

专题 压轴题

热点研究

专题热度	★★★★★
命题热点	1. 综合与实践 2. 阅读与理解 3. 函数与图象 4. 几何图形综合
热门方法	建立数学模型、方程思想、函数思想、数形结合思想
热点题型	解答题

热点突破

热点1 综合与实践

名师点拨

善于将函数问题转化为方程问题,善于利用几何图形的有关性质、定理和二次函数的知识,注意挖掘题目中的隐含条件.

题目 1 (2023 秋·北流市期末) 综合与实践

【问题背景】以函数的角度来看待和解决问题.

(1) 通过观察以下一位数的积: $1 \times 9, 2 \times 8, \dots, 8 \times 2, 9 \times 1$. 其中每个式子中的两数之和为 10, 推测在这些式子中, 乘积最大的算式是 5×5 . (只需填符合的算式, 不需要算出结果)

(2) 通过观察以下两位数的积: $11 \times 19, 12 \times 18, \dots, 18 \times 12, 19 \times 11$. 其中每个式子中的两数之和为 30, 推测在这些式子中, 乘积最大的算式是 15×15 . (只需填符合的算式, 不需要算出结果)

【初步探讨】以问题 (2) 为例, 设第一个数为 x , 写出你对问题 (2) 的猜想 (包括条件和结论). 尝试用二次函数的知识证明你对问题 (2) 的猜想.

【实践应用】(3) 物理电路理论知识中有以下几个结论: 串联电路的总电阻等于各串联电阻之和; 并联电路总电阻的倒数等于各并联电阻的倒数之和; 电压一定的情况下, 电流与电阻成反比关系. 在如图 1 所示的电路中, $R_1 = 2\Omega, R_2 = 3\Omega$, 滑动变阻器的最大电阻 $R_3 = 5\Omega$, 其等效电路图如图 2 所示, 其中 $R_{ap} + R_{bp} = R_3$, 在滑片从 a 端滑到 b 端的过程中, 设 $R_{ap} = x\Omega$, 请你结合电路知识以及函数知识来说明, 当两支路的电阻相等时, 电流表示数最小, 并求出电流表示数的最小值.

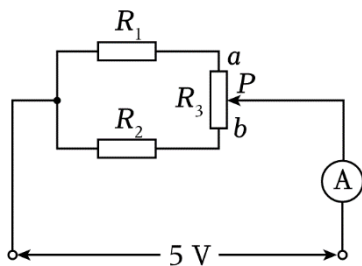


图1

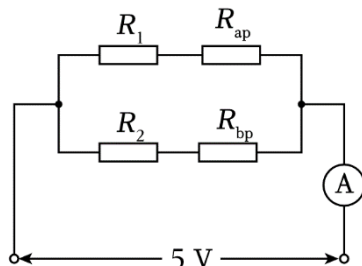


图2

题目 2 (2024·青山湖区模拟) 综合与实践

问题提出

某兴趣小组开展综合实践活动:在正方形 $ABCD$ 中, $BC=4$, 动点 P 以每秒 1 个单位的速度从 B 点出发匀速运动, 到达点 C 时停止, 作 AP 的垂线交 CD 于 M , 连接 AM , 设点 P 的运动时间为 t s, $Rt\triangle ADM$ 的面积为 S , 探究 S 与 t 的关系.

初步感知

(1) 如图 1, 当点 P 由 B 点向 C 点运动时,

①当 $t=3$ s 时, $CM=\frac{3}{4}$, $S=$ _____;

②经探究发现 S 是关于 t 的二次函数, 请写出 S 关于 t 的函数解析式为 _____; 自变量取值范围为 _____;

(2) 根据所给的已知, 完成列表中的填空, 并在图 3 的坐标系中绘制出函数的图象;

t	...	0	1	2	3	4	...
S	...	8				8	...

延伸探究

(3) ①当 $t=$ _____ 时, $S=7$;

②当 $\triangle ABP$ 的面积为 S 的一半时, 求 t 的值.

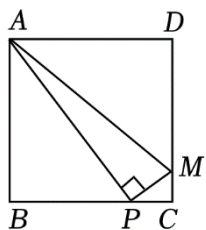


图1

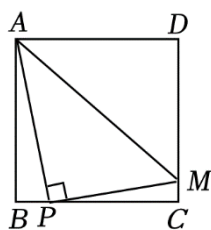


图2

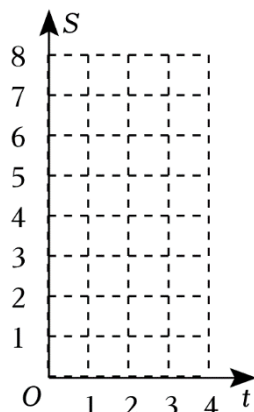


图3

题目 3 (2024·青秀区校级开学) 综合与实践

一个数学兴趣小组在上综合与实践课时发现:在大自然里,存在很多数学的奥秘,一片美丽的心形叶子、刚生长出的幼苗的部分轮廓线,可以近似的看作由抛物线的一部分沿直线折叠而成,如图1与图2所示.



图1



图2

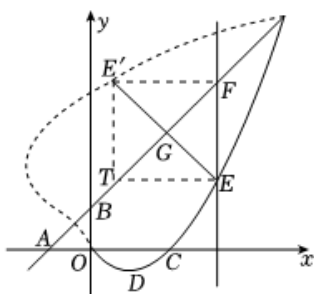


图3

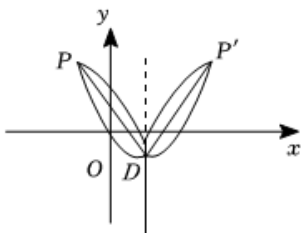


图4

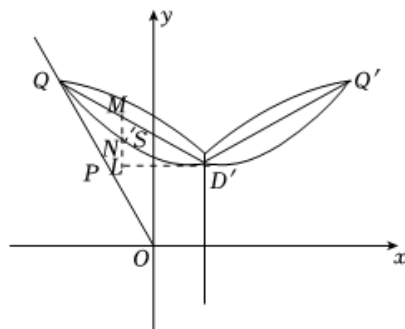


图5

【问题发现】如图3,为了确定一片心形叶子的形状,建立平面直角坐标系,发现心形叶子下部轮廓线可以看作是二次函数 $y = mx^2 - 4mx - 20m + 5$ 图象的一部分,且过原点,求这个抛物线的表达式及顶点 D 的坐标.

【问题探究】如图3,心形叶片的对称轴直线 $y = x + 2$ 与坐标轴交于 A, B 两点,直线 $x = 6$ 分别交抛物线和直线 AB 于点 E, F ,点 E, E' 是叶片上的一对对称点, EE' 交直线 AB 于点 G . 求叶片此处的宽度 EE' 的长.

【拓展应用】兴趣小组同学在观察某种幼苗生长的过程中,发现幼苗叶片下方轮廓线也可以看作是二次函数 $y = mx^2 - 4mx - 20m + 5$ 图象的一部分,如图4,幼苗叶片下方轮廓线正好对应【问题发现】中的二次函数. 若直线 PD 与水平线的夹角为 45° ,三天后,点 D 长到与点 P 同一水平位置的点 D' 时,叶尖 Q 落在射线 OP 上(如图5所示). 求此时一片幼苗叶子的长度.

题目 4 (2024•兴化市开学) 综合与实践:

问题情境

小莹妈妈的花卉超市以 15 元 / 盆的价格新购进了某种盆栽花卉,为了确定售价,小莹帮妈妈调查了附近 A, B, C, D, E 五家花卉店近期该种盆栽花卉的售价 x 与日销售量 y 情况,记录如下:

	售价 (元 / 盆)	日销售量 (盆)
A	20	50
B	30	30
C	18	54
D	22	46
E	26	38

数据整理:

(1) 请将以上调查数据按照一定顺序重新整理,填写在下表中:

售价 (元 / 盆)	<u>18</u>				
日销售量 (盆)					

模型建立

(2) 分析数据的变化规律,探究出日销售量 y 与售价 x 之间的关系式.

拓广应用

(3) 根据以上信息,小莹妈妈在销售该种花卉中.

- ①要想每天获得 400 元的利润,应如何定价?
- ②售价定为多少时,每天能够获得最大利润?

题目 5 (2023 秋·庆云县期末) 综合与实践

如图1,某兴趣小组计划开垦一个面积为 $8m^2$ 的矩形地块 $ABCD$ 种植农作物,地块一边靠墙(墙足够长),另外三边用木栏围住,木栏总长为 $a m^2$.

【问题提出】

小组同学提出这样一个问题:若 $a = 10m$,能否围出矩形地块?

【问题探究】

小颖尝试从“函数图象”的角度解决这个问题:

设 AB 为 $x m$, BC 为 $y m$. 由矩形地块面积为 $8m^2$,得到 $xy = 8$,满足条件的 (x, y) 可看成是反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 的图象在第一象限内点的坐标;木栏总长为 $10m$,得到 $2x + y = 10$,满足条件的 (x, y) 可看成一次函数 $y = -2x + 10$ 的图象在第一象限内点的坐标,同时满足这两个条件的 (x, y) 就可以看成两个函数图象交点的坐标.

如图2,反比例函数 $y = \frac{8}{x} (x > 0)$ 的图象与直线 $l_1: y = -2x + 10$ 的交点坐标为 $(1, 8)$ 和 $(4, 2)$, 因此,木栏总长为 $10m$ 时,能围出矩形地块,分别为: $AB = 1m$, $BC = 8m$; 或 $AB = \underline{\hspace{2cm}} m$, $BC = \underline{\hspace{2cm}} m$.

(1) 根据小颖的分析思路,完成上面的填空.

【类比探究】

(2) 若 $a = 6m$,能否围出矩形地块? 请仿照小颖的方法说明理由.

【问题解决】

(3) 求当木栏总长 a 为多少时? 面积为 $8m^2$ 的矩形地块 $ABCD$ 满足 $AB = BC$.

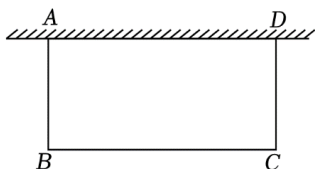


图1

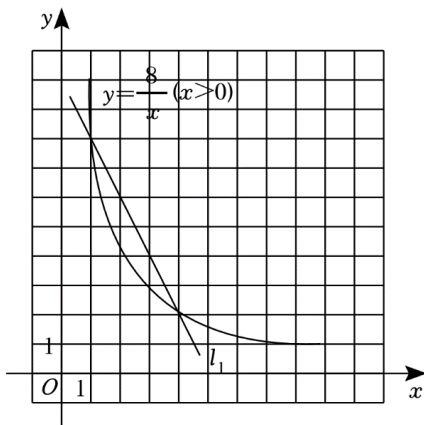


图2

热点2 阅读与理解

名师点拨

结合实际问题来解决,生活中的一些数学常识要了解.

题目 6 (2024·高平市一模) 阅读以下材料,并按要求完成相应的任务.

数学对物理学的发展起着重要的作用,物理学也对数学的发展起着重要的作用,莫尔斯所说:“数学是数学,物理是物理,但物理可以通过数学的抽象而受益,而数学则可以通过物理的见识而受益.”

以下是数学中常见的一个问题:

若 $a+b=2$, 则 ab 的最大值是多少?

设 $a=1+x$, $b=1-x$, 则 $ab=(1+x)(1-x)=1-x^2=-x^2+1$.

.....

以下是物理中的一个问题:

物理学中的电路分为串联电路和并联电路;已知电路中有大小分别为 R_1 和 R_2 的两个电阻,串联电路的电阻公式为 $R=R_1+R_2$,并联电路的电阻公式为 $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$. 在某一段电路上测得两个电阻的和为 $15k\Omega$,若根据实际需要把这两个电阻并联在一起,则并联后总电阻的最大值是多少?

任务:

- (1) 按照上面的解题思路,完成数学问题的剩余部分.
- (2) 若 a, b 两数的和为定值,则 a, b 满足 $\underline{a=b}$ 时, ab 的值最大.
- (3) 解决这个物理问题主要体现的数学思想是 $\underline{\hspace{2cm}}$. (填序号即可)
A. 统计思想 B. 分类思想 C. 模型思想
- (4) 物理问题中并联后总电阻的最大值是 $\underline{\hspace{2cm}} k\Omega$.

题目 7 (2024·曲阜市校级一模) 阅读新知

一般地,如果一个数列从第2项起,每一项与它的前一项的比等于同一个非零常数,这个数列就叫做等比数列. 这个常数叫做等比数列的公比,公比通常用字母 q 表示($q \neq 0$).

即:在数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ (n 为正整数)中,若 $\frac{a_2}{a_1} = q, \frac{a_3}{a_2} = q, \dots$,则数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ (n 为正整数)叫做等比数列. 其中 a_1 叫数列的首项, a_2 叫第二项, $\dots, a_n$ 叫第 n 项, q 叫做数列的公比.

例如:数列 $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ 是等比数列,公比 $q = 2$.

计算:求等比数列 $1, 3, 3^2, 3^3, \dots, 3^{100}$ 的和.

题目 8 (2023·大同模拟) (1) 计算: $(-5)^2 - |-3| + (-2)^3 - \left(\frac{1}{3}\right) - 3| + (-2)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$;

(2) 下面是小明化简分式 $\frac{2}{x^2-1} - \frac{x-1}{x^2-2x+1}$ 的过程,请认真阅读并完成相应任务:

$$\begin{aligned} \text{解:原式} &= \frac{2}{(x+1)(x-1)} - \frac{x-1}{(x-1)^2} \dots \text{第一步} \\ &= \frac{2}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{x-1} \dots \text{第二步} \\ &= \frac{2}{(x+1)(x-1)} - \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} \dots \text{第三步} \\ &= \frac{2-x+1}{(x+1)(x-1)} \dots \text{第四步} \\ &= \frac{3-x}{(x+1)(x-1)} \dots \text{第五步} \end{aligned}$$

【任务一】填空:

①以上化简步骤中,第一步变形使用的方法是 _____;

②第 _____ 步是进行分式的通分,通分的依据是 _____;

③第 _____ 步开始出现错误.

【任务二】请直接写出正确的化简结果: _____.

题目 9 (2023·微山县一模) 阅读材料:一般地,若 $a^x=N(a>0, a\neq 1)$, 则 x 叫做以 a 为底 N 的对数, 记作: $x=\log_a N$. 比如指数式 $2^4=16$ 可以转化为 $4=\log_2 16$, 对数式 $2=\log_5 25$ 可以转化为 $5^2=25$. 我们根据对数的定义可得到对数的一个性质: $\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N(a>0, a\neq 1, M>0, N>0)$; 理由如下: 设 $\log_a M=m, \log_a N=n$, 则 $M=a^m, N=a^n, \therefore M\cdot N=a^m\cdot a^n=a^{m+n}$, 由对数的定义得 $m+n=\log_a(M\cdot N)$. 又 $\therefore m+n=\log_a M+\log_a N, \therefore \log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$.

解决问题: (1) 将指数 $4^3=64$ 转化为对数式 $\underline{\hspace{1cm}} 3=\log_4 64 \underline{\hspace{1cm}}$;

(2) 证明 $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N(a>0, a\neq 1, M>0, N>0)$;

拓展运用: (3) 计算: $\log_3 2+\log_3 6-\log_3 4$.

题目 10 (2023·平顶山模拟) 阅读材料:北师大版七年级下册教材 24 页为大家介绍了杨辉三角.

杨辉三角

如果将 $(a+b)^n$ (n 为非负整数) 的展开式的每一项按字母 a 的次数由大到小排列, 就可以得到下面的等式:

$(a+b)^0=1$, 它只有一项, 系数为 1;

$(a+b)^1=a+b$, 它有两项, 系数分别为 1, 1;

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, 它有三项, 系数分别为 1, 2, 1;

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, 它有四项, 系数分别为 1, 3, 3, 1;

将上述每个式子的各项系数排成该表.

观察该表, 可以发现每一行的首末都是 1, 并且下一行的数比上一行多 1 个, 中间各数都写在上一行两数的中间, 且等于它们的和. 按照这个规律可以将这个表继续往下写.

该表在我国宋朝数学家杨辉 1261 年的著作《详解九章算法》中提到过, 而他是摘录自北宋时期数学家贾宪著的《开方作法本源》中的“开方作法本源图”, 因而人们把这个表叫做杨辉三角或贾宪三角, 在欧洲这个表叫做帕斯卡三角形. 帕斯卡 (B. Pascal, 1623—1662) 是 1654 年发现这一规律的, 比杨辉要迟 393 年, 比贾宪迟 600 年.

	1			
	1	1		
	1	2	1	
1	3	3	1	

(1) 应用规律:

①直接写出 $(a+b)^4$ 的展开式, $(a+b)^4=\underline{\hspace{1cm}} a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \underline{\hspace{1cm}}$;

② $(a+b)^6$ 的展开式中共有 项, 所有项的系数和为 ;

(2) 代数推理:

已知 m 为整数, 求证: $(m+3)^3-(m-3)^3$ 能被 18 整除.

热点3 函数与图象

名师点拨

(1) 将函数知识与方程、几何知识有机地结合在一起. 这类试题一般难度较大. 解这类问题关键是善于将函数问题转化为方程问题, 善于利用几何图形的有关性质、定理和二次函数的知识, 并注意挖掘题目中的一些隐含条件.

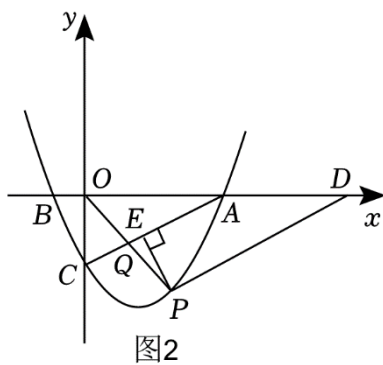
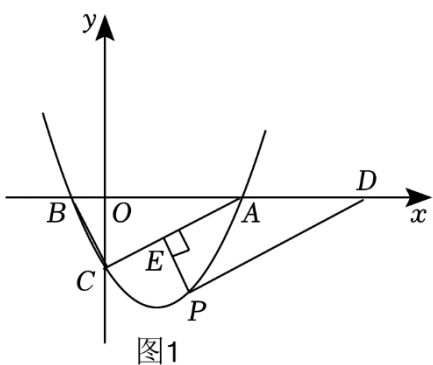
(2) 从实际问题中分析变量之间的关系, 建立二次函数模型. 关键在于观察、分析、创建, 建立直角坐标系下的二次函数图象, 然后数形结合解决问题, 需要注意的是自变量及函数的取值范围要使实际问题有意义.

题目 11 (2024·潼南区一模) 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 2$ 与 x 轴交于点 $A(4, 0)$ 和点 $B(-1, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 连接 AC 、 BC .

(1) 求抛物线的表达式.

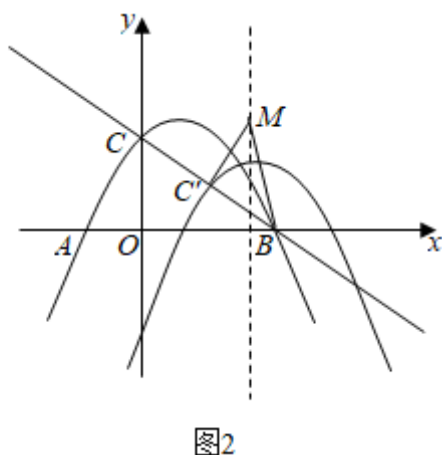
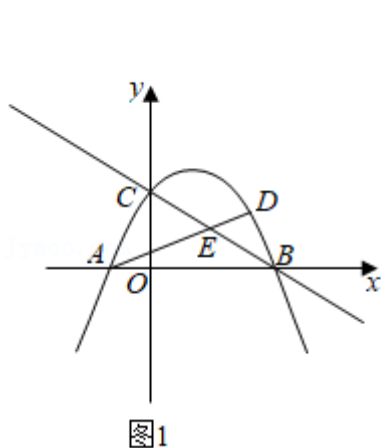
(2) 如图1, 点 P 是直线 AC 下方抛物线上的一动点, 过点 P 作直线 $PD \parallel AC$ 交 x 轴于点 D , 过点 P 作 $PE \perp AC$ 于点 E , 求出 $\frac{\sqrt{5}}{2}PE + AD$ 的最大值及此时点 P 的坐标.

(3) 如图2, 在(2)的条件下, 连接 OP 交 AC 于点 Q , 将原抛物线沿射线 CA 方向平移 $\sqrt{5}$ 个单位得到新抛物线 y_1 在新抛物线 y_1 上存在一点 M , 使 $\angle OQC - \angle MAC = \angle BCO$, 请直接写出所有符合条件的点 M 的横坐标.



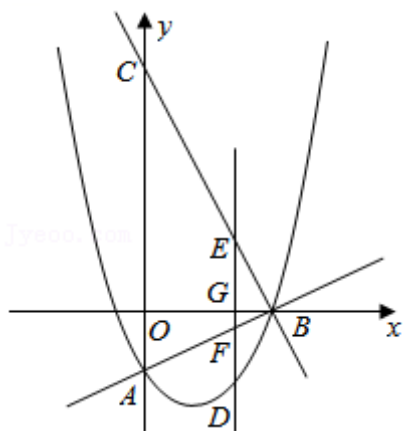
题目 12 (2024·渠县校级一模) 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + c$ 与 y 轴交于点 C , 与 x 轴交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 其中 $A(-\sqrt{3}, 0)$, $\tan \angle ACO = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

- (1) 求抛物线的解析式;
- (2) 如图 1, 点 D 为直线 BC 上方抛物线上一点, 连接 AD , BC 交于点 E , 连接 BD , 记 $\triangle BDE$ 的面积为 S_1 , $\triangle ABE$ 的面积为 S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值;
- (3) 如图 2, 将抛物线沿射线 CB 方向平移, 点 C 平移至 C' 处, 且 $OC' = OC$, 动点 M 在平移后抛物线的对称轴上, 当 $\triangle C'BM$ 为以 $C'B$ 为腰的等腰三角形时, 请直接写出点 M 的坐标.



题目 13 (2024·铜山区模拟) 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与坐标轴交于 $A(0, -2)$, $B(4, 0)$ 两点, 直线 $BC: y = -2x + 8$ 交 y 轴于点 C . 点 D 为直线 AB 下方抛物线上一动点, 过点 D 作 x 轴的垂线, 垂足为 G , DG 分别交直线 BC , AB 于点 E, F .

- (1) 求 b 和 c 的值;
- (2) 当 $GF = \frac{1}{2}$ 时, 连接 BD , 求 $\triangle BDF$ 的面积;
- (3) H 是 y 轴上一点, 当四边形 $BEHF$ 是矩形时, 求点 H 的坐标.



题目 14 (2022·镇海区校级模拟) 如图, 直线 $y = \frac{3}{2}x$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 交于 A 、 B 两点, M 是第一象限内的双曲线上任意一点.

- (1) 若点 A 坐标为 $(2, 3)$, $\angle AMB = 90^\circ$, 求 M 点坐标.
- (2) 若 $\angle ABM = 45^\circ$, 连接 BM , 若 $\triangle ABM$ 的面积是 34, 求 k 值.
- (3) 设直线 AM 、 BM 分别与 x 轴相交于 P 、 Q 两点, 且 $MA = pMP$, $MB = qMQ$, 求 $q - p$ 的值.

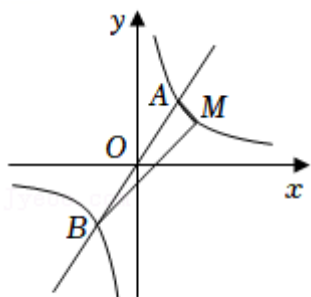


图1

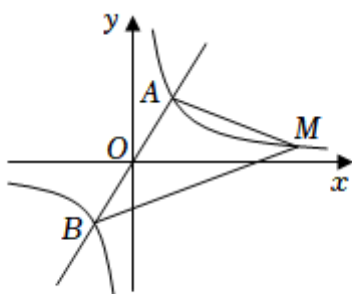


图2

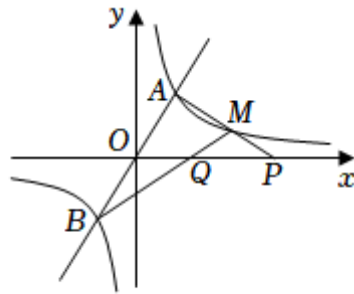
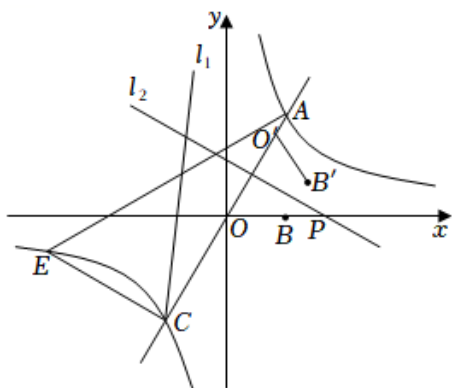


图3

题目 15 (2022·青白江区模拟) 如图, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象与正比例函数 $y = mx$ 的图象交于 A 、 C 两点, 其中点 A 的坐标为 $(2, 2\sqrt{3})$.

- (1) 求反比例函数及正比例函数的解析式;
- (2) 点 E 是反比例函数第三象限图象上一点, 且 $EC \perp AC$, 过点 C 的直线 l_1 与线段 AE 相交, 点 A , 点 E 到直线的距离分别为 d_1 , d_2 , 试求 $d_1 + d_2$ 的最大值;
- (3) 点 $B(2, 0)$, 在 x 轴上取一点 $P(t, 0)$ ($t > 2$), 过点 P 作直线 OA 的垂线 l_2 , 以直线 l_2 为对称轴, 线段 OB 经轴对称变换后得到 $O'B'$, 当 $O'B'$ 与双曲线有交点时, 求 t 的取值范围.



热点4 几何图形综合

名师点拨

涉及到的知识点比较多,考查平行四边形、菱形、矩形、正方形等,经常与二次函数和圆一起出现,综合性比较强. 考查垂径定理、圆周角定理、切线长定理、扇形的面积和弧长,经常与四边形一起,难度比较大.

题目 16 (2024· 泰山区校级模拟) 如图,等腰 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $AB=AC$,连结 OC ,过点 B 作 AC 的垂线,交 $\odot O$ 于点 D ,交 OC 于点 M ,交 AC 于点 E ,连结 AD .

- (1) 若 $\angle D = \alpha$,请用含 α 的代数式表示 $\angle OCA$;
- (2) 求证: $CE^2 = EM \cdot EB$;
- (3) 连接 CD ,若 $BM = 4$, $DM = 3$,求 $\tan \angle BAC$ 的值及四边形 $ABCD$ 的面积与 $\triangle BMC$ 面积的比值.

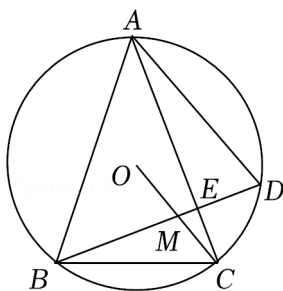


图1

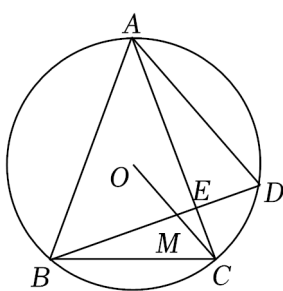


图2

题目 17 (2023· 越秀区模拟) 平行四边形 $ABCD$ 中,点 E 在边 BC 上,连 AE ,点 F 在线段 AE 上,连 BF ,连 AC .

- (1) 如图1,已知 $AB \perp AC$,点 E 为 BC 中点, $BF \perp AE$. 若 $AE = 5$, $BF = 2\sqrt{6}$,求 AF 的长度;
- (2) 如图2,已知 $AB = AE$, $\angle BFE = \angle BAC$,将射线 AE 沿 AC 翻折交 CD 于 H ,过点 C 作 $CG \perp AC$ 交 AH 于点 G . 若 $\angle ACB = 45^\circ$,求证: $AF + AE = AG$;
- (3) 如图3,已知 $AB \perp AC$,若 $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = 2$,直接写出 $AF + BF + CF$ 的最小值.

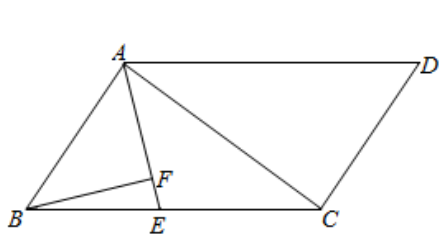


图1

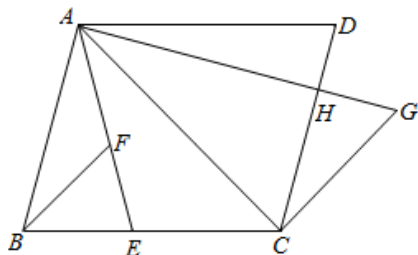


图2

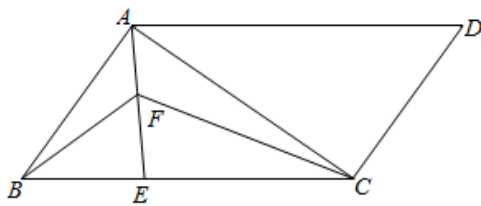


图3

题目 18 (2023·乳山市二模) 过四边形 $ABCD$ 的顶点 A 作射线 AM , P 为射线 AM 上一点, 连接 DP . 将 AP 绕点 A 顺时针方向旋转至 AQ , 记旋转角 $\angle PAQ = \alpha$, 连接 BQ .

(1) 【探究发现】如图 1, 数学兴趣小组探究发现, 如果四边形 $ABCD$ 是正方形, 且 $\alpha = 90^\circ$. 无论点 P 在何处, 总有 $BQ = DP$, 请证明这个结论.

(2) 【类比迁移】如图 2, 如果四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle DAB = \alpha = 60^\circ$, $\angle MAD = 15^\circ$, 连接 PQ . 当 $PQ \perp BQ$, $AB = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ 时, 求 AP 的长;

(3) 【拓展应用】如图 3, 如果四边形 $ABCD$ 是矩形, $AD = 6$, $AB = 8$, AM 平分 $\angle DAC$, $\alpha = 90^\circ$. 在射线 AQ 上截取 AR , 使得 $AR = \frac{4}{3}AP$. 当 $\triangle PBR$ 是直角三角形时, 请直接写出 AP 的长.

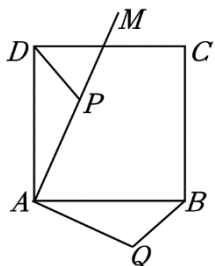


图1

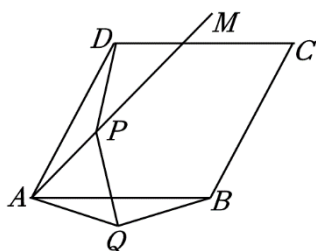


图2

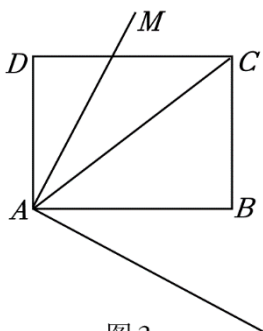
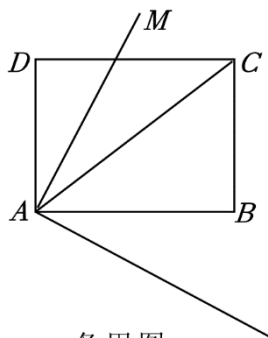


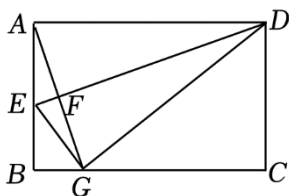
图3



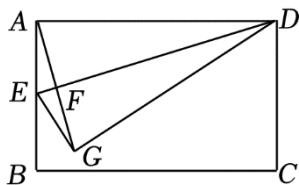
备用图

题目 19 (2023·南海区一模) 如图1, 在矩形 $ABCD$ 中, $AD=12$, $AB=8$, 点 E 在射线 AB 上运动, 将 $\triangle AED$ 沿 ED 翻折, 使得点 A 与点 G 重合, 连接 AG 交 DE 于点 F .

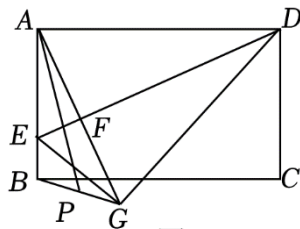
- (1) 【初步探究】当点 G 落在 BC 边上时, 求 BG 的长;
- (2) 【深入探究】在点 E 的运动过程中, BG 是否存在最小值, 如果存在, 请求出最小值; 如果不存在, 请说明理由;
- (3) 【拓展延伸】如图3, 点 P 为 BG 的中点, 连接 AP , 点 E 在射线 AB 上运动过程中, 求 AP 长的最大值.



(图1)



(图2)



(图3)

题目 20 (2023·邹城市模拟) 已知: 正方形 $ABCD$, 等腰直角三角板的直角顶点落在正方形的顶点 D 处, 使三角板绕点 D 旋转.

- (1) 当三角板旋转到图1的位置时, 猜想 CE 与 AF 的数量关系, 并加以证明;
- (2) 在(1)的条件下, 若 $DE=1$, $AE=\sqrt{7}$, $CE=3$, 求 $\angle AED$ 的度数;
- (3) 若 $BC=4$, 点 M 是边 AB 的中点, 连接 DM , DM 与 AC 交于点 O , 当三角板的一边 DF 与边 DM 重合时 (如图2), 若 $OF=\frac{\sqrt{5}}{3}$, 求 CN 的长.

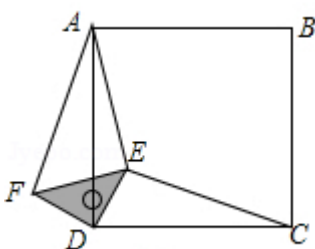


图1

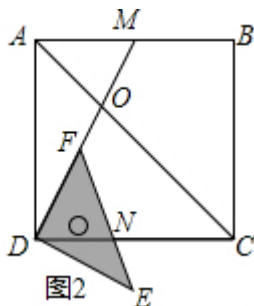


图2

热点考题

题目 21 (2024·裕华区一模) 有一种整式处理器, 能将二次多项式处理成一次多项式, 处理方法是: 将二次多项式的二次项系数与一次项系数的和 (和为非零数) 作为一次多项式的一次项系数, 将二次多项式的常数项作为一次多项式的常数项.

例 $A = x^2 + 2x - 3$, A 经过处理器得到 $B = (1 + 2)x - 3 = 3x - 3$.

若关于 x 的二次多项式 A 经过处理器得到 B , 根据以上方法, 解决下列问题:

- (1) 若 $A = 3x^2 - 2x + 5$, 求 B 关于 x 的表达式;
- (2) 若 $A = 4x^2 - 5(2x - 3)$, 求关于 x 的方程 $B = 9$ 的解.

题目 22 (2024·禹州市一模) 王老师在进行“图形的变化”主题教学时, 设计了如下版块.

【观察发现】

(1) 如图 1, 在正方形网格中 (每个小正方形的边长都是 1), 点 A, B, C, P 均在格点上 (网格线的交点), 且点 P 在线段 AB 上, 连接 PC , 将 PC 绕点 P 顺时针旋转, 使点 C 的对应点 D 落在线段 AC 上, 分别作 PC, PD 关于直线 AB 的对称线段 PE 和 PF .

则① $\angle BAC =$ _____°;

② 线段 PF 可以看作是由线段 PC 绕点 P 顺时针旋转 _____° 得到.

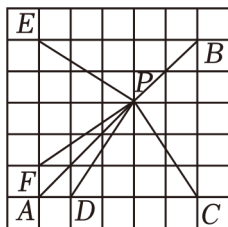


图1

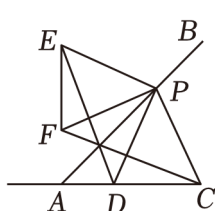


图2

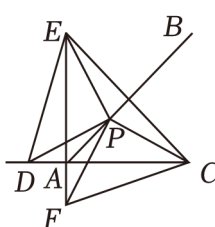
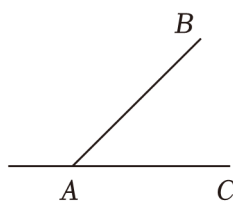


图3



备用图

【深入探究】

(2) 如图 2、图 3, $\angle BAC = 45^\circ$, P 为 AB 上一点, 连接 PC , 将 PC 绕点 P 顺时针旋转, 使点 C 的对应点 D 落在射线 CA 上, 分别作 PC, PD 关于直线 AB 的对称线段 PE 和 PF . 请从图 2、图 3 中任选一种情况, 回答下列问题:

- ① 求 $\angle CPF$ 的度数;
- ② 连接 EF , 请判断线段 EF, AC, AD 之间的数量关系, 并说明理由.

【拓展应用】

(3) 在 (2) 的条件下, 连接 DF , 当 $AC = 6, DE = \sqrt{2}DF$ 时, 请直接写出线段 CD 的长.

题目 23 (2023·新华区校级二模)【发现】如果一个整数的个位数字能被5整除,那么这个整数就能被5整除.

【验证】如: $\because 345 = 100 \times 3 + 10 \times 4 + 5$,

又 $\because 100$ 和 10 都能被5整除,5能被5整除,

$\therefore 100 \times 3 + 10 \times 4 + 5$ 能被5整除,

即:345能被5整除.

(1) 请你照着上面的例子验证343不能被5整除:

(2) 把一个千位是 a 、百位是 b 、十位是 c 、个位是 d 的四位数记为 $\overline{abcd}$. 请照例说明:只有 d 等于5或0时,四位数 $\overline{abcd}$ 才能被5整除.

【迁移】(3) 设 $\overline{abc}$ 是一个三位数,请证明:当 $a+b+c$ 的和能被3整除时, $\overline{abc}$ 能被3整除.

专题 压轴题

热点研究

专题热度	★★★★★
命题热点	1. 综合与实践 2. 阅读与理解 3. 函数与图象 4. 几何图形综合
热门方法	建立数学模型、方程思想、函数思想、数形结合思想
热点题型	解答题

热点突破

热点1 综合与实践

名师点拨

善于将函数问题转化为方程问题,善于利用几何图形的有关性质、定理和二次函数的知识,注意挖掘题目中的隐含条件.

题目 1 (2023 秋·北流市期末) 综合与实践

【问题背景】以函数的角度来看待和解决问题.

(1) 通过观察以下一位数的积: $1 \times 9, 2 \times 8, \dots, 8 \times 2, 9 \times 1$. 其中每个式子中的两数之和为 10, 推测在这些式子中, 乘积最大的算式是 5×5 . (只需填符合的算式, 不需要算出结果)

(2) 通过观察以下两位数的积: $11 \times 19, 12 \times 18, \dots, 18 \times 12, 19 \times 11$. 其中每个式子中的两数之和为 30, 推测在这些式子中, 乘积最大的算式是 15×15 . (只需填符合的算式, 不需要算出结果)

【初步探讨】以问题 (2) 为例, 设第一个数为 x , 写出你对问题 (2) 的猜想 (包括条件和结论). 尝试用二次函数的知识证明你对问题 (2) 的猜想.

【实践应用】(3) 物理电路理论知识中有以下几个结论: 串联电路的总电阻等于各串联电阻之和; 并联电路总电阻的倒数等于各并联电阻的倒数之和; 电压一定的情况下, 电流与电阻成反比关系. 在如图 1 所示的电路中, $R_1 = 2\Omega, R_2 = 3\Omega$, 滑动变阻器的最大电阻 $R_3 = 5\Omega$, 其等效电路图如图 2 所示, 其中 $R_{ap} + R_{bp} = R_3$, 在滑片从 a 端滑到 b 端的过程中, 设 $R_{ap} = x\Omega$, 请你结合电路知识以及函数知识来说明, 当两支路的电阻相等时, 电流表示数最小, 并求出电流表示数的最小值.

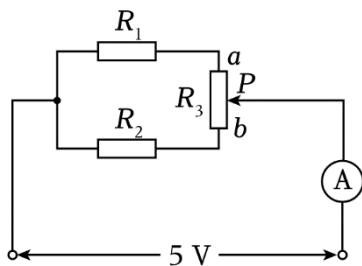


图1

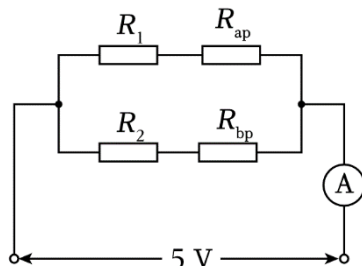


图2

【答案】【问题背景】(1) 5×5 ; (2) 15×15 ;

【初步探讨】猜想:若两数和为30,当这两数相等时,它们的乘积最大,证明见解答;

【实践应用】(3)2A.

【分析】【问题背景】(1)、(2)由题意计算最大值,即可求解;

【初步探讨】设第一个数为 x ,则另一个数为 $30-x$,它们的积为 y ,则有 $y=x(30-x)=-x^2+30x$,即可求解;

【实践应用】(3) 设 $R_{ap}=x\Omega$,则 $R_{bp}=(5-x)\Omega$, $0\leq x\leq 5$,设总电流为 I ,由分式的性质可知,若分子为不变的正数,则分母最大时,分式最小,进而求解.

【解答】解:【问题背景】(1) $5\times 5=25$ 为最大,

故答案为: 5×5 ;

(2) $15\times 15=225$ 为最大,

故答案为: 15×15 ;

【初步探讨】猜想:若两数和为30,当这两数相等时,它们的乘积最大.

证明:设第一个数为 x ,则另一个数为 $30-x$,它们的积为 y ,

则有 $y=x(30-x)=-x^2+30x$,

$\because -1<0$,则抛物线开口向下,

$\therefore$ 当 $x=15$ 时, y 取最大值,为225,

此时这两数分别为15及 $30-15=15$,两数相等,

$\therefore$ 当这两数相等时,它们的乘积最大;

【实践应用】(3) 设 $R_{ap}=x\Omega$,则 $R_{bp}=(5-x)\Omega$, $0\leq x\leq 5$,设总电流为 I ,则

$$I=\frac{U}{R_{\text{总}}}=U\cdot\left(\frac{1}{R_1+R_{ap}}+\frac{1}{R_2+R_{bp}}\right)=5\cdot\left(\frac{1}{2+x}+\frac{1}{3+5-x}\right)=\frac{50}{(2+x)(8-x)},$$

由分式的性质可知,若分子为不变的正数,则分母最大时,分式最小.

设 $W=(2+x)(8-x)=-x^2+6x+16$.

$\because -1<0$,则抛物线 W 开口向下,且 $0\leq x\leq 5$,

$\therefore$ 当 $x=3$ 时, W 取最大值为25,此时 I 取最小值为 $\frac{50}{25}=2(A)$,两支路电阻分别为 $2+3=5(\Omega)$ 和 $8-3=5$

(Ω) ,两支路电阻相等,

$\therefore$ 当两支路的电阻相等时,电流表示数最小,最小值为2A.

题目 2 (2024·青山湖区模拟) 综合与实践

问题提出

某兴趣小组开展综合实践放活动:在正方形 $ABCD$ 中, $BC=4$,动点 P 以每秒1个单位的速度从 B 点出发匀速运动,到达点 C 时停止,作 AP 的垂线交 CD 于 M ,连接 AM ,设点 P 的运动时间为 t s, $Rt\triangle ADM$ 的面积为 S ,探究 S 与 t 的关系.

初步感知

(1)如图1,当点 P 由 B 点向 C 点运动时,

①当 $t=3$ s时, $CM=\frac{3}{4}$, $S=\frac{13}{4}$;

②经探究发现 S 是关于 t 的二次函数,请写出 S 关于 t 的函数解析式为 $S=-\frac{1}{2}t^2+2t$;自变量取值范围为 $0\leq t\leq 4$;

(2)根据所给的已知,完成列表中的填空,并在图3的坐标系中绘制出函数的图象;

t	...	0	1	2	3	4	...
S	...	8				8	...

延伸探究

(3)①当 $t=2$ 时, $S=7$;

②当 $\triangle ABP$ 的面积为 S 的一半时,求 t 的值.

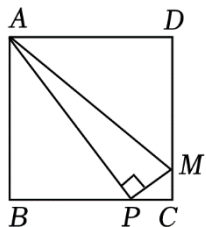


图1

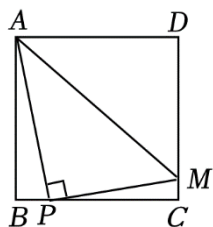


图2

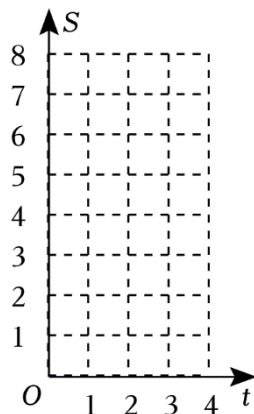


图3

【答案】(1) ① $\frac{3}{4}, \frac{13}{2}$;

② $S = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 8, 0 \leq t \leq 4$;

(2) 见解析;

(3) ① $2 \pm \sqrt{2}$;

② $6 - 2\sqrt{5}$.

【分析】(1) ①证明 $\triangle ABP \sim \triangle PCM$,可得 $CM = \frac{3}{4}$,则 $DM = \frac{13}{4}$,利用三角形的面积公式即可求解;

②由题意得 $PC = 4 - t$,根据相似三角形的性质可得 $CM = \frac{4t - t^2}{4}$,则 $DM = 4 - CM = \frac{t^2 - 4t + 16}{4}$,利用三角形的面积公式即可求解;

(2) 根据 S 关于 t 的函数解析式计算 $t = 1, 2, 3$ 时 S 的值,可完成列表中的填空,绘制出函数的图象;

(3) ① $S = 7$ 时,求出符合题意 t 的值即可;

②根据 $\triangle ABP$ 的面积为 S 的一半以及三角形的面积公式建立方程,求出 t 的值即可.

【解答】解: (1) ①当 $t = 3$ 时, $BP = 3, CP = 4 - 3 = 1$,

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle B = \angle C = 90^\circ, AD = CD = 4$,

$\because AP \perp PM$,

$\therefore \angle APB + \angle CPM = \angle PMC + \angle CPM = 90^\circ$,

$\therefore \angle APB = \angle PMC$,

$\therefore \triangle ABP \sim \triangle PCM$,

$\therefore \frac{PC}{AB} = \frac{CM}{BP}$,

$\therefore \frac{1}{4} = \frac{CM}{3}$,

$\therefore CM = \frac{3}{4}$,则 $DM = \frac{13}{4}$,

$\therefore Rt\triangle ADM$ 的面积 $S = \frac{1}{2}AD \cdot DM = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{13}{4} = \frac{13}{2}$,

故答案为: $\frac{3}{4}, \frac{13}{2}$;

②当点 P 由点 B 运动到点 C 时, $BP = t$,

$\therefore \triangle ABP \sim \triangle PCM$,

$\therefore \frac{PC}{AB} = \frac{CM}{BP}$,即 $\frac{4-t}{4} = \frac{CM}{t}$,

$$\therefore CM = \frac{4t - t^2}{4},$$

$$\therefore DM = 4 - CM = \frac{t^2 - 4t + 16}{4},$$

$$\therefore Rt\triangle ADM \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} AD \cdot DM = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{t^2 - 4t + 16}{4} = \frac{1}{2} t^2 - 2t + 8 (0 \leq t \leq 4),$$

故答案为: $S = \frac{1}{2} t^2 - 2t + 8, 0 \leq t \leq 4$;

(2) $t = 1$ 时, $S = \frac{1}{2} - 2 + 8 = 6.5$, $t = 2$ 时, $S = 2 - 4 + 8 = 6$, $t = 3$ 时, $S = \frac{9}{2} - 6 + 8 = 6.5$, 完成列表中的填空如下,

t	...	0	1	2	3	4	...
S	...	8	6.5	6	6.5	8	...

在图3的坐标系中绘制出函数的图象;

(3) ① $\because S = 7$,

$$\therefore \frac{1}{2} t^2 - 2t + 8 = 7, \text{ 解得 } t = 2 \pm \sqrt{2},$$

故答案为: $2 \pm \sqrt{2}$;

② 当点 P 由点 C 运动到点 B 时, $CP = t$,

$$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} AB \cdot BP = \frac{1}{2} \times 4t = 2t,$$

$\because \triangle ABP$ 的面积为 S 的一半

$$\therefore 2t = \frac{1}{2} t^2 - 2t + 8, \text{ 解得 } t = 6 \pm 2\sqrt{5},$$

$$\because 0 \leq t \leq 4,$$

$$\therefore t = 6 - 2\sqrt{5}.$$

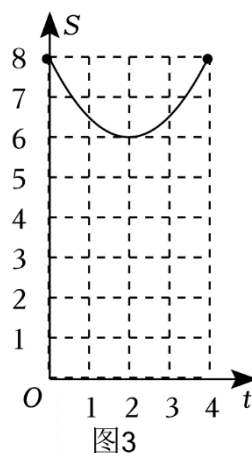


图3

题目 3 (2024·青秀区校级开学) 综合与实践

一个数学兴趣小组在上综合与实践课时发现:在大自然里,存在很多数学的奥秘,一片美丽的心形叶子、刚生长出的幼苗的部分轮廓线,可以近似的看作由抛物线的一部分沿直线折叠而成,如图1与图2所示.



图1



图2

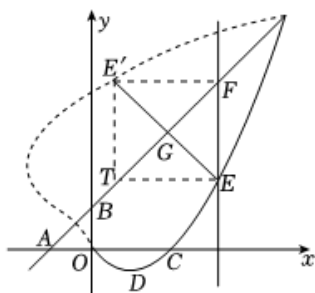


图3

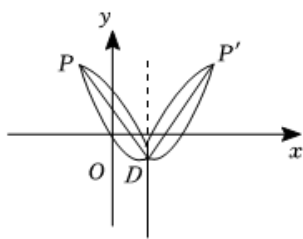


图4

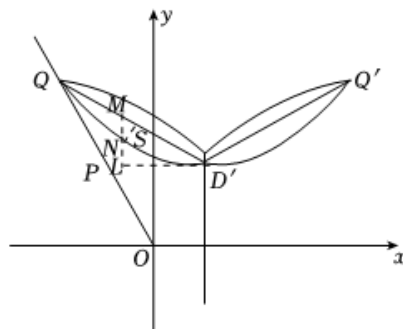


图5

【问题发现】如图3,为了确定一片心形叶子的形状,建立平面直角坐标系,发现心形叶子下部轮廓线可以看作

是二次函数 $y = mx^2 - 4mx - 20m + 5$ 图象的一部分,且过原点,求这个抛物线的表达式及顶点 D 的坐标.

【问题探究】如图 3,心形叶片的对称轴直线 $y = x + 2$ 与坐标轴交于 A, B 两点,直线 $x = 6$ 分别交抛物线和直线 AB 于点 E, F ,点 E, E' 是叶片上的一对对称点, EE' 交直线 AB 于点 G . 求叶片此处的宽度 EE' 的长.

【拓展应用】兴趣小组同学在观察某种幼苗生长的过程中,发现幼苗叶片下方轮廓线也可以看作是二次函数 $y = mx^2 - 4mx - 20m + 5$ 图象的一部分,如图 4,幼苗叶片下方轮廓线正好对应【问题发现】中的二次函数. 若直线 PD 与水平线的夹角为 45° ,三天后,点 D 长到与点 P 同一水平位置的点 D' 时,叶尖 Q 落在射线 OP 上(如图 5 所示). 求此时一片幼苗叶子的长度.

【答案】【问题发现】 $y = \frac{1}{4}x^2 - x$; $D(2, -1)$;

【问题探究】 $5\sqrt{2}$;

【拓展应用】 $3\sqrt{5}$.

【分析】【问题发现】二次函数 $y = mx^2 - 4mx - 20m + 5$ 过原点,则 $-20m + 5 = 0$,即可求解;

【问题探究】点 E, E' 关于直线 AF 对称,求出点 $E'(1, 8)$,即可求解;

【拓展应用】求出点 $D'(2, 3)$,得到抛物线的表达式为: $y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$,进而求解.

【解答】解:【问题发现】 $\because$ 二次函数 $y = mx^2 - 4mx - 20m + 5$ 过原点,

$\therefore -20m + 5 = 0$,

解得: $m = \frac{1}{4}$,

则抛物线的表达式为: $y = \frac{1}{4}x^2 - x$,

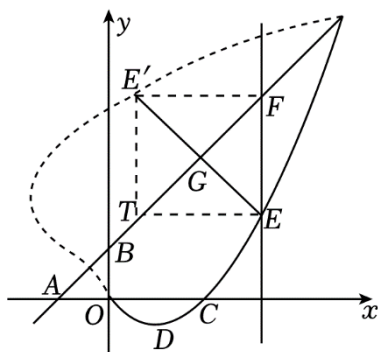
则点 $D(2, -1)$;

【问题探究】当 $x = 6$ 时, $y = \frac{1}{4}x^2 - x = 3$,即点 $E(6, 3)$,

当 $x = 6$ 时, $y = x + 2 = 8$,即点 $F(6, 8)$,

则 $EF = 8 - 3 = 5$,

过点 E 作 x 轴的平行线交 AF 于点 T ,连接 $TE', E'F$,



图③

则点 E, E' 关于直线 AF 对称,

则点 $E'(1, 8)$,

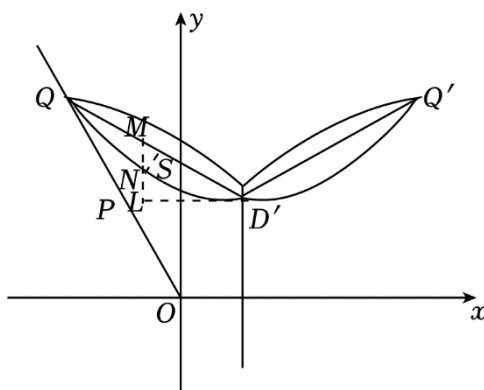
则 $EE' = \sqrt{(6-1)^2 + (8-3)^2} = 5\sqrt{2}$;

【拓展应用】在 QD' 上取点 M ,过点 M 作 $MN \parallel y$ 轴交抛物线于点 N ,交过点 D' 与 x 轴的平行线于点 L ,过点 N 作 $NS \perp QD'$ 于点 S ,

由抛物线的表达式知,点 $D(2, -1)$,

$\therefore$ 直线 PD 与水平线的夹角为 45° ,则直线 PD 的表达式为: $y = -x + 1$,

联立 $y = \frac{1}{4}x^2 - x$ 和 $y = -x + 1$ 得: $\frac{1}{4}x^2 - x = -x + 1$,



图④

解得: $x = -2$, 即点 $P(-2, 3)$,

则点 $D'(2, 3)$,

将点 D' 的坐标代入 $y = mx^2 - 4mx - 20m + 5$ 得: $3 = 4m - 8m - 20m + 5$,

解得: $m = \frac{1}{12}$,

则抛物线的表达式为: $y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$,

由点 P 的坐标得, 直线 OP 的表达式为: $y = -\frac{3}{2}x$,

联立上述两式得: $\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{10}{3} = -\frac{3}{2}x$,

解得: $x = -4$ 或 -10 (舍去),

即点 $Q(-4, 6)$,

由点 Q 、 D' 的坐标得, $D'Q = 3\sqrt{5}$, $y_{QD'} = -\frac{1}{2}x + 4$,

即叶子的长度为 $3\sqrt{5}$.

题目 4 (2024·兴化市开学) 综合与实践:

问题情境

小莹妈妈的花卉超市以 15 元/盆的价格新购进了某种盆栽花卉, 为了确定售价, 小莹帮妈妈调查了附近 A , B , C , D , E 五家花卉店近期该种盆栽花卉的售价 x 与日销售量 y 情况, 记录如下:

	售价 (元/盆)	日销售量 (盆)
A	20	50
B	30	30
C	18	54
D	22	46
E	26	38

数据整理:

(1) 请将以上调查数据按照一定顺序重新整理, 填写在下表中:

售价 (元/盆)	18				
日销售量 (盆)					

模型建立

(2) 分析数据的变化规律, 探究出日销售量 y 与售价 x 之间的关系式.

拓广应用

(3) 根据以上信息, 小莹妈妈在销售该种花卉中.

① 要想每天获得 400 元的利润, 应如何定价?

② 售价定为多少时, 每天能够获得最大利润?

【答案】(1) 18, 54; 20, 50; 22, 46; 26, 38; 30, 30;

(2) $y = -2x + 90$;

(3) ① 要想每天获得 400 元的利润, 定价为 25 元或 35 元;

② 售价定为 30 元时, 每天能够获得最大利润 450 元.

【分析】(1) 根据销售单价从小到大排列即可;

(2) 用待定系数法求出日销售量 y 与售价 x 之间的关系即可;

(3) ①根据每天获得 400 元的利润,列出一元二次方程,解方程即可;

②设每天获得的利润为 w 元,依据题意得 $w = -2(x - 30)^2 + 450$,依据一元二次方程的性质分析即可.

【解答】解:(1)根据销售单价从小到大排列得下表:

售价(元/盆)	18	20	22	26	30
日销售量(盆)	54	50	46	38	30

故答案为: 18, 54; 20, 50; 22, 46; 26, 38; 30, 30;

(2)观察表格可知销售量是售价的一次函数;

设销售量为 y 盆,售价为 x 元, $y = kx + b$,

把 (18, 54), (20, 50) 代入得: $\begin{cases} 18k + b = 54 \\ 20k + b = 50 \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} k = -2 \\ b = 90 \end{cases}$,

$\therefore y = -2x + 90$;

(3) ① $\because$ 每天获得 400 元的利润,

$\therefore (x - 15)(-2x + 90) = 400$,

解得 $x = 25$ 或 $x = 35$,

$\therefore$ 要想每天获得 400 元的利润,定价为 25 元或 35 元;

②设每天获得的利润为 w 元.

根据题意得: $w = (x - 15)(-2x + 90) = -2x^2 + 120x - 1350 = -2(x - 30)^2 + 450$,

$\therefore -2 < 0$,

$\therefore$ 当 $x = 30$ 时, w 取最大值 450,

$\therefore$ 售价定为 30 元时,每天能够获得最大利润 450 元.

题目 5 (2023 秋·庆云县期末) 综合与实践

如图 1,某兴趣小组计划开垦一个面积为 $8m^2$ 的矩形地块 $ABCD$ 种植农作物,地块一边靠墙(墙足够长),另外三边用木栏围住,木栏总长为 $a m^2$.

【问题提出】

小组同学提出这样一个问题:若 $a = 10m$,能否围出矩形地块?

【问题探究】

小颖尝试从“函数图象”的角度解决这个问题:

设 AB 为 $x m$, BC 为 $y m$. 由矩形地块面积为 $8m^2$,得到 $xy = 8$,满足条件的 (x, y) 可看成是反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 的图象在第一象限内点的坐标;木栏总长为 $10m$,得到 $2x + y = 10$,满足条件的 (x, y) 可看成一次函数 $y = -2x + 10$ 的图象在第一象限内点的坐标,同时满足这两个条件的 (x, y) 就可以看成两个函数图象交点的坐标.

如图 2,反比例函数 $y = \frac{8}{x} (x > 0)$ 的图象与直线 $l_1: y = -2x + 10$ 的交点坐标为 (1, 8) 和 (4, 2),因此,木栏总长为 $10m$ 时,能围出矩形地块,分别为: $AB = 1m$, $BC = 8m$;或 $AB = \underline{\hspace{2cm}} m$, $BC = \underline{\hspace{2cm}} m$.

(1)根据小颖的分析思路,完成上面的填空.

【类比探究】

(2)若 $a = 6m$,能否围出矩形地块? 请仿照小颖的方法说明理由.

【问题解决】

(3)求当木栏总长 a 为多少时? 面积为 $8m^2$ 的矩形地块 $ABCD$ 满足 $AB = BC$.

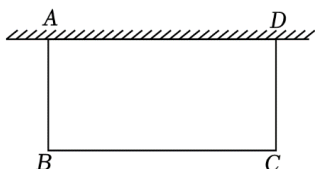


图1

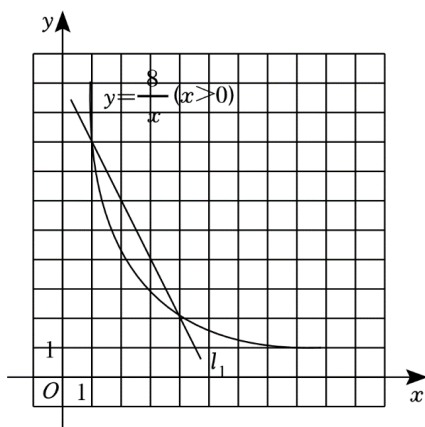


图2

【答案】(1) (4,2); 4; 2;

(2) 不能围出,理由见解析;

(3) 当木栏总长 a 为 $6\sqrt{2}m$ 时,面积为 $8m^2$ 的矩形地块 $ABCD$ 满足 $AB=BC$.

【分析】(1) 观察图象或联立解方程组得到另一个交点坐标为 (4,2);

(2) 观察图象得到 l_2 与函数 $y = \frac{8}{x}$ 图象没有交点,所以不能围出;

(3) 根据题意列方程,解方程即可得到结论.

【解答】解: (1) 将反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 与直线 $l_1: y = -2x + 10$ 联立得 $\begin{cases} y = \frac{8}{x} \\ y = -2x + 10 \end{cases}$,

$$\therefore \frac{8}{x} = -2x + 10,$$

$$\therefore x^2 - 5x + 4 = 0,$$

$$\therefore x_1 = 1, x_2 = 4,$$

$\therefore$ 另一个交点坐标为 (4,2),

$\therefore AB$ 为 x m, BC 为 y m,

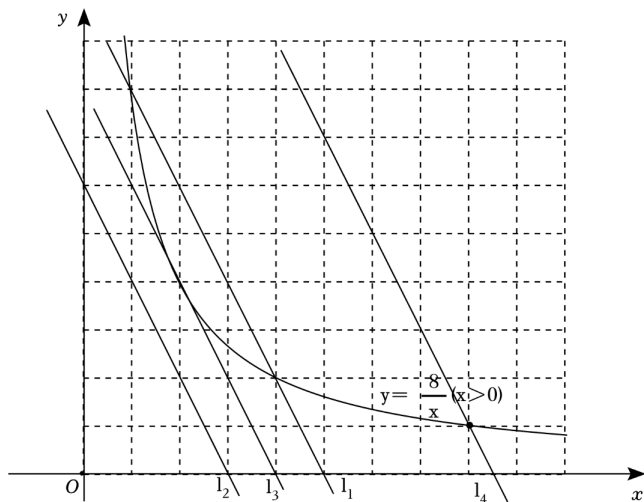
$\therefore AB = 4, BC = 2$.

故答案为: (4,2); 4; 2;

(2) 不能围出;

理由: $y = -2x + 6$ 的图象,如答案图中 l_2 所示:

$\therefore l_2$ 与函数 $y = \frac{8}{x}$ 图象没有交点,



∴不能围出面积为 $8m^2$ 的矩形;

(3) ∵ $AB=BC$,

∴ $x=y$,

∴ $3x=a$,

∴ $x=\frac{a}{3}$,

∴ $\frac{a}{3} \times \frac{a}{3} = 8$,

∴ $a=6\sqrt{2}$ (负值舍去),

∴当木栏总长 a 为 $6\sqrt{2}m$ 时, 面积为 $8m^2$ 的矩形地块 $ABCD$ 满足 $AB=BC$.

热点2 阅读与理解

名师点拨

结合实际问题来解决, 生活中的一些数学常识要了解.

题目 6 (2024·高平市一模) 阅读以下材料, 并按要求完成相应的任务.

数学对物理学的发展起着重要的作用, 物理学也对数学的发展起着重要的作用, 莫尔斯所说: “数学是数学, 物理是物理, 但物理可以通过数学的抽象而受益, 而数学则可以通过物理的见识而受益.”

以下是数学中常见的一个问题:

若 $a+b=2$, 则 ab 的最大值是多少?

设 $a=1+x$, $b=1-x$, 则 $ab=(1+x)(1-x)=1-x^2=-x^2+1$.

.....

以下是物理中的一个问题:

物理学中的电路分为串联电路和并联电路; 已知电路中有大小分别为 R_1 和 R_2 的两个电阻, 串联电路的电阻公式为 $R=R_1+R_2$, 并联电路的电阻公式为 $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$. 在某一段电路上测得两个电阻的和为 $15k\Omega$, 若根据实际需要把这两个电阻并联在一起, 则并联后总电阻的最大值是多少?

任务:

(1) 按照上面的解题思路, 完成数学问题的剩余部分.

(2) 若 a, b 两数的和为定值, 则 a, b 满足 $\underline{a=b}$ 时, ab 的值最大.

(3) 解决这个物理问题主要体现的数学思想是 $\underline{\hspace{2cm}}$. (填序号即可)

A. 统计思想

B. 分类思想

C. 模型思想

(4) 物理问题中并联后总电阻的最大值是 $\underline{\hspace{2cm}} k\Omega$.

【答案】(1)1; (2) $a=b$; (3)C; (4) $\frac{15}{4}$.

【分析】(1) 利用题干中的方法和非负数的意义解答即可;

(2) 利用 (1) 的结论解答即可;

(3) 利用数学模型的思想解答即可;

(4) 利用 (2) 的结论列式解答即可.

【解答】解: (1) 设 $a=1+x$, $b=1-x$,

$$\text{则 } ab = (1+x)(1-x) = 1-x^2 = -x^2+1,$$

$$\therefore -x^2 \leq 0,$$

$\therefore$ 当 $x=0$ 时, 即 $a=b=1$ 时, ab 取得最大值为 1.

(2) 由 (1) 知: 若 $a+b=2$, 则 $a=b=1$ 时, ab 取得最大值.

$\therefore$ 若 a, b 两数的和为定值, 则 a, b 满足 $a=b$ 时, ab 的值最大.

故答案为: $a=b$;

(3) $\therefore$ 解决这个物理问题主要体现的数学思想是利用题干中提供的数学模型解答,

$\therefore$ 解决这个物理问题主要体现的数学思想是模型思想,

故选: C.

$$(4) \therefore R_1 + R_2 = 15k\Omega,$$

$\therefore R_1$ 与 R_2 的和为定值,

$\therefore$ 由 (2) 知: 当 $R_1 = R_2 = \frac{15}{2}k\Omega$ 时, $R_1 \cdot R_2$ 的值最大.

$$\therefore \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

$$\therefore \frac{1}{R} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2},$$

$$\therefore R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

$$\therefore R \text{ 的最大值} = \frac{\frac{15}{2} \times \frac{15}{2}}{15} = \frac{15}{4}(k\Omega).$$

故答案为: $\frac{15}{4}$.

题目 7 (2024· 曲阜市校级一模) 阅读新知

一般地, 如果一个数列从第 2 项起, 每一项与它的前一项的比等于同一个非零常数, 这个数列就叫做等比数列. 这个常数叫做等比数列的公比, 公比通常用字母 q 表示 ($q \neq 0$).

即: 在数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ (n 为正整数) 中, 若 $\frac{a_2}{a_1} = q, \frac{a_3}{a_2} = q, \dots$, 则数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ (n 为正整数) 叫做等比数列. 其中 a_1 叫数列的首项, a_2 叫第二项, $\dots, a_n$ 叫第 n 项, q 叫做数列的公比.

例如: 数列 $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ 是等比数列, 公比 $q=2$.

计算: 求等比数列 $1, 3, 3^2, 3^3, \dots, 3^{100}$ 的和.

解: 令 $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$, 则 $3S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100} + 3^{101}$.

因此 $3S - S = 3^{101} - 1$. 所以 $S = \frac{3^{101} - 1}{2}$.

$$\text{即 } 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100} = \frac{3^{101} - 1}{2}.$$

$$\text{即 } 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100} = \frac{3^{101} - 1}{2}.$$

学以致用

(1) 选择题: 下列数列属于等比数列的是 C

A. $1, 2, 3, 4, 5$

B. $2, 6, 18, 21, 63$

C. $56, 28, 14, 7, 3.5$

D. $-11, 22, -33, 44, -55$

(2) 填空题: 已知数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 是公比为 4 的等比数列, 若它的首项 $a_1=3$, 则它的第 n 项 a_n 等于 .

(3) 解答题: 求等比数列 $1, 5, 5^2, 5^3, \dots$ 前 2024 项的和.

【答案】(1) C;

(2) $3 \times 4^{n-1}$;

(3) 即前 2024 项的和是 $\frac{5^{2024}-1}{4}$.

【分析】(1) 根据题意和等比数列的定义, 可以判断哪个选项中的数列是等比数列;

(2) 根据题意, 可以写出所给数列第 n 项 a_n 的值;

(3) 仿照题目的例子, 可以求得前 2024 项的和.

【解答】解: (1) 由题意可得,

$\frac{2}{1} \neq \frac{3}{2}$, 故选项 A 中的数列不是等比数列;

$\frac{6}{2} \neq \frac{21}{18}$, 故选项 B 中的数列不是等比数列;

$\frac{56}{28} = \frac{28}{14} = \frac{14}{7} = \frac{7}{3.5}$, 故选项 C 中的数列是等比数列;

$\frac{22}{-11} \neq \frac{-33}{22}$, 故选项 D 中的数列不是等比数列;

故答案为: C;

(2) $\because$ 数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 是公比为 4 的等比数列, 它的首项 $a_1=3$,

$\therefore$ 它的第 n 项 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \times 4^{n-1}$,

故答案为: $3 \times 4^{n-1}$;

(3) 设 $S = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2023}$,

则 $5S = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2023}$,

$5S - S = 5^{2024} - 1$,

$4S = 5^{2024} - 1$,

$S = \frac{5^{2024}-1}{4}$,

即前 2024 项的和是 $\frac{5^{2024}-1}{4}$.

题目 8 (2023·大同模拟) (1) 计算: $(-5)^2 - |-3| + (-2)^3 - \left(\frac{1}{3}\right) \cdot |-3| + (-2)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$;

(2) 下面是小明化简分式 $\frac{2}{x^2-1} - \frac{x-1}{x^2-2x+1}$ 的过程, 请认真阅读并完成相应任务:

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \frac{2}{(x+1)(x-1)} - \frac{x-1}{(x-1)^2} \dots \text{第一步} \\ &= \frac{2}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{x-1} \dots \text{第二步} \\ &= \frac{2}{(x+1)(x-1)} - \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} \dots \text{第三步} \\ &= \frac{2-x+1}{(x+1)(x-1)} \dots \text{第四步} \\ &= \frac{3-x}{(x+1)(x-1)} \dots \text{第五步} \end{aligned}$$

【任务一】填空:

①以上化简步骤中, 第一步变形使用的方法是 因式分解;

②第 二 步是进行分式的通分, 通分的依据是 分式的基本性质;

③第 四 步开始出现错误.

【任务二】请直接写出正确的化简结果: $-\frac{1}{x+1}$.

【答案】(1) -12; (2) 【任务一】①因式分解; ②三; 分式的基本性质; ③四; 【任务二】 $-\frac{1}{x+1}$.

【分析】(1) 利用有理数的乘方法则, 绝对值的意义和负整数指数幂的意义化简运算即可;

(2) 利用分式的加减混合运算的法则解答即可.

【解答】解：(1) 原式 $= 25 - 3 - 8 - 1 + 4 - 9$
 $= 29 - 21$
 $= 8$;

(2) 【任务一】填空：

- ① 以上化简步骤中，第一步变形使用的方法是因式分解；
 ② 第三步是进行分式的通分，通分的依据是分式的基本性质；
 ③ 第四步开始出现错误。

故答案为：① 因式分解；② 三；分式的基本性质；③ 四；

$$\begin{aligned} \text{【任务二】：原式} &= \frac{2}{(x+1)(x-1)} - \frac{x-1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{2}{(x+1)(x-1)} - \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{2-x-1}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{1-x}{(x+1)(x-1)} \\ &= -\frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

题目 9 (2023·微山县一模) 阅读材料：一般地，若 $a^x = N (a > 0, a \neq 1)$ ，则 x 叫做以 a 为底 N 的对数，记作： $x = \log_a N$ 。比如指数式 $2^4 = 16$ 可以转化为 $4 = \log_2 16$ ，对数式 $2 = \log_5 25$ 可以转化为 $5^2 = 25$ 。我们根据对数的定义可得到对数的一个性质： $\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N (a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0)$ ；理由如下：设 $\log_a M = m$ ， $\log_a N = n$ ，则 $M = a^m$ ， $N = a^n$ ， $\therefore M \cdot N = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ，由对数的定义得 $m + n = \log_a (M \cdot N)$ 。又 $\therefore m + n = \log_a M + \log_a N$ ， $\therefore \log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$ 。

解决问题：(1) 将指数 $4^3 = 64$ 转化为对数式 $\underline{\quad} 3 = \log_4 64 \underline{\quad}$ ；

(2) 证明 $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N (a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0)$ ；

拓展运用：(3) 计算： $\log_3 2 + \log_3 6 - \log_3 4$ 。

【答案】(1) $3 = \log_4 64$ ；(2) 见解析；(3) 1。

【分析】(1) 根据新定义公式计算即可。

(2) 仿照乘法的证明去解答即可。

(3) 根据公式依次计算即可。

【解答】解：(1) 根据题意，得 $3 = \log_4 64$ ，

故答案为： $3 = \log_4 64$ 。

(2) 设 $\log_a M = m$ ， $\log_a N = n$ ，则 $M = a^m$ ， $N = a^n$ ，

$$\therefore \frac{M}{N} = a^m \div a^n = a^{m-n}，由对数的定义得 m - n = \log_a \left(\frac{M}{N} \right)。$$

$$又 \because m - n = \log_a M - \log_a N，$$

$$\therefore \log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N。$$

(3) $\log_3 2 + \log_3 6 - \log_3 4$

$$= \log_3 (2 \times 6) - \log_3 4$$

$$= \log_3 12 - \log_3 4$$

$$= \log_3 3^3$$

$$= 1。$$

杨辉三角

如果将 $(a+b)^n$ (n 为非负整数) 的展开式的每一项按字母 a 的次数由大到小排列, 就可以得到下面的等式:

$(a+b)^0=1$, 它只有一项, 系数为 1;

$(a+b)^1=a+b$, 它有两项, 系数分别为 1, 1;

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, 它有三项, 系数分别为 1, 2, 1;

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, 它有四项, 系数分别为 1, 3, 3, 1;

将上述每个式子的各项系数排成该表.

观察该表, 可以发现每一行的首末都是 1, 并且下一行的数比上一行多 1 个, 中间各数都写在上一行两数的中间, 且等于它们的和. 按照这个规律可以将这个表继续往下写.

该表在我国宋朝数学家杨辉 1261 年的著作《详解九章算法》中提到过, 而他是摘录自北宋时期数学家贾宪著的《开方作法本源》中的“开方作法本源图”, 因而人们把这个表叫做杨辉三角或贾宪三角, 在欧洲这个表叫做帕斯卡三角形. 帕斯卡 (B. Pascal, 1623—1662) 是 1654 年发现这一规律的, 比杨辉要迟 393 年, 比贾宪迟 600 年.

		1		
	1		1	
	1	2	1	
1	3	3	1	

(1) 应用规律:

①直接写出 $(a+b)^4$ 的展开式, $(a+b)^4=$ $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ $;$

② $(a+b)^6$ 的展开式中共有 7 项, 所有项的系数和为 64 ;

(2) 代数推理:

已知 m 为整数, 求证: $(m+3)^3-(m-3)^3$ 能被 18 整除.

【答案】(1) ① $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$; ② 7, 64;

(2) 见解析.

【分析】(1) 直接利用已知式子中系数变化规律进而得出答案;

(2) 直接利用已知式子中系数变化规律进而得出答案.

【解答】(1) 解: 根据规律得:

① $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$;

② $\because (a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$,

$\therefore (a+b)^6$ 的展开式中共有 7 项, 所有项的系数和为 $1+6+15+20+15+6+1=64$;

故答案为: ① $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$; ② 7, 64;

(2) 证明: $\because (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,

$\therefore (m+3)^3-(m-3)^3$

$= (m^3+9m^2+27m+27) - (m^3-9m^2+27m-27)$

$= m^3+9m^2+27m+27 - m^3+9m^2-27m+27$

$= 18m^2+54$

$= 18(m^2+3),$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/767026016113006112>