重庆市黔江中学校2023-2024学年高一下学期3月月考数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．在$\triangle ABC$中，若$\sin C=\frac{1}{3}$，$a=3$，$c=4$，则$\sin A=$（　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{1}{6}$

2．已知$\vec{a}$，$\vec{b}$是不共线的向量，$\overrightarrow{OA}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$，$\overrightarrow{OB}=3\vec{a}-2\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=2\vec{a}-3\vec{b}$，若$A,B,C$三点共线，则实数$\lambda$，$\mu$满足（　）

A．$\lambda=\mu-5$　　B．$\lambda=\mu+5$　　C．$\lambda=\mu-1$　　D．$\lambda=\mu+1$

3．在$\triangle ABC$中，点D在BC边上，且$BD=DC$，点E在AC边上，且$AE=\frac{4}{5}AC$，连接DE，若$\overrightarrow{DE}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，则$m+n=$（　）

A．$-\frac{1}{5}$　　B．$\frac{4}{5}$　　C．$-\frac{4}{5}$　　D．$\frac{1}{5}$

4．在$\triangle ABC$中，a，b，c分别为内角A，B，C的对边，若$a=2$，$b=3$，$\angle A=30°$，则解此三角形的结果有（　）

A．无解　　B．一解　　C．两解　　D．一解或两解

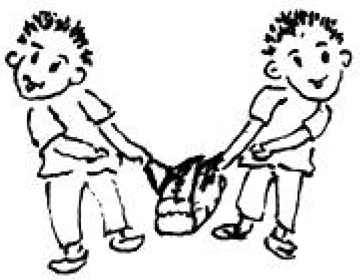
5．已知$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{2}{5}\sqrt{5}$，则$\tan\frac{\alpha}{2}$等于（　）

A．$2-\sqrt{5}$　　B．$2+\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{5}-2$　　D．$\pm(\sqrt{5}-2)$

6．已知三个单位向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}$，则$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}$的最小值为（　）

A．$-\frac{5}{2}$　　B．$-\frac{\sqrt{10}}{2}$　　C．$-\frac{3}{2}$　　D．$-\frac{\sqrt{11}}{2}$

7．在日常生活中，我们会看到如图所示的情境，两个人共提一个行李包.假设行李包所受重力为$\overrightarrow{G}$，作用在行李包上的两个拉力分别为$\overrightarrow{F_1}$，$\overrightarrow{F_2}$，且$|\overrightarrow{F_1}|=|\overrightarrow{F_2}|$，$\overrightarrow{F_1}$与$\overrightarrow{F_2}$的夹角为$\theta$，下列结论中正确的是（　）



A．θ越小越费力，θ越大越省力

B．θ的范围为$[0,\pi]$

C．当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，$|\vec{F_1}|=|\vec{G}|$

D．当$\theta=\frac{2\pi}{3}$时，$|\vec{F_1}|=|\vec{G}|$

8．在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$\frac{\sqrt{3}c}{a\cos B}=\tan A+\tan B$，下列结论正确的是（　）

A．$A=\frac{\pi}{6}$

B．当$a=2$，$c=4$时，$\triangle ABC$的面积为$4\sqrt{3}$

C．若AD是$\angle BAC$的角平分线，且$AD=2\sqrt{3}$，则$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$

D．当$b-c=\frac{\sqrt{3}a}{3}$时，$\triangle ABC$为直角三角形

二、多选题

9．有下列说法，其中正确的说法为（　）

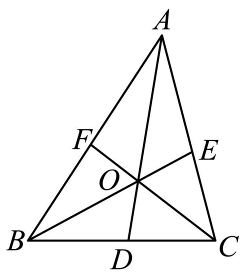
A．若$\vec{a}//\vec{b}$，$\vec{b}//\vec{c}$，则$\vec{a}//\vec{c}$

B．若$\vec{a}//\vec{b}$，则存在唯一实数λ使得$\vec{a}=\lambda\vec{b}$

C．两个非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，若$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$共线且反向

D．$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$是$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$是锐角的必要不充分条件

10．如图，M是$\triangle ABC$所在平面内任意一点，O是$\triangle ABC$的重心，则（　）



A．$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CF}$

B．$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MO}$

C．$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}$

D．$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}=0$

11．已知函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$，若$f(x)\le f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，则（　）

A．$\tan\left(\frac{\pi\omega}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

B．$f(x+2\pi)=f(x)$

C．$\omega\ge 1$

D．$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$上无最值

12．已知$\triangle ABC$中，$AB=1,AC=4,BC=\sqrt{13},D$在BC上，AD为$\angle BAC$的角平分线，E为AC中点，下列结论正确的是（　　）

A．$BE=\sqrt{3}$

B．$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$

C．$AD=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$

D．P在$\triangle ABE$的外接圆上，则$PB+2PE$的最大值为$2\sqrt{7}$

三、填空题

13．在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$B=\dfrac{\pi}{3},a=5,b=7,c=$__________.

14．已知$\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(2,-3)$，若$\vec{c}$满足$\vec{c}\perp(\vec{a}+\vec{b})$且$\vec{b}//(\vec{a}-\vec{c})$，则$\vec{c}=$___________.

15．由二维平面向量可以类比得到三维空间向量一些公式，比如若$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ 则$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$，$|\vec{a}|=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}$等.非零向量$\vec{a},\vec{b}$，若$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow \mathrm{\vec{a}}\cdot\mathrm{\vec{b}}$.若$\vec{a}=(2,3,-4)$，$\vec{b}=(2,-3,2)$，则与$\vec{a}$、$\vec{b}$向量垂直的单位向量的坐标是（写出一个即可）___________

16．$\triangle ABC$中，$a=7,b=5,c=3$，点P是$\triangle ABC$内切圆M上一点，且$\vec{AP}=x\vec{AB}+y\vec{AC}$，则$x+y$的最小值是_________.

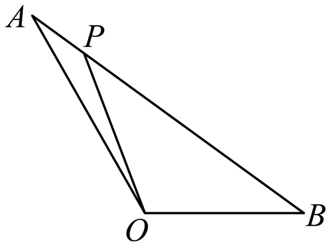
四、解答题

17．已知向量$\vec{a}=(2\sin x,1)$，$\vec{b}=(2\cos x,1)$，$x\in R$.

（1）当$x=\dfrac{\pi}{4}$时，求向量$\vec{a}+\vec{b}$的坐标；

（2）设函数$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$，将函数$f(x)$图象上所有点向左平移$\dfrac{\pi}{4}$个单位长度得到$g(x)$的图象，当$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时，求函数$g(x)$的最小值.

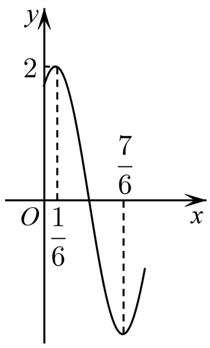
18．如图，在$\triangle OAB$中，P为线段AB上的一个动点（不含端点），且满足$\overline{AP}=\lambda\overline{PB}$.



(1)若$\lambda=\dfrac{1}{3}$，用向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$表示$\overrightarrow{OP}$；

(2)若$\left|\overrightarrow{OA}\right|=6,\left|\overrightarrow{OB}\right|=2$，且$\angle AOB=120^\circ$，求$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}$的取值范围.

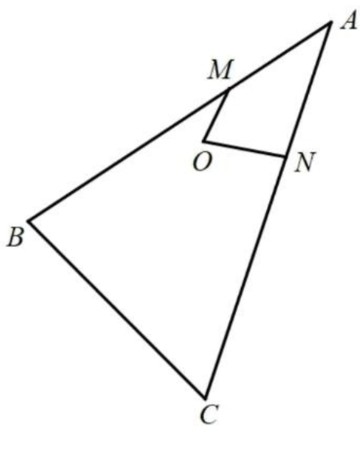
19．已知函数$f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示.



(1)求函数$f\left(x\right)$的解析式；

(2)求方程$f\left(x\right)=-\dfrac{1}{2}$在区间$\left[0,4\right]$内的所有实数根之和.

20．在如图所示的平面图形中，$OM=1,ON=2$，$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA},\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{NA}$，求：

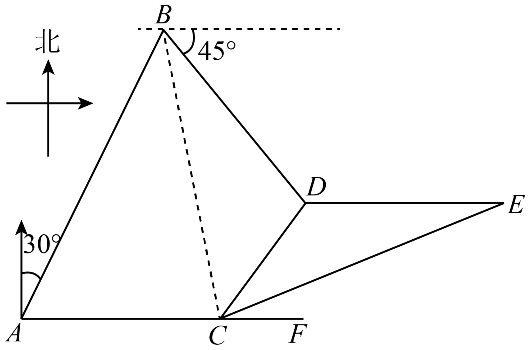


(1)设$\overrightarrow{BC}=x\overrightarrow{OM}+y\overrightarrow{ON}$，求$x+y$的值；

(2)若$OM\parallel CN$且$\angle MON\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right]$，求$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}$的最小值.

21．如图，某巡逻艇在A处发现北偏东30°相距$\sqrt{6}+\sqrt{2}$海里的B处有一艘走私船，正沿东偏南45°的方向以3海里/小时的速度向我海岸行驶，巡逻艇立即以$2\sqrt{2}$海里/小时的速度沿着正东方向直线追去，1小时后，巡逻艇到达C处，走私船到达D处，此时走

私船发现了巡逻艇，立即改变航向，以原速向正东方向逃窜，巡逻艇立即加速以$3\sqrt{2}$海里/小时的速度沿着直线追击



(1)当走私船发现了巡逻艇时，两船相距多少海里

(2)问巡逻艇应该沿什么方向去追，才能最快追上走私船

22．在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别是a、b、c.且$\dfrac{2\sin A-\sin C}{\sin C}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{a^2+c^2-b^2}$.

(1)求$\sin A+\sin C$的取值范围；

(2)若$C=\dfrac{\pi}{2}$，$BC=2$，O为BC中点，P为线段AO上一点，且满足$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=0$.求$AP$的值，并求此时$\triangle BPC$的面积S.

参考答案：

1．B

【分析】

由正弦定理求解可得.

【详解】由正弦定理可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

$\therefore \sin A=\frac{a\sin C}{c}=\frac{3\times\frac{1}{3}}{4}=\frac{1}{4}$.

故选：B.

2．B

【解析】根据向量的线性运算方法，分别求得$\overrightarrow{AB}=(3-\lambda)\vec{a}-(2+\mu)\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=-\vec{a}-\vec{b}$；

再由$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{BC}$，得到$3-\lambda=-(2+\mu)$，即可求解.

【详解】由$\overrightarrow{OA}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$，$\overrightarrow{OB}=3\vec{a}-2\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=2\vec{a}-3\vec{b}$，

可得$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3-\lambda)\vec{a}-(2+\mu)\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-\vec{a}-\vec{b}$；

若A,B,C三点共线，则$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{BC}$，可得$3-\lambda=-(2+\mu)$，化简得$\lambda=\mu+5$.

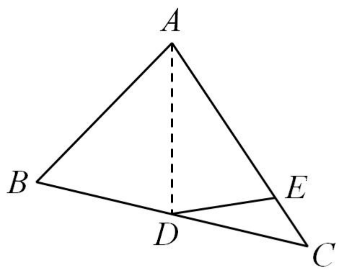
故选：B.

3．A

【分析】

由已知结合向量的线性表示及平面向量基本定理可求m，n，进而可求$m+n$.

【详解】解：如图，连接AD



则$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{10}\overrightarrow{AC}$，

$\therefore m=-\frac{1}{2}$，$n=\frac{3}{10}$，则$m+n=-\frac{1}{5}$.

故选：A.

4．C

【分析】

根据题意作出图形，推得$CD<BC<AC$，从而得到圆C与射线AE有两个交点，进而得到满足题意的三角形有两个，由此得解.

【详解】依题意，作出$\angle A=30°$，$AC=b=3$，B落在射线AE上，过C作$CD\perp AE$于D，如图，

则在$\mathrm{Rt}\triangle ACD$中，由正弦定理$\frac{CD}{\sin A}=\frac{AC}{\sin\angle CDA}$，得$CD=\frac{AC\sin A}{\sin\angle CDA}=\frac{3\times\sin 30°}{\sin 90°}=\frac{3}{2}$，

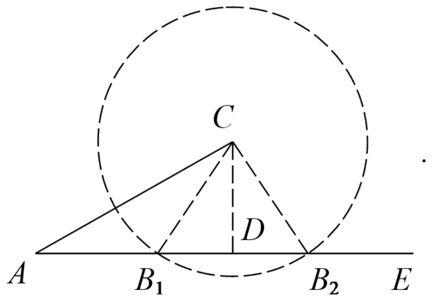
因为$BC=a=2$，所以$CD<BC<AC$，

故以C为圆心，半径为2的圆C与射线AE相交，即有两个交点B_1,B_2，

显然，这个两交点B_1,B_2都可以作为点B，与A,C构造$\triangle ABC$，且$BC=2$，

所以满足题意的三角形有两个，即解此三角形的结果有两解.

故选：C.



5．C

【分析】应用半角正切公式即可求值，注意法二：$\frac{\alpha}{2}$正切值的符号.

【详解】方法一：$\because\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\sqrt{5}-2$.

方法二：$\because\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}>0$，$\cos\alpha=\frac{2}{5}\sqrt{5}>0$，

$\therefore\alpha$的终边落在第一象限，$\frac{\alpha}{2}$的终边落在第一或第三象限，即$\tan\frac{\alpha}{2}>0$，

$$\therefore\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}}=\sqrt{5}-2$$

故选：C

6．B

【分析】

由题意可得$|\vec{a}+\vec{b}|=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，设$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{c}$所成的角为$\theta$，则有$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\cos\theta$，根据$\theta\in[0,\pi]$求解即可.

【详解】解：由题意可得$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，

又因为$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{4}$，

所以$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，

设$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{c}$所成的角为θ，

则$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\cos\theta$，

又因为$\theta\in[0,\pi]$，

所以$\cos\theta\in[-1,1]$，

所以$\dfrac{\sqrt{10}}{2}\cos\theta\in[-\dfrac{\sqrt{10}}{2},\dfrac{\sqrt{10}}{2}]$，

即$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}\in[-\dfrac{\sqrt{10}}{2},\dfrac{\sqrt{10}}{2}]$，

所以$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}$的最小值为$-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

故选：B.

7．D

【分析】根据$\left|\vec{G}\right|=\left|\vec{F_1}+\vec{F_2}\right|$为定值，求出$\left|\vec{F_1}\right|^2=\dfrac{\left|\vec{G}\right|^2}{2(1+\cos\theta)}$，再对选项进行分析、判断即可.

【详解】解：对A，$\because\left|\vec{G}\right|=\left|\vec{F_1}+\vec{F_2}\right|$为定值，

$\therefore\left|\vec{G}\right|^2=\left|\vec{F_1}\right|^2+\left|\vec{F_2}\right|^2+2\left|\vec{F_1}\right|\times\left|\vec{F_2}\right|\times\cos\theta=2\left|\vec{F_1}\right|^2(1+\cos\theta)$，

解得：$\left|\vec{F_1}\right|^2=\dfrac{\left|\vec{G}\right|^2}{2(1+\cos\theta)}$；

由题意知：$\theta\in(0,\pi)$时，$y=\cos\theta$单调递减，

$\therefore\left|\vec{F_1}\right|^2$单调递增，

即θ越大越费力，θ越小越省力，故A错误；

对B，当$\theta=\pi$时，$\vec{F_1}+\vec{F_2}=\vec{0}$不满足题意，故B错误；

对 C，当$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，$\left|\overrightarrow{F_1}\right|^2=\dfrac{\left|\overrightarrow{G}\right|^2}{2}$，

$\therefore\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left|\overrightarrow{G}\right|$，故 C 错误；

对 D，当$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$时，$\left|\overrightarrow{F_1}\right|^2=\left|\overrightarrow{G}\right|^2$，

$\therefore\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{G}\right|$，故 D 正确.

故选：D.

8．D

【分析】

选项 A：先用正弦定理得$\dfrac{\sqrt{3}\sin C}{\sin A\cos B}=\tan A+\tan B$，再利用三角恒等变换，求出$A=\dfrac{\pi}{3}$，即可；选项 B：直接解三角，发现无解即可；选项 C：利用等面积法，的到b,c的关系即可；选项 D：利用正弦定理得$\sin B-\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin A=\dfrac{1}{2}$，然后利用三角形角的关系，计算出各个角的大小即可.

【详解】

选项 A:因为$\dfrac{\sqrt{3}c}{a\cos B}=\tan A+\tan B$，

由正弦定理可得$\dfrac{\sqrt{3}\sin C}{\sin A\cos B}=\tan A+\tan B$，

又因为$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

所以$\dfrac{\sqrt{3}(\sin A\cos B+\cos A\sin B)}{\sin A\cos B}=\tan A+\tan B$，

化简可得$\dfrac{\sqrt{3}(\tan A+\tan B)}{\tan A}=\tan A+\tan B$，因为$\dfrac{\sqrt{3}c}{a\cos B}=\tan A+\tan B$，所以$\tan A+\tan B\neq 0$

可得$\tan A=\sqrt{3}$，$A\in(0,\pi)$，故$A=\dfrac{\pi}{3}$，选项 A 错误；

选项 B：当$a=2$，$c=4$时，由选项 A，得$A=\dfrac{\pi}{3}$，因为$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

可得$b^2-4b+12=0$，无解，故此时三角形不存在，选项 B 错误；

选项 C：因为若AD是$\angle BAC$的角平分线，且$AD=2\sqrt{3}$，由选项 A，得$A=\dfrac{\pi}{3}$

故$\angle BAD=\angle CAD=\dfrac{\pi}{6}$，而$S_{\triangle BAD}+S_{\triangle CAD}=S_{\triangle ABC}$

得$\dfrac{1}{2}c\times 2\sqrt{3}\times\sin\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}b\times 2\sqrt{3}\times\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{\pi}{3}$，