a^2 + \frac{a}{b^3} + \frac{1}{a(a-b)} > 4$.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x \ln x$, 函数 $g(x) = x + \frac{a}{x} - (\ln x)^2$, 其中 $a \in R$, x_0 是 $g(x)$ 的一个极值点, 且 $g(x_0) = 2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性

(2) 求实数 x_0 和 a 的值

(3) 证明 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4k^2 - 1}} > \frac{1}{2} \ln(2n+1) \quad (n \in N^*)$

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

根据空间中线线、线面位置关系, 逐项判断即可得出结果.

【详解】

A 选项, 若 $m \perp \alpha$, $m \perp \beta$, $n \parallel \alpha$, $n \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$ 或 α 与 β 相交; 故 A 错;

B 选项, 若 $m \parallel n$, $m \perp \alpha$, 则 $n \perp \alpha$, 又 $n \perp \beta$, α, β 是两个不重合的平面, 则 $\alpha \parallel \beta$, 故 B 正确;

C 选项, 若 $m \perp n$, $m \subset \alpha$, 则 $n \subset \alpha$ 或 $n \parallel \alpha$ 或 n 与 α 相交, 又 $n \subset \beta$, α, β 是两个不重合的平面, 则 $\alpha \parallel \beta$ 或 α 与 β 相交; 故 C 错;

D 选项, 若 $m \perp n$, $m \perp \alpha$, 则 $n \subset \alpha$ 或 $n \parallel \alpha$ 或 n 与 α 相交, 又 $n \perp \beta$, α, β 是两个不重合的平面, 则 $\alpha \parallel \beta$ 或 α 与 β 相交; 故 D 错;

故选 B

【点睛】

本题主要考查与线面、线线相关的命题, 熟记线线、线面位置关系, 即可求解, 属于常考题型.

2、C

【解析】

两复数相等，实部与虚部对应相等.

【详解】

$$\text{由 } 3+ai=b-(2a-1)i,$$

$$\text{得 } \begin{cases} 3=b \\ a=1-2a \end{cases}, \text{ 即 } a=\frac{1}{3}, b=1.$$

$$\therefore b=9a.$$

故选: C.

【点睛】

本题考查复数的概念, 属于基础题.

3、C

【解析】

令 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 求出在 $\left[0, \frac{13}{3}\pi\right]$ 的对称轴, 由三角函数的对称性可得

$x_1 + x_2 = \frac{\pi}{3} \times 2, x_2 + x_3 = \frac{5\pi}{6} \times 2, \dots, x_{n-1} + x_n = \frac{23\pi}{6} \times 2$, 将式子相加并整理即可求得 $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_{n-1} + x_n$ 的值.

【详解】

令 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 得 $x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$, 即对称轴为 $x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

函数周期 $T = \pi$, 令 $\frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{13}{3}\pi$, 可得 $k = 8$. 则函数在 $x \in \left[0, \frac{13}{3}\pi\right]$ 上有 8 条对称轴.

根据正弦函数的性质可知 $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{3} \times 2, x_2 + x_3 = \frac{5\pi}{6} \times 2, \dots, x_{n-1} + x_n = \frac{23\pi}{6} \times 2$,

将以上各式相加得: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_{n-1} + x_n = \left(\frac{2\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{8\pi}{6} + \dots + \frac{23\pi}{6}\right) \times 2 = \frac{\pi}{3} \times \frac{(2+23) \times 8}{2} = \frac{100\pi}{3}$

故选:C.

【点睛】

本题考查了三角函数的对称性, 考查了三角函数的周期性, 考查了等差数列求和. 本题的难点是将所求的式子拆分为

$x_1 + x_2 + x_2 + x_3 + x_3 + x_4 + \dots + x_{n-1} + x_n$ 的形式.

4、B

【解析】

根据抛物线中过焦点的两段线段关系，可得 $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{p} = 1$ ；再由基本不等式可求得 $4|AF| + |BF|$ 的最小值.

【详解】

由抛物线标准方程可知 $p=2$

因为直线 l 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点，由过抛物线焦点的弦的性质可知

$$\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{p} = 1$$

所以 $4|AF| + |BF|$

$$= (4|AF| + |BF|) \cdot \left(\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} \right)$$

$$= 4 + 1 + \left(\frac{|BF|}{|AF|} + \frac{4|AF|}{|BF|} \right)$$

因为 $|AF|, |BF|$ 为线段长度，都大于 0，由基本不等式可知

$$4 + 1 + \left(\frac{|BF|}{|AF|} + \frac{4|AF|}{|BF|} \right) \geq 5 + 2\sqrt{\frac{|BF|}{|AF|} \times \frac{4|AF|}{|BF|}}$$

$$\geq 5 + 2 \times 2$$

$$\geq 9, \text{ 此时 } |BF| = 2|AF|$$

所以选 B

【点睛】

本题考查了抛物线的基本性质及其简单应用，基本不等式的用法，属于中档题.

5、C

【解析】

试题分析：由题意得，自习时间不少于 22.5 小时的频率为 $(0.16 + 0.08 + 0.04) \times 2.5 = 0.7$ ，故自习时间不少于 22.5 小时的频率为 $0.7 \times 200 = 140$ ，故选 C.

考点：频率分布直方图及其应用.

6、A

【解析】

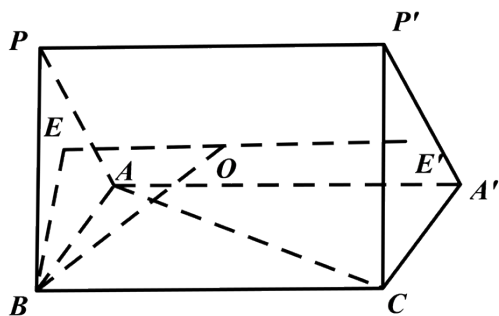
将三棱锥 $P-ABC$ 补形为如图所示的三棱柱，则它们的外接球相同，由此易知外接球球心 O 应在棱柱上下底面三角

形的外心连线上，在 $RtVOBE$ 中，计算半径 OB 即可.

【详解】

由 $AB \perp BC$ ， $PB \perp BC$ ，可知 $BC \perp$ 平面 PAB 。

将三棱锥 $P-ABC$ 补形为如图所示的三棱柱，则它们的外接球相同。



由此易知外接球球心 O 应在棱柱上下底面三角形的外心连线上，

记 $\triangle ABP$ 的外心为 E ，由 $\triangle ABD$ 为等边三角形，

可得 $BE = 1$ 。又 $OE = \frac{BC}{2} = 1$ ，故在 $Rt\triangle OBE$ 中， $OB = \sqrt{2}$ ，

此即为外接球半径，从而外接球表面积为 8π 。

故选：A

【点睛】

本题考查了三棱锥外接球的表面积，考查了学生空间想象，逻辑推理，综合分析，数学运算的能力，属于较难题。

7、C

【解析】

由椭圆的定义以及双曲线的定义、离心率公式化简 $\frac{3}{e_1} + \frac{e_2}{3}$ ，结合基本不等式即可求解。

【详解】

设椭圆的长半轴长为 a ，双曲线的半实轴长为 a' ，半焦距为 c ，

则 $e_1 = \frac{c}{a}$ ， $e_2 = \frac{c}{a'}$ ，设 $|PF_2| = m$

由椭圆的定义以及双曲线的定义可得：

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a \Rightarrow a = \frac{m}{2} + c, \quad |PF_2| - |PF_1| = 2a' \Rightarrow a' = \frac{m}{2} - c$$

$$\text{则 } \frac{3}{e_1} + \frac{e_2}{3} = \frac{3a}{c} + \frac{c}{3a'} = \frac{3\left(c + \frac{m}{2}\right)}{c} + \frac{c}{3\left(\frac{m}{2} - c\right)} = 6 + \frac{3\left(\frac{m}{2} - c\right)}{c} + \frac{c}{3\left(\frac{m}{2} - c\right)}$$

$$\geq 6 + 2\sqrt{\frac{3\left(\frac{m}{2}-c\right)}{c} \cdot \frac{c}{3\left(\frac{m}{2}-c\right)}} = 8$$

当且仅当 $a = \frac{7}{3}c$ 时，取等号.

故选：C.

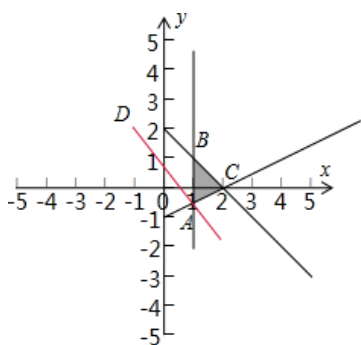
【点睛】

本题主要考查了椭圆的定义以及双曲线的定义、离心率公式，属于中等题.

8、B

【解析】

作出 inequality 组对应的平面区域，目标函数 $z = \frac{y-2}{x+1}$ 的几何意义为动点 $M(x, y)$ 到定点 $D(-1, 2)$ 的斜率，利用数形结合即可得到 z 的最小值.



【详解】

解：作出 inequality 组对应的平面区域如图：

目标函数 $z = \frac{y-2}{x+1}$ 的几何意义为动点 $M(x, y)$ 到定点 $D(-1, 2)$ 的斜率，

当 M 位于 $A\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ 时，此时 DA 的斜率最小，此时 $z_{\min} = \frac{-\frac{1}{2}-2}{1+1} = -\frac{5}{4}$.

故选 B.

【点睛】

本题主要考查线性规划的应用以及两点之间的斜率公式的计算，利用 z 的几何意义，通过数形结合是解决本题的关键.

9、D

【解析】

由对数运算法则和等比数列的性质计算.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/766233221221011042>