

第五章 热力学第一定律

5-1. 0.020Kg 的氮气温度由 17°C 升为 27°C ，若在升温过程中：（1）体积保持不变；（2）压强保持不变；（3）不与外界交换热量，试分别求出气体内能的改变，吸收的热量，外界对气体所作的功，设氮气

可看作理想气体，且 $C_v = \frac{3}{2}R$ ，

解：理想气体内能是温度的单值函数，一过程中气体温度的改变相同，所以内能的改变也相同，为：

$$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{M}{\mu} C_v (T_2 - T_1) = \frac{M}{\mu} C_v (t_2 - t_1) \\ &= \frac{20}{4} \times \frac{3}{2} \times 8.31 (27 - 17) = 623.25 \text{ J}\end{aligned}$$

热量和功因过程而异，分别求之如下：

（1）等容过程：

$$V = \text{常量} \quad A = 0$$

由热力学第一定律， $Q = \Delta U$

（

（2）等压过程：

$$Q = \frac{M}{\mu} C_p (T_2 - T_1) = 1038.75 \text{ J}$$

由热力学第一定律，

$$A = \Delta U - Q = 623.25 - 1038.75 \text{ J} = -415.5 \text{ J}$$

负号表示气体对外做功，

（3）绝热过程

$$Q = 0$$

由热力学第一定律 $A = \Delta U$

—

5-2. 分别通过下列过程把标准状态下的 0.014Kg 氮气压缩为原体积的一半；（1）等温过程；（2）绝热过程；（3）等压过程，试分别求出在这些过程中气体内能的改变，传递的热量和外界对气体所作的功，设氮

气可看作理想气体，且 $C_v = \frac{5}{2}R$ ，

解：把上述三过程分别表示在 P-V 图上，

(1) 等温过程

理想气体内能是温度的单值函数，过程中温度不变，故

$$\Delta U = 0$$

$$A = -\nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{M}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_1}{V_2}$$

$$= \frac{14}{28} \times 8.31 \times 273 \times \ln 2 = 786 \text{ J}$$

由热一、 $Q = -A = -786 \text{ J}$

*

负号表示系统向外界放热

(2) 绝热过程

$$Q = 0$$

由 $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ 或 $T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$

得

$$\Delta U = \frac{M}{\mu} C_v (T_2 - T_1)$$

$$= \frac{M}{\mu} C_v T_1 \left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1 \right]$$

$$= \frac{14}{28} \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times 273 [2^{\frac{5}{2}-1}]$$

$$= 906 \text{ J}$$

由热力学第一定律 $A = \Delta U$

另外，也可以由 $A = \frac{1}{\gamma-1} (p_2 V_2 - p_1 V_1)$

.

及 $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$

先求得 A

(3) 等压过程, 有

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2} T_1$$

而 $C_P = C_V + R = \frac{5}{2}R + R = \frac{7}{2}R$

所以 $Q = \frac{M}{\mu} C_P (T_2 - T_1) = -\frac{M}{\mu} C_P \times \frac{1}{2} T_1$

$$= -\frac{14}{28} \times \frac{7}{2} \times 8.31 \times \frac{1}{2} \times 273$$

$$= -1985J$$

>

$$\Delta U = \frac{M}{\mu} C_V (T_2 - T_1)$$

$$= -\frac{M}{\mu} C_V \times \frac{1}{2} T_1$$

$$= -\frac{14}{28} \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times \frac{1}{2} \times 273$$

$$= -1418J$$

由热力学第一定律,

$$A = \Delta U - Q = -1418 - (-1985) = 567J$$

A 也可以由 $A = -P_1(V_2 - V_1)$ 求之

另外, 由计算结果可见, 等压压缩过程, 外界做功, 系统放热, 内能减少, 数量关系为, 系统放的热等于其内能的减少和外界作的功。

{

5-3 在标准状态下的 0.016Kg 的氧气, 分别经过下列过程从外界吸收了 80cal 的热量。(1) 若为等温过程, 求终态体积。(2) 若为等容过程, 求终态压强。(3) 若为等压过程, 求气体内能的变化。设

$$C_V = \frac{5}{2}R$$

氧气可看作理想气体, 且

解: (1) 等温过程

$$V_1 = \frac{M}{\mu} C_v \times 22.4 \times 10^{-2} \text{ m}^3$$

$$Q = -A = \frac{M}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

则

$$\ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{Q}{\frac{M}{\mu} R T_1} = \frac{80}{\frac{16}{32} \times 2 \times 273} = 0.293$$

故

$$V_2 = V_1 e^{0.293} = 1.5 \times 10^{-2} \text{ m}^3$$

(2) 等容过程

<

$$\therefore \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1}$$

$$P_1 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$Q = \frac{M}{\mu} C_v (T_2 - T_1)$$

$$= \frac{M}{\mu} C_v T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right)$$

$$= \frac{M}{\mu} C_v T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right)$$

$$\therefore P_2 = \left(\frac{Q}{\frac{M}{\mu} C_v T_1} + 1 \right) \bullet P_1$$

$$= \left(\frac{80}{\frac{16}{32} \times \frac{5}{2} \times 2 \times 273} + 1 \right) \bullet P_1$$

$$= 1.12P_1 = 1.13 \times 10^5 \text{ Pa}$$

(3) 等压过程

$$\therefore Q = \frac{M}{\mu} C_p (T_2 - T_1)$$

$$\therefore \Delta U = \frac{M}{\mu} C_v (T_2 - T_1)$$

$$= \frac{M}{\mu} C_v \cdot \frac{Q}{\frac{M}{\mu} C_p}$$

$$= \frac{C_v}{C_p} Q = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{7}{2}R} Q = \frac{5}{7} \times 80 \times 4.18 = 239 \text{ J}$$

5-4 为确定多方过程方程 $PV^n = C$ 中的指数 n , 通常取 $\ln p$ 为纵坐标, $\ln V$ 为横坐标作图。试讨论在这种图中多方过程曲线的形状, 并说明如何确定 n 。

解: 将 $PV^n = C$ 两边取对数

$$\ln p + n \ln V = \ln C$$

或
$$\ln p = -n \ln V + \ln C$$

比较 $y = kx + b$ 知在本题图中多方过程曲线的形状为一直线, 如图所示。

\therefore 直线的斜率为 $-n$

\therefore 可由直线的斜率求 n 。

$$-n = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\pi - \beta) = -\operatorname{tg} \beta$$

$$n = \operatorname{tg} \beta = \frac{A}{B}$$

或

即 n 可由两截距之比求出。

5-5 室温下一定量理想气体氧的体积为 2.31 ，压强为 1.0atm 。经过一多方过程后体积变为 4.11 ，压强为 0.5atm 。试求：(1) 多方指数 n ；(2) 内能的变化；(3) 吸收的热量；(4) 氧膨胀时对外界

所作的功。设氧的 $C_v = \frac{5}{2}R$ 。

【

$$\text{解：(1) } P_1 V_1^n = P_2 V_2^n \quad \text{或} \quad \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^n = \frac{P_1}{P_2}$$

取对数得

$$n = \frac{\ln \frac{P_1}{P_2}}{\ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{\ln \frac{1.0}{0.5}}{\ln \frac{4.1}{2.3}} = 1.2$$

$$(2) \quad \Delta U = \frac{M}{\mu} C_v (T_2 - T_1)$$

$$= \frac{M}{\mu} \frac{5}{2} R (T_2 - T_1)$$

$$= \frac{5}{2} (P_2 V_2 - P_1 V_1) = -63\text{J}$$

内能减少。

$$(3) \quad Q = \frac{M}{\mu} C (T_2 - T_1)$$

1

$$= \frac{M}{\mu} C_v \frac{n-\gamma}{n-1} (T_2 - T_1)$$

$$= \frac{M}{\mu} \frac{5}{2} R \frac{n-\gamma}{n-1} (T_2 - T_1)$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \frac{n-\gamma}{n-1} (P_2 V_2 - P_1 V_1) = 63\text{J}$$

(4) 由热力学第一定律

$$-A = Q - \Delta U = 63 - (-63) = 126J$$

也可由 $A = \frac{1}{n-1}(P_2V_2 - P_1V_1)$ 求 $-A$

5-6 一摩尔理想气体氦，原来的体积为 8.01 ，温度为 $27^\circ C$ ，设经过准静态绝热过程体积被压缩为 1.01 ，求在压缩过程中，外界对系统所作的功。设氦气的 $C_v = \frac{3}{2}R$ 。

解： $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$

由热力学第一定律

$$\begin{aligned} A = \Delta U &= C_v(T_2 - T_1) = C_v T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \\ &= C_v T_1 \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] \\ &= \frac{3}{2} \times 8.31 \times (273 + 27) \left[\left(\frac{8.0}{1.0} \right)^{\frac{5}{3}-1} - 1 \right] \\ &= 3688J \end{aligned}$$

5-7 在标准状态下的 $0.016Kg$ 氧气，经过一绝热过程对外做功 $80J$ 。求终态压强、体积和温度。设氧气为理想气体，且 $C_v = \frac{5}{2}R$ ， $\gamma = 1.4$

解：绝热 $Q = 0$ 由热力学第一定律

$$-A = -\Delta U = \frac{M}{\mu} C_v (T_1 - T_2)$$

$$\therefore T_2 = T_1 - \frac{-A}{\frac{M}{\mu} C_v} = 265K$$

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore V_2 &= V_1 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ &= \frac{16}{32} \times 22.4 \times 10^{-3} \left(\frac{273}{265} \right)^{\frac{1}{1.4-1}} \\ &= 12.3 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$P_2 V_2 = \frac{M}{\mu} R T_2$$

$$\begin{aligned} \therefore P_2 &= \frac{M}{\mu} R \frac{T_2}{V_2} = \frac{16}{32} \times 8.31 \times \frac{265}{12.3 \times 10^{-3}} \\ &= 9 \times 10^4 \text{ Pa} \end{aligned}$$

✧

5—8.0.0080Kg 氧气。原来温度为 27°C ，体积为 0.41l，若

- (1) 经过绝热膨胀体积增为 4.1l；
- (2) 先经过等温过程再经过等容过程达到与 (1) 同样的终态。

试分别计算在以上两种过程中外界对气体所作的功。设氧气可看作理想气体，且 $C_v = \frac{5}{2} R$ 。

解：如图，将两种过程在 $P-V$ 图上表示。

(1) 绝热过程

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

$$A = \Delta U = \frac{M}{\mu} C_v (T_2 - T_1)$$

$$= \frac{M}{\mu} C_v T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right)$$

$$= \frac{M}{\mu} C_v T_1 \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] = -938 \text{ J}$$

负号表示系统对外界做功

(2) 等容过程外界对气体不作功

$$\begin{aligned} A = A_T &= -\frac{M}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \\ &= -\frac{8}{32} \times 8.31 \times (273+27) \ln \frac{4.1}{0.41} = -1435J \end{aligned}$$

5-9. 在标准状态下, 一摩尔单原子理想气体先经过一绝热过程, 再经过一等温过程, 最后压强和体积均为原来的两倍, 求整个过程中系统吸收的热量。若先经过等温过程再经过绝热过程而达到同样的状态, 则结果是否相同

解: (1) 先绝热压缩再等温膨胀, 从态 1 到态 2 如图, 对态 2

$$p_2 V_2 = 2p_1 \cdot 2V_1 = RT_2$$

$$\therefore T_2 = \frac{4p_1 V_1}{R} = 4T_1$$

$$\therefore T_1 T_1 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$$

$$T_3 = T_2 \quad V_2 = 2V_1$$

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{2V_1}{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot V_1} = 2\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 16$$

又, 仅等温过程吸热

$$\therefore Q = RT_2 \ln \frac{V_2}{V_3}$$

$$\begin{aligned} &= 4RT_1 \ln 16 = 4 \times 8.31 \times 273 \times \ln 16 \\ &= 2.52 \times 10^4 J \end{aligned}$$

?

(2) 先等温膨胀再绝热压缩, 气体从态 1 到态 2, 如图由 (1) 知 $T_2 = 4T_1$

$$\text{又 } T_4 V_4^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \quad T_4 = T_1 \quad V_2 = 2V_1$$

$$\therefore \frac{V_4}{V_1} = \frac{V_2 \left(\frac{T_2}{T_4}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}{V_1} = \frac{2V_1 \left(\frac{4T_1}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}{V_1} = 16$$

仅等温过程态 1 到态 4 吸热,

$$\therefore Q = RT_1 \ln \frac{V_4}{V_1} = \times 273 \ln 16 = \times 10^3 \text{ J}$$

可见, 结果与 (1) 中不同, 说明热量是过程量。

5-10. 一定量的氧气在标准状态下体积为 10.0l, 求下列过程中气体所吸收的热量:

(1) 等温膨胀到 20.0l ;

(2) 先等容冷却再等压膨胀到 (1) 所达到的终态。设氧气可看作理想气体, 且 $C_v = \frac{5}{2}R$ 。

解: (1) 等温膨胀

$$\begin{aligned} Q &= \frac{M}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = R V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \\ &= \times 10^5 \times 10 \times 10^{-3} \times \ln \frac{20}{10} \\ &= 702 \text{ J} \end{aligned}$$

(2) 先等容冷却在等压膨胀

$$\therefore p_1 V_1 = p_2 V_2$$

$$\therefore p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2} = \frac{p_1}{2}$$

对 1-2-3 全过程:

$$T_2 = T_1 \quad U = U(T) \quad \text{则} \quad \Delta U = 0$$

由热力学第一定律

$$Q = -A = p_2 (V_2 - V_3) = \frac{1}{2} p_1 (V_2 - V_1)$$

$$= \frac{1}{2} \times 1.013 \times 10^5 (20.0 - 10.0) \times 10^{-3}$$

$$= 507 \text{ J}$$

5-11. 图 5-11 中的实线表示一任意形状系统的界面。设当系统的界面由实线膨胀到虚线的微元过程中，系统总体积增加 dv ，而在这过程界面上各均受到与界面垂直的外界对系统所作体积功为 $-p_e dv$ ；若过程为准静态的，则此功又可表示为 $-p dv$ ，其中 P 表示系统内部均匀压强。

证：如图，当系统的界面由实线膨胀到虚线的微元过程中，所取面元 ds 移动距离 dl ，移动方向与 P_e 相反，所以此微元过程中外界压强 P_e 对面元 ds 作的功为

$$-p_e ds dl$$

由于 P_e 在界面上各处均匀，且在微元过程中可视为不变，则外界对整个系统所作的体积功为

$$dA = \oint -p_e ds dl = -p_e dv$$

对于无摩擦的准静态过程 $p = p_e$

故此功又可表为 $dA = -p dv$

其中 P 表示系统内部均匀压强。

5-13. 某气体服从状态方程 $p = (v-b) = RT$ ，内能为： $u = C_v T + u_0$

C_v 、 u_0 为常数。试证明，在准静态绝热过程中，这气体满足方程：

$$p(v-b)^\gamma = \text{常数}$$

其中 $\gamma = C_p / C_v$

证：由热力学第一定律，

$$du = dQ + dA \tag{1}$$

$$\text{由 } u = C_v T + u_0, \quad du = C_v dT$$

$$\text{对准静态绝热过程} \quad dQ = 0 \quad dA = -p dv$$

1) 式为

$$C_v dT + p dv = 0 \quad (2)$$

将 $p(v-b) = RT$ 微分

$$p dv + (v-b) dp = R dT \quad \text{代入 (2) 式得:}$$

$$\frac{C_v}{R} [p dv + (v-b) dp] + p dv = 0$$

$$\text{或} \quad \frac{dp}{p} + \frac{C_v + R}{C_v} \frac{dv}{v+b} = 0 \quad (3)$$

又, 该气体有

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p = \left(\frac{du + p dv}{dT} \right)_p$$

$$= \left[\frac{d(C_v T + u_0 + p d(\frac{RT}{p} + b))}{dT} \right]_p$$

$$= C_v + R$$

已知 C_v 为常数, 则 C_p 为常数。

?

令 $\gamma = C_p / C_v$ 则 γ 为常数

$$\text{代入 (3) 式} \quad \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dv}{v-b} = 0$$

积分得 $p(v-b)^\gamma = \text{常数}$

5-14. 在 24°C 时水蒸气的饱和气压为 p_s 。若已知在这条件下水蒸气的焓是 $h_g \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, 水的焓是 $h_f \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, 求在这条件下水蒸气的凝结热。

解: 在水蒸气凝结为水的等温等压过程中, 系统吸收的热量等于其焓的增加, 为

$$Q_p = H_{\text{水}} - H_{\text{气}} = -$$

$$= - \text{KJ} \cdot \text{Kg}^{-1}$$

即该条件下水蒸气的凝结热，负号表示水蒸气凝结时放热。

5-15. 分析实验数据表明，在 1atm 下，从 300K 到 1200K 范围内，铜的定压摩尔热容量 C_p 可表示为

$$C_p = a + bT$$

其中 $a = 2.3 \times 10^4$ ， $b = 5.92 \times 10^{-5}$ ， C_p 的单位是 ($\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \text{K}^{-1}$)。试由此计算在 1atm 下，当温度从 300K 增加到 1200K 时铜的焓的改变。

解：铜在升温过程中压强不变，吸收的热量等于其焓的增加，所以

$$\begin{aligned} H_2 - H_1 &= Q_p = \int_{T_1}^{T_2} C_p dT = \int_{T_1}^{T_2} (a + bT) dT \\ &= a(T_2 - T_1) + \frac{b}{2}(T_2^2 - T_1^2) \\ &= 2.3 \times 10^4 (1200 - 300) + \frac{1}{2} \times 5.92 (1200^2 - 300^2) = 2.47 \times 10^7 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

5-16. 设一摩尔固体的物态方程可写作

$$v = v_0 + aT + bp$$

内能可表示为 $u = CT - aPT$

其中 a 、 b 、 c 和 v_0 均是常数。试求：

(1) 摩尔焓的表达式；

(2) 摩尔热容量 C_p 和 C_v

解：(1) $h = u + pv = (CT - apT) + p(v_0 + aT + bp) = C_T + pv_0 + bp^2$

$$(2) \quad C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = C$$

利用 $C_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v$ 先将 u 表示为 T 、 v 的函数

$$u = CT - aT \frac{1}{b} (v - v_0 - aT)$$

$$\therefore C_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v$$

$$= C - \frac{a}{b} [(v - v_0 - aT) - aT]$$

$$= C - \frac{a}{b} [bp - aT]$$

$$= C + \frac{a^2}{b} T - ap$$

注意：这道题目出的有毛病，因为由热力学关系可证

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_T = -T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - p \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$$

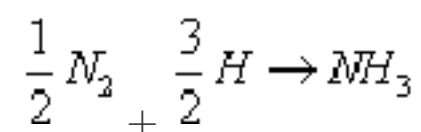
但由本题所给条件

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_T = -aT$$

$$\text{而 } -T \left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_T - p \left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_T = -aT - bp$$

显然不满足 (*) 式，即本题条件违背热力学基本关系。

5-17. 若把氮气、氢气和氨气都看作理想气体 ($p \rightarrow 0$)，由气体热力学性质表 [9] 可查到它们在 298K 的焓值分别为 $8669 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$ 。试求在定压下氨的合成热。氨的合成反应为



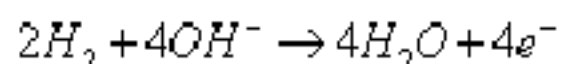
解：系统在定压下吸收的热量等于其焓的增加，为

$$\begin{aligned} Q_p &= h_{\text{氨}} - \left(\frac{1}{2} h_{\text{氮}} + \frac{3}{2} h_{\text{氢}} \right) \\ &= -29154 - \left(\frac{1}{2} \times 8669 + \frac{3}{2} \times 8468 \right) \end{aligned}$$

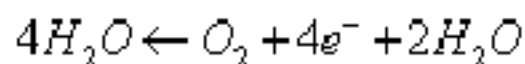
$$= -4619.5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

即氮的合成热。负号表示此合成反应是放热的。

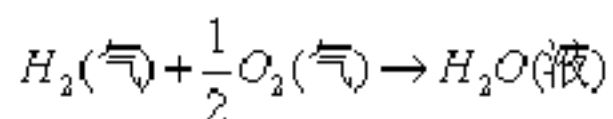
5-18. 燃料电池是把化学能直接转化为电能的装置。图 5-18 所示是燃料电池一例。把氢气和氧气连续通入多孔 Ni 电极，Ni 电极是浸在 KOH 电解溶液中的（电极的孔径很小，可使电解液因毛细现象而渗入，但氢和氧气都透不过）。负极上的化学反应是，氢与电解液中的氢氧根离子结合，生成离子和水：



电子通过电极跑到外电路去。正极上的化学反应是，氧与电解液中的水、电子结合为氢氧离子：



这燃料电池反应的总效果是：



若一燃料电池工作于 298K 定压下，在反应前后焓的改变为

$$\Delta H = -285.8 \text{ KJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

两极电压为 1.229V 。试求这燃料电池的效率。

解：定压下，1 摩尔氢气和半摩尔氧化合生成 1 摩尔水时吸收的热量为

$$Q = \Delta H = -285.8 \text{ KJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

负号表示实际放出的热量为 $Q' = -285.8 \text{ KJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

每产生 1 个水分子就有两个电子自阴极跑到阳极，因而生成 1 摩尔的水就有 $2 \times 6.02 \times 10^{23}$ 个电子自阴极跑到阳极。每个电子的电量为 1.60×10^{-19} 库仑，故总电量为

$$q = 2 \times 1.60 \times 10^{-19} \times 6.02 \times 10^{23} \text{ 库仑}$$

已知两极间电压为 1.229V ，故所作电功为

$$A = 1.229 \times 2 \times 1.60 \times 10^{-19} \times 6.02 \times 10^{23} \text{ 焦耳}$$

则，这燃料电池的效率为

$$\eta = \frac{A}{Q'} = 83\%$$

5-19. 大气温度随高度 Z 降低的主要原因是，低处与高处各层间不断发生空气交换。由于空气的导热性能不好，所以空气在升高时的膨胀（及下降时的压缩）可认为是绝热过程。若假设过程是准静态的，并注意到大气达到稳定机械平衡时压强差与高度的关系，证明空气的温度梯度为

$$\frac{dT}{dZ} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T}{p} \rho g$$

其中 p 为空气压强， ρ 、 T 分别为空气密度与温度， γ 是空气的 C_p/C_v 。

证：所谓“大气达稳定机械平衡”，指重力场中的气体分子在热运动和重力两种互相对立的作用下的平衡，平衡时分子数密度随高度减小的规律可由玻尔兹曼分布律给出，结合 $p=nkT$ 可得大气压强差与高度差的关系（等温气压公式）：

$$-\frac{\mu g}{RT} Z$$

$$P = P_0 e$$

$$\text{微分得, } d_p = P_0 e^{-\frac{\mu g}{RT} Z} \left(-\frac{\mu g}{RT}\right) dZ$$

$$= -p \frac{\mu g}{RT} dZ$$

$$\text{从 } pV = \frac{M}{\mu} RT \text{ 有 } \rho = \frac{M}{V} = \frac{p\mu}{RT} \text{ 代入上式得}$$

$$dp = -\rho g dZ \quad (1)$$

认为一定量的空气上升时经历的过程，是理想气体的准静态绝热膨胀，有

$$p^{\gamma-1} T^{\gamma} = C$$

取对数，再微分，有

$$(\gamma-1) \frac{dp}{p} - \gamma \frac{dT}{T} = 0$$

$$\text{或 } dT = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T}{p} dp$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/767055105102006156>