

湖南省岳阳市平江县颐华高级中学 2023-2024 学年高二下

学期入学考试数学试题

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 设复数 z 满足 $z \cdot i = 1 + 2i$ (i 为虚数单位), 则复数 z 的虚部是 ()

- A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

2. 已知集合 $A = \{x \mid |x-3| < 2\}$, $B = \left\{x \mid \frac{2x-1}{x-2} \leq 1\right\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $(1, 2]$ B. $(1, 2)$ C. $[-1, 5]$ D. $[-1, 5)$

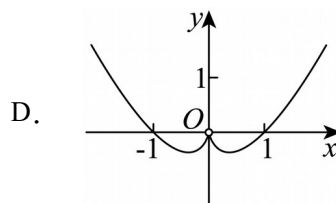
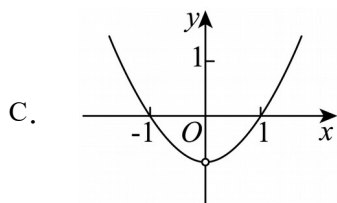
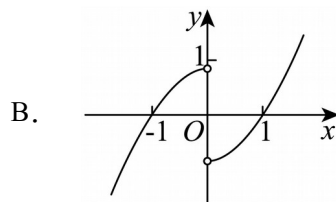
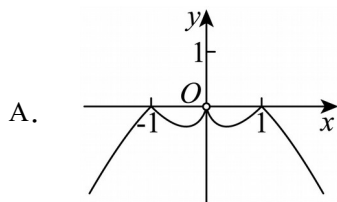
3. 有 4 位教师在同一年级的 4 个班中各教一个班的数学, 在数学检测时要求每位教师不能在本班监考, 则不同的监考方法有

- A. 8 种 B. 9 种 C. 10 种 D. 11 种

4. 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - 3x + 1)$ 的单调减区间为 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$ C. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

5. 函数 $y = \frac{x^2 \ln|x|}{|x|}$ 的图象大致是 ()



6. 已知实数 x, y 满足 $-4 \leq x - y \leq -1$, $-1 \leq 2x - y \leq 5$, 则 y 的取值范围是 ()

- A. $\{y|0 \leq y \leq 9\}$ B. $\{y|-5 \leq y \leq 4\}$
 C. $\{y|1 \leq y \leq 13\}$ D. $\{y|0 \leq y \leq 13\}$

7. 已知抛物线 $C: x^2 = -2py (p > 0)$ 的焦点 F 与 $\frac{y^2}{8} + \frac{x^2}{4} = 1$ 的一个焦点重合，过焦点

F 的直线与 C 交于 A, B 两不同点，抛物线 C 在 A, B 两点处的切线相交于点 M ，且

M 的横坐标为 4，则弦长 $|AB| = ()$

- A. 12 B. 14 C. 15 D. 16

8. 在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ，且 $AB + PA = 6$ ，

当三棱锥 $P-ABC$ 的体积取最大值时，该三棱锥外接球的体积是 $()$

- A. 27π B. 36π C. 54π D. 72π

二、多选题

9. 关于曲线 $\frac{x^2}{5-m} + \frac{y^2}{m-1} = 1$ ，下列叙述正确的是 $()$

- A. 当 $m = -2$ 时，曲线表示的图形是一个圆
 B. 当 $m = 2$ 时，曲线表示的图形是一个焦点在 x 轴上的椭圆
 C. 当 $m = 3$ 时，曲线表示的图形是一个圆
 D. 当 $m = 4$ 时，曲线表示的图形是一个焦点在 y 轴上的椭圆

10. (多选) 在 $\triangle ABC$ 中，下列结论正确的是 $()$

- A. $\sin(A+B) = \sin C$
 B. $\sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2}$

C. $\tan(A+B) = -\tan C \left(C \neq \frac{\pi}{2} \right)$

D. $\cos(A+B) = \cos C$

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2+3a_n} (n \in \mathbb{N}^*)$, 则 ()

A. $\left\{ \frac{1}{a_n} + 3 \right\}$ 为等比数列

B. $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{2^{n-1}-3}$

C. $\{a_n\}$ 为递增数列

D. $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 的前 n 项和 $T_n = 2^{n+2} - 3n - 4$

12. 关于函数 $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$, 下列说法正确的是 ()

A. 若过点 (a, b) 可以作曲线 $f(x)$ 的两条切线, 则 $0 < b < e^a$

B. 若 $f(x) - kx \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则实数 k 的取值范围为 $0 \leq k \leq e$

C. 若 $g(x) \leq mf(x)$ 在 $[1, 3]$ 上恒成立, 则 $m \geq \frac{4}{e^2}$

D. 若函数 $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} - t$ 有且只有一个零点, 则实数 t 的范围为 $t > \frac{4}{e^2}$

三、填空题

13. 设等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n , T_n , 若 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{n+2}{2n+1}$, 则 $\frac{a_{10}}{b_{10}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知圆 $M: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ 和点 $P(3, 5)$, 过点 P 作圆 M 的切线, 切点分别为 A , B , 则三角形 PAB 外接圆的方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 、 F 分别为边 AB 、 BC 的中点, 连接 CE 、 DF , 交

于点 G . 若 $\overrightarrow{CG} = \lambda \overrightarrow{CD} + \mu \overrightarrow{CB}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$), 则 $\frac{\lambda}{\mu} = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知函数 $f(x) = ax^2 - 2x + \ln x$ 有两个不同的极值点 x_1, x_2 , 且不等式

$f(x_1) + f(x_2) < x_1 + x_2 + t$ 恒成立, 则 t 的取值范围是_____.

四、解答题

17. 某厂研制了一种生产高精产品的设备, 为检验新设备生产产品的某项指标有无提高, 用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品, 得到各件产品该项指标数据如下:

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$, 样本方差分别记

为 s_1^2 和 s_2^2 .

(1) 求 $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_1^2 , s_2^2 ;

(2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高 (如果

$\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{10}}$, 则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高, 否

则不认为有显著提高).

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A , B , C 所对的边分别为 a , b , c , 已知

$$\frac{\sqrt{3}}{3}b \sin C + c \cos B = a.$$

(1) 若 $a = 2$, $b = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $c = 2$, 求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 和等差数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$, 且当 $n \geq 2$ 时,

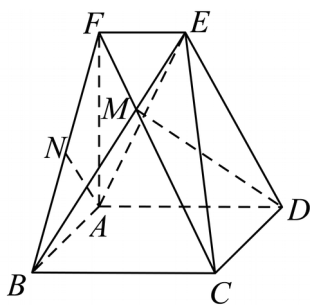
$$\log_2 a_n = 1 + b_n \log_2 3.$$

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n ;

(2)求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

20. 如图, 多面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 为正方形, 平面 $ABCD \perp$ 平面 $ADEF$,

$EF \parallel AD$, $AF = AD = 2$, $EF = 1$, $CF = 2\sqrt{3}$, BE 与 CF 交于点 M .



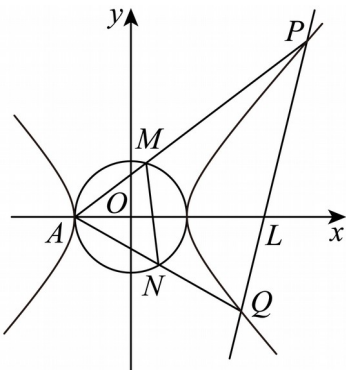
(1)若 N 是 BF 中点, 求证: $AN \perp CF$;

(2)求直线 MD 和平面 ABE 所成角的正弦值.

21. 如图, 已知点 $T_1(3, -\sqrt{5})$ 和点 $T_2(-5, \sqrt{21})$ 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上,

双曲线 C 的左顶点为 A , 过点 $L(a^2, 0)$ 且不与 x 轴重合的直线 l 与双曲线 C 交于 P , Q

两点, 直线 AP , AQ 与圆 $O: x^2 + y^2 = a^2$ 分别交于 M , N 两点.



(1)求双曲线 C 的标准方程;

(2)设直线 AP , AQ 的斜率分别为 k_1 , k_2 , 求 $k_1 k_2$ 的值;

(3)证明：直线 MN 过定点.

22. 已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 a, b 为两个不相等的正数, 且 $b\ln a - a\ln b = a - b$, 证明: $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$.

参考答案:

1. D

【分析】由 $z \cdot i = 1 + 2i$ 求出复数 z ，从而可求出其虚部.

【详解】由 $z \cdot i = 1 + 2i$ ，得 $z = \frac{1+2i}{i} = \frac{(1+2i)i}{i^2} = -(i+2i^2) = 2-i$ ，

所以复数 z 的虚部是为 -1 ，

故选：D

2. D

【分析】求出集合 A 、 B ，利用并集的定义可求得集合 $A \cup B$ 。

【详解】因为 $A = \{x \mid |x-3| < 2\} = \{x \mid -2 < x-3 < 2\} = \{x \mid 1 < x < 5\}$ ，

由 $\frac{2x-1}{x-2} \leq 1$ 可得 $\frac{2x-1}{x-2} - 1 = \frac{(2x-1)-(x-2)}{x-2} = \frac{x+1}{x-2} \leq 0$ ，解得 $-1 \leq x < 2$ ，则

$$B = \{x \mid -1 \leq x < 2\},$$

因此， $A \cup B = [-1, 5)$ 。

故选：D.

3. B

【分析】设四位监考教师分别为 A, B, C, D ，所教班分别为 a, b, c, d ，分类讨论，利用分类计数原理，即可求解。

【详解】设四位监考教师分别为 A, B, C, D ，所教班分别为 a, b, c, d ，假设 A 监考 b ，则余下三人监考剩下的三个班，共有 3 种不同方法，同理 A 监考 c, d 时，也分别有 3 种不同方法，由分类加法计数原理，共有 $3+3+3=9$ (种)不同的监考方法，故选 B。

【点睛】本题主要考查了计数原理的应用，其中解答中认真审题，合理分类，利用分类计数原理求解是解答的关键，着重考查了分析问题和解决问题的能力，属于基础题。

4. A

【分析】求出 x 的范围，函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - 3x + 1)$ 的单调减区间为 $y = 2x^2 - 3x + 1$ 的增区间，

即可得到答案.

【详解】由 $2x^2 - 3x + 1 > 0$ 可得 $x > 1$ 或 $x < \frac{1}{2}$

函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - 3x + 1)$ 的单调减区间为 $y = 2x^2 - 3x + 1$ 的增区间 $(1, +\infty)$

故选：A

5. D

【分析】确定函数定义域，判断函数奇偶性，即可判断B；当 $x > 0$ 时， $f(x) = x \ln x$ ，利用导数判断此时函数的单调性，即可判断A，C，D，即得答案.

【详解】函数 $y = \frac{x^2 \ln|x|}{|x|}$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$ ，

设 $f(x) = y = \frac{x^2 \ln|x|}{|x|}$ ，则 $f(-x) = \frac{(-x)^2 \ln|-x|}{|-x|} = f(x)$ ，

故 $y = \frac{x^2 \ln|x|}{|x|}$ 为偶函数，其图象关于 y 轴对称，则B中图象错误；

又当 $x > 0$ 时， $f(x) = x \ln x$ ， $f'(x) = \ln x + 1$ ，

由 $f'(x) > 0$ ，得 $x > \frac{1}{e}$ ，由 $f'(x) < 0$ ，得 $0 < x < \frac{1}{e}$ ，

故 $f(x) = x \ln x$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增，

结合选项A，C，D中图象可知只有D中图象符合题意，

故选：D

6. C

【分析】令 $x-y=m$ 、 $2x-y=n$ 得 $\begin{cases} x=n-m \\ y=n-2m \end{cases}$ ，利用不等式的性质进行运算即可得答案.

【详解】令 $x-y=m$ ， $2x-y=n$ ，则 $\begin{cases} x=n-m \\ y=n-2m \end{cases}$ ，

$\because -4 \leq x-y \leq -1$ ， $-1 \leq 2x-y \leq 5$ ，即 $-4 \leq m \leq -1$ ， $-1 \leq n \leq 5$ ，

$\therefore 2 \leq -2m \leq 8$ ，则 $1 \leq n-2m \leq 13$ ，即 $1 \leq y \leq 13$.

故选：C

7. D

【分析】由题意可得 p 的值及抛物线方程，设直线 AB 的方程为 $y=kx-2$ ，利用导数求得

在点 A 及点 B 处的切线方程，联立可得 $x_M = \frac{x_1+x_2}{2}$ ，由 M 的横坐标为 4 得 $x_1+x_2=8$ ，将

AB 的方程代入抛物线方程，可得 $x^2+8kx-16=0$ ，由韦达定理得 $k=-1$ ，进而结合抛物线定义求得弦长.

【详解】由题意可得， $F(0,-2)$ ，则 $p=4$ ，抛物线方程为 $x^2=8y$ ，准线方程 $y=\frac{p}{2}=2$.

由题意，直线 AB 的斜率存在，设直线 AB 的方程为 $y=kx-2$ ，

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，其中 $y_1 = -\frac{x_1^2}{8}$ ， $y_2 = -\frac{x_2^2}{8}$ ，

由 $y = -\frac{x^2}{8}$ ，得 $y' = -\frac{x}{4}$.

$\therefore$ 在点 A 处的切线方程为 $y-y_1 = -\frac{x_1}{4}(x-x_1)$ ，化简得 $y = -\frac{x_1}{4}x + \frac{x_1^2}{8}$ ，①

同理可得在点^B处的切线为 $y = -\frac{x_2}{4}x + \frac{x_2^2}{8}$ ，②

联立①②得 $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ，由^M的横坐标为4，得 $x_1 + x_2 = 8$ ，

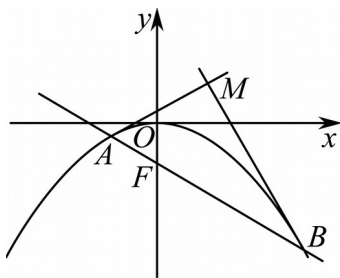
将 AB 的方程代入抛物线方程，可得 $x^2 + 8kx - 16 = 0$ ，

$\therefore \Delta = 64k^2 + 64 > 0$ ， $x_1 + x_2 = -8k = 8$ ，得 $k = -1$ ，

$\therefore y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) - 4 = -1 \times 8 - 4 = -12$ ，

则 $|AB| = |AF| + |BF| = \frac{p}{2} - y_1 + \frac{p}{2} - y_2 = p - (y_1 + y_2) = 4 - (-12) = 16$ 。

故选：D.



8. B

【分析】设 $AB = x$ ，则三棱锥 $P-ABC$ 的体 $V = -\frac{1}{6}x^3 + x^2$ ，构造函数

$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 (0 < x < 6)$ ，利用导数求最值可得^x，再求三棱锥 $P-ABC$ 外接球半径可得

答案.

【详解】设 $AB = x$ ，则 $PA = 6 - x$ ，故三棱锥 $P-ABC$ 的体积

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot PA = \frac{1}{6} x^2 (6 - x) = -\frac{1}{6} x^3 + x^2,$$

设 $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 (0 < x < 6)$ ，则 $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x (0 < x < 6)$ ，

由 $f'(x) > 0$ ，得 $0 < x < 4$ ，由 $f'(x) < 0$ ，得 $4 < x < 6$ ，则 $f(x)$ 在 $(0, 4)$ 上单调递增，

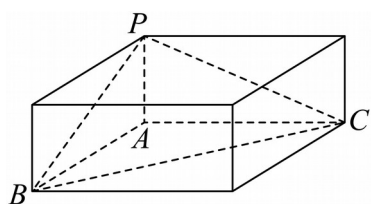
在 $(4, 6)$ 上单调递减，从而 $f(x)_{\max} = f(4) = \frac{16}{3}$ ，

即三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值是 $\frac{16}{3}$ ，此时 $x=4$ ，即 $AB=AC=4, PA=2$ ，

因为 $PA \perp$ 平面 $ABC, AB \perp AC$ ，把三棱锥 $P-ABC$ 补成一个长方体，则三棱锥 $P-ABC$ 与所补成的长方体有相同的外接球，

所以外接球的半径 $R = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 3$ ，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$ 。

故选：B.



9. BCD

【分析】根据椭圆方程、双曲线方程以及圆的方程的概念求解.

【详解】对 A, 当 $m = -2$ 时, 曲线方程为 $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{3} = 1$, 所以曲线表示的图形不是一个圆, 故

A 错误;

对 B, 当 $m = 2$ 时, 曲线方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$, 所以曲线表示的图形是一个焦点在 x 轴上的椭圆,

故 B 正确;

对 C, 当 $m = 3$ 时, 曲线方程为 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1$, 即 $x^2 + y^2 = 2$, 所以曲线表示的图形是一个圆,

故 C 正确;

对 D, 当 $m=4$ 时, 曲线方程为 $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$, 所以曲线表示的图形是一个焦点在 y 轴上的椭圆, 故 D 正确;

故选:BCD.

10. ABC

【分析】由内角和定理以及诱导公式逐一判断即可.

【详解】在 $\triangle ABC$ 中, 有 $A+B+C=\pi$, 则 $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$, A 正确;

$\sin \frac{B+C}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) = \cos \frac{A}{2}$, B 正确;

$\tan(A+B) = \tan(\pi-C) = -\tan C \left(C \neq \frac{\pi}{2} \right)$, C 正确;

$\cos(A+B) = \cos(\pi-C) = -\cos C$, D 错误;

故选: ABC.

11. AD

【分析】根据已知证明 $\frac{\frac{1}{a_{n+1}} + 3}{\frac{1}{a_n} + 3}$ 为定值即可判断 A; 由 A 选项结合等比数列的通项即可判断

B; 作差判断 $a_{n+1} - a_n$ 的符号即可判断 C; 利用分组求和法即可判断 D.

【详解】因为 $a_1=1, a_{n+1} = \frac{a_n}{2+3a_n}$,

所以 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2+3a_n}{a_n} = \frac{2}{a_n} + 3$, 所以 $\frac{1}{a_{n+1}} + 3 = 2 \left(\frac{1}{a_n} + 3 \right)$,

又因为 $\frac{1}{a_1} + 3 = 4$,

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}+3\right\}$ 是以 4 为首项, 2 为公比的等比数列, 故 A 正确;

$\frac{1}{a_n}+3=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$, 即 $a_n=\frac{1}{2^{n+1}-3}$, 故 B 不正确;

因为 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2^{n+2}-3}-\frac{1}{2^{n+1}-3}=\frac{(2^{n+1}-3)-(2^{n+2}-3)}{(2^{n+2}-3)(2^{n+1}-3)}=\frac{-2^{n+1}}{(2^{n+2}-3)(2^{n+1}-3)}$,

因为 $n\geq 1$, 所以 $2^{n+2}-3>0, 2^{n+1}-3>0, 2^{n+1}>0$,

所以 $a_{n+1}-a_n<0$, 所以 $\{a_n\}$ 为递减数列, 故 C 错误;

$\frac{1}{a_n}=2^{n+1}-3$,

则 $T_n=(2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1})-3n=\frac{4(1-2^n)}{1-2}-3n=2^{n+2}-3n-4$, 故 D 正确.

故选: AD.

12. ABC

【分析】根据题意可知点 (a,b) 在 $f(x)=e^x$ 下方及 x 轴上方, 从而可对 A 判断; 设出 $y=e^x$

切点 (x_0, y_0) , 求出切线方程, 再结合题意中的几何条件, 从而可对 B 判断; 构造函数

$F(x)=\frac{x^2}{e^x}$, 利用导数分别可求出 $F(x)$ 的单调性及最值情况, 画出相应图象, 从而可对

C、D 判断求解.

【详解】对 A: 由题意知可知当点 (a,b) 在曲线 $f(x)=e^x$ 的下方和 x 轴上方才可以作出两条切线,

所以 $0<b<e^a$, 故 A 正确.

对 B: 由 $f(x) - kx \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 等价于 $y = e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上横在 $y = kx$ 上方,

设 $y = e^x$ 的切点坐标为 (x_0, y_0) , 其切线方程为 $y - e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0)$,

对应的切线经过坐标原点, 将 $(0, 0)$ 代入解得 $x_0 = 1$, 其切线斜率 $k = e$,

所以实数 k 的取值范围为 $0 \leq k \leq e$, 故 B 正确.

对 C: 若 $g(x) \leq mf(x)$ 在 $[1, 3]$ 上恒成立, 则 $m \geq \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2}{e^x}$ 在 $[1, 3]$ 时恒成立,

即 $m \geq \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right)_{\max}$, $x \in [1, 3]$, 设 $F(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2}{e^x}$, $x \in [1, 3]$, 则 $F'(x) = \frac{x(2-x)}{e^x}$,

当 $x \in [1, 2]$ 时, $F'(x) > 0$, 当 $x \in (2, 3]$, $F'(x) < 0$,

所以 $F(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增, $(2, 3]$ 上单调递减,

当 $x = 2$ 时, $F(x)$ 取到极大值也是最大值为 $F(2) = \frac{4}{e^2}$, 所以 $m \geq \frac{4}{e^2}$, 故 C 正确.

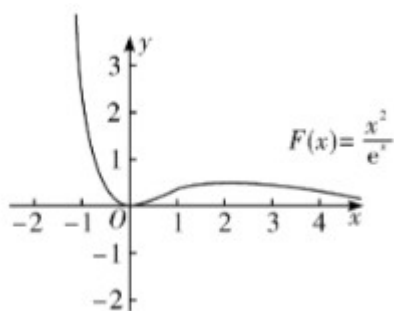
对 D: 由 C 知, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $F'(x) < 0$, 当 $x \in (0, 2)$ 时, $F'(x) > 0$,

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $F'(x) < 0$,

所以 $F(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ 上单调递减, $(0, 2)$ 上单调递增,

当 $x = 0$ 时, $F(x)$ 取到极小值 $F(0) = 0$, 当 $x = 2$ 时, $F(x)$ 取到极大值 $F(2) = \frac{4}{e^2}$,

可画出函数 $F(x)$ 的图象如下:



要求函数 $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} - t$ 的零点，即求 $y = F(x)$ 与 $y = t$ 图象的交点个数，

所以可知 $t > \frac{4}{e^2}$ 或 $t = 0$ 时，有且只有一个零点，故 D 错误.

故选：ABC.

【点睛】方法点睛：

(1) 导函数中常用的两种常用的转化方法：一是利用导数研究含参函数的单调性，常化为不等式恒成立问题. 注意分类讨论与数形结合思想的应用；二是函数的零点、不等式证明常转化为函数的单调性、极(最)值问题处理；

(2) 利用导数解决含参函数的单调性问题时，一般将其转化为不等式恒成立问题，解题过程中要注意分类讨论和数形结合思想的应用；

(3) 证明不等式，构造一个适当的函数，利用它的单调性进行解题，是一种常用技巧. 许多问题，如果运用这种思想去解决，往往能获得简洁明快的思路，有着非凡的功效.

13. $\frac{7}{13}$

【分析】根据题意，利用等差数列前 n 项和公式，化简比例式

$$\frac{a_{10}}{b_{10}} = \frac{2a_{10}}{2b_{10}} = \frac{a_1 + a_{19}}{b_1 + b_{19}} = \frac{\frac{19}{2}(a_1 + a_{19})}{\frac{19}{2}(b_1 + b_{19})} = \frac{S_{19}}{T_{19}}, \text{ 代入即可求解.}$$

【详解】因为 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{n+2}{2n+1}$,

$$\text{所以 } \frac{a_{10}}{b_{10}} = \frac{2a_{10}}{2b_{10}} = \frac{a_1 + a_{19}}{b_1 + b_{19}} = \frac{\frac{19}{2}(a_1 + a_{19})}{\frac{19}{2}(b_1 + b_{19})}$$

$$= \frac{S_{19}}{T_{19}} = \frac{19+2}{2 \times 19+1} = \frac{21}{39} = \frac{7}{13}.$$

故答案为: $\frac{7}{13}$

14. $x^2 + y^2 - 13 - 0y +$ =

【分析】根据题意可知点 $P(3,5)$ 在圆外, 可求出切点弦 AB 方程, 再利两圆公共弦方程设

出 $\triangle PAB$ 的外接圆方程, 从而可求解.

【详解】由题意得 $(3-1)^2 + (5-2)^2 = 13 > 5$, 所以点 $P(3,5)$ 在圆外,

由圆外一点引圆的两条切线, 切点弦方程知识可得 $(3-1)(x-1) + (5-2)(y-2) = 5$,

即直线 $AB: 2x + 3y - 13 = 0$,

$\triangle PAB$ 的外接圆与圆 M 的交线为 AB , 则可得外接圆方程为:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 - 5 + \lambda(2x + 3y - 13) = 0,$$

将 $P(3,5)$ 代入, 得 $(3-1)^2 + (5-2)^2 - 5 + \lambda \cdot (2 \times 3 + 3 \times 5 - 13) = 0$, 解得 $\lambda = -1$,

即外接圆方程为 $(x-1)^2 + (y-2)^2 - 5 - (2x + 3y - 13) = 0$, 即 $x^2 + y^2 - 4x - 7y + 13 = 0$.

故答案为: $x^2 + y^2 - 4x - 7y + 13 = 0$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/767032102036006050>