

重难点突破 02 函数的综合应用

目录

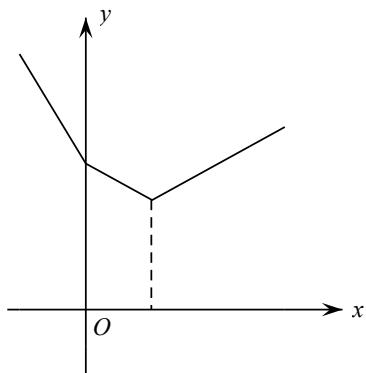
方法技巧总结

1、高考中考查函数的内容主要是以综合题的形式出现，通常是函数与数列的综合、函数与不等式的综合、函数与导数的综合及函数的开放性试题和信息题，求解这些问题时，着重掌握函数的性质，把函数的性质与数列、不等式、导数等知识点融会贯通，从而找到解题的突破口，要求掌握二次函数图像、最值和根的分布等基本解法；掌握函数图像的各种变换形式（如对称变换、平移变换、伸缩变换和翻折变换等）；了解反函数的概念与性质；掌握指数、对数式大小比较的常见方法；掌握指数、对数方程和不等式的解法；掌握导数的定义、求导公式与求导法则、复合函数求导法则及导数的定义、求导公式与求导法则、复合函数求导法则及导数的几何意义，特别是应用导数研究函数的单调性、最值等。

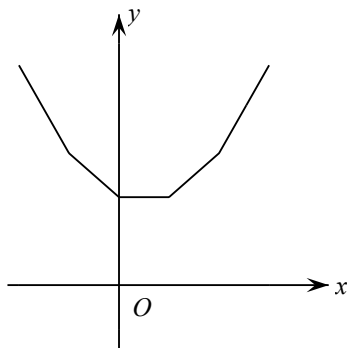
2、函数 $f(x) = \sum_{i=1}^n |x - a_i|$ 的图象与性质

分奇、偶两种情况考虑：

比如图（1）函数 $f(x) = |x| + |x-1| + |x-3|$ ，图（2）函数 $g(x) = |x| + |x-1| + |x-2| + |x+1|$



图（1）



图（2）

（1）当 n 为奇数时，函数 $f(x) = \sum_{i=1}^n |x - a_i|$ 的图象是一个“V”型，且在“最中间的点”取最小值；

（2）当 n 为偶数时，函数 $f(x) = \sum_{i=1}^n |x - a_i|$ 的图象是一个平底型，且在“最中间水平线段”取最小值；

若 $a_i (i \in \mathbb{N}^*)$ 为等差数列的项时，奇数的图象关于直线 $x = a_{\frac{n+1}{2}}$ 对称，偶数的图象关于直线 $x = \frac{x_{\text{左中}} + x_{\text{右中}}}{2}$

对称。

3、若 $f(x)$ 为 $[m, n]$ 上的连续单峰函数，且 $f(m) = f(n)$, x_0 为极值点，则当 k, b 变化时，

$\therefore$ 当 $a_n < x_0$ 时, $a_{n+1} - a_n = e^{a_n} - 2a_n - 1 < 0$, 数列单调递减,

$$a_1 = \frac{1}{2} < x_0, \therefore a_2 = f(a_1) < a_1 = \frac{1}{2} < x_0, \text{同理}, a_3 < a_2 = f(a_1) < \frac{1}{2},$$

迭代下去, 可得 $0 < a_n < a_{n-1} < \dots < a_1 = \frac{1}{2}$, 数列单调递减,

故选项 B 和选项 C 都错误;

$$\text{又 } 0 < a_n < a_{n-1} < \dots < a_2 = e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} - 1 < 1.7 - 1.5 = 0.2,$$

$$\therefore S_{100} < 99a_2 + a_1 = 20.3, \text{故 } D \text{ 错误};$$

$$\text{对于 } A, |4a_2 - 3a_1| > |3 \times 0.5 - 4 \times 0.2| = 0.7,$$

$$\text{而 } a_5 < a_2 < 0.2 < 0.7,$$

$$\therefore a_5 < |4a_2 - 3a_1|, \text{故 } A \text{ 正确}.$$

故选 A.

例 3. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = e^x - x - 1$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = f(a_n), \text{则下列有关数列 } \{a_n\} \text{ 的叙述正确的是 ()}$$

$$A. a_2 > \frac{1}{4}$$

$$B. a_6 < a_7$$

$$C. S_{100} < 26$$

$$D. a_5 > |4a_2 - 3a_1|$$

【答案】C

【解析】对于 A 选项, $a_2 = e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} - 1 = e^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} < \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$, 故 A 错误;

对于 B 选项, 由 $e^x \dots x + 1$ 知, $a_{n+1} = f(a_n) = e^{a_n} - a_n - 1 \dots 0$,

故 $\{a_n\}$ 为非负数列, 又 $a_{n+1} - a_n = e^{a_n} - 2a_n - 1$,

设 $g(x) = e^x - 2x - 1 (x > 0)$, 则 $g'(x) = e^x - 2$,

易知 $g(x)$ 在 $[0, \ln 2)$ 单调递减, 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{所以 } -\frac{1}{2} < 1 - 2\ln 2 = g(x)_{\min} < g(0) = 0,$$

$$\text{又 } 0 < a_1 = \frac{1}{2} < \ln 2, \text{所以 } a_2 - a_1 < 0, \text{从而 } a_{n+1} - a_n < 0,$$

所以 $\{a_n\}$ 为递减数列, 且 $0, a_n, \frac{1}{2}$, 故 B 错误;

对于 C 选项,

因为数列 $\{a_n\}$ 为递减数列, 当 $n > 2$ 时, 有 $a_n < a_2 < \frac{1}{4}$,

$$S_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4} = \frac{101}{4} < 26,$$

故 C 正确; 对于 D 选项, 因为 $a_5 < \frac{1}{4}$, 而 $|4a_2 - 3a_1| = |4a_2 - \frac{3}{2}| > \frac{1}{2}$, 故 D 错误. 故选 C.

变式 1. (2023·全国·高三专题练习) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n > 0$, 且 $a_n^2 = 3a_{n+1}^2 - 2a_{n+1}(n \in \mathbb{N}^*)$, 下列说法正确的是 ()

- A. 若 $a_1 = \frac{1}{2}$, 则 $a_n > a_{n+1}$ B. 若 $a_1 = 2$, 则 $a_n \geq 1 + \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1}$
- C. $a_1 + a_5 \leq 2a_3$ D. $|a_{n+2} - a_{n+1}| \geq \frac{\sqrt{3}}{3} |a_{n+1} - a_n|$

【答案】B

【解析】 $a_n^2 = 3a_{n+1}^2 - 2a_{n+1}(n \in \mathbb{N}^*)$, 故 $a_n^2 - 1 = 3a_{n+1}^2 - 2a_{n+1} - 1$, $(a_n + 1)(a_n - 1) = (3a_{n+1} + 1)(a_{n+1} - 1)$.

$a_n > 0$, 故 $a_n + 1 > 0$ 且 $3a_{n+1} + 1 > 0$, 于是 $(a_n - 1)$ 与 $(a_{n+1} - 1)$ 同号,

即 $(a_n - 1)(a_{n+1} - 1) > 0$.

对选项 A: 若 $a_1 = \frac{1}{2}$, 则 $a_1 - 1 = -\frac{1}{2} < 0$, 则 $a_n - 1 < 0$,

$a_n^2 - a_{n+1}^2 = 2a_{n+1}(a_{n+1} - 1) < 0$, 所以 $a_n < a_{n+1}$, 错误;

对选项 B: $a_1 = 2$, $a_1 - 1 = 1 > 0$, 则 $a_n - 1 > 0$, 即 $a_n > 1$,

于是 $a_n^2 - a_{n+1}^2 = 2a_{n+1}(a_{n+1} - 1) > 0$, 即 $a_n > a_{n+1}$, 数列 $\{a_n\}$ 单调递减, $a_n < a_1 = 2$,

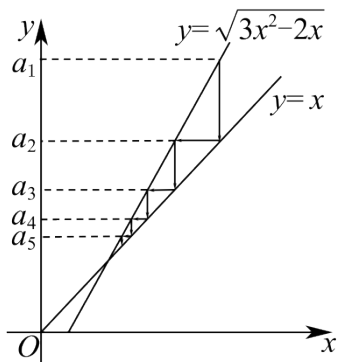
$4 \geq 2a_{n+1}$, $7(a_{n+1} - a_n) < 0$, 故 $4 \geq 7(a_{n+1} - a_n) + 2a_{n+1}$, 即 $\frac{a_n + 1}{3a_{n+1} + 1} \geq \frac{3}{7}$,

$(a_n + 1)(a_n - 1) = (3a_{n+1} + 1)(a_{n+1} - 1)$, 故 $\frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1} = \frac{a_n + 1}{3a_{n+1} + 1} \geq \frac{3}{7}$,

故 $a_n - 1 \geq \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1}$, 故 $a_n \geq 1 + \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1}$, 正确;

对选项 C: 考虑函数 $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x}$, $x > \frac{2}{3}$, $f'(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x}} > 0$,

函数单调递增, 结合 $y=x$ 的图像, 如图所示:



由图可知当 $a_n > 0$ 时, 数列 $\{a_n - a_{n+1}\}$ 递减,

$a_1 - a_2 + a_2 - a_3 > a_3 - a_4 + a_4 - a_5$, 所以 $a_1 - a_3 > a_3 - a_5$, 即 $a_1 + a_5 > 2a_3$, 不正确;

对选项 D: 设 $a_{n+1} = x$, 则 $a_n = \sqrt{3x^2 - 2x}$, $a_{n+2} = \frac{1 + \sqrt{1 + 3x^2}}{3}$,

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \geq \frac{\sqrt{3}}{3} |a_{n+1} - a_n|, \text{ 即 } \left| \frac{1 + \sqrt{1 + 3x^2}}{3} - x \right| \geq \frac{\sqrt{3}}{3} |x - \sqrt{3x^2 - 2x}|,$$

等价于 $2 + 2\sqrt{3}x\sqrt{9x^2 - 6x} \geq 2\sqrt{1 + 3x^2}(3x - 1)$, 化简得 $x^2 - 2x + 1 \leq 0$,

而 $x^2 - 2x + 1 \leq 0$ 显然不恒成立, 不正确;

故选: B.

变式 2. (2023·陕西渭南·统考二模) 已知函数 $f(x) = \sin x + \ln x$, 将 $f(x)$ 的所有极值点按照由小到大的顺序排列, 得到数列 $\{x_n\}$, 对于 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 则下列说法中正确的是 ()

A. $n\pi < x_n < (n+1)\pi$

B. $x_{n+1} - x_n < \pi$

C. 数列 $\left\{ \left| x_n - \frac{(2n-1)\pi}{2} \right| \right\}$ 是递增数列

D. $f(x_{2n}) < -1 + \ln \frac{(4n-1)\pi}{2}$

【答案】D

【解析】 $f(x)$ 的极值点为 $f'(x) = \cos x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上的变号零点.

即为函数 $y = \cos x$ 与函数 $y = -\frac{1}{x}$ 图像在 $(0, +\infty)$ 交点的横坐标.

又注意到 $x \in (0, +\infty)$ 时, $-\frac{1}{x} < 0$, $k \in \mathbf{N}$ 时, $\cos(\pi + 2k\pi) = -1 < -\frac{1}{\pi + 2k\pi}$,

$k \in \mathbf{N}^*$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ 时, $\cos x > 0$.

据此可将两函数图像画在同一坐标系中, 如下图所示.

A 选项, 注意到 $k \in \mathbf{N}$ 时, $f'\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} > 0$, $f'(\pi + 2k\pi) = -1 + \frac{1}{\pi + 2k\pi} < 0$,

$$f'\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi} > 0.$$

结合图像可知当 $n = 2k - 1$, $k \in \mathbf{N}$, $x_n \in \left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, n\pi\right) \subseteq ((n-1)\pi, n\pi)$.

当 $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}$, $x_n \in \left((n-1)\pi, \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right) \subseteq ((n-1)\pi, n\pi)$. 故 A 错误;

B 选项, 由图像可知 $x_3 > \frac{5}{2}\pi$, $x_2 < \frac{3}{2}\pi$, 则 $x_3 - x_2 > \pi$, 故 B 错误;

C 选项, $\left|x_n - \frac{(2n-1)\pi}{2}\right|$ 表示两点 $(x_n, 0)$ 与 $\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, 0\right)$ 间距离, 由图像可知,

随着 n 的增大, 两点间距离越来越远, 即 $\left\{ \left| x_n - \frac{(2n-1)\pi}{2} \right| \right\}$ 为递增数列, 故 C 错误;

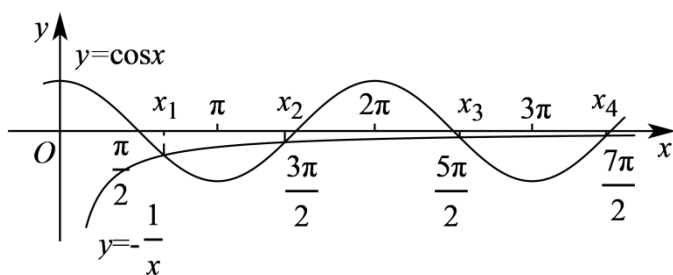
D 选项, 由 A 选项分析可知, $x_{2n} \in \left((2n-1)\pi, \frac{4n-1}{2}\pi \right), n \in \mathbb{N}$,

又结合图像可知, 当 $x \in \left(x_{2n}, \frac{(4n-1)}{2}\pi \right)$ 时, $\cos x > -\frac{1}{x}$, 即此时 $f'(x) > 0$,

得 $f(x)$ 在 $\left(x_{2n}, \frac{(4n-1)}{2}\pi \right)$ 上单调递增,

则 $f(x_{2n}) < f\left(\frac{(4n-1)\pi}{2}\right) = -1 + \ln \frac{(4n-1)\pi}{2}$, 故 D 正确.

故选: D



变式 3. (2023·上海杨浦·高三复旦附中校考开学考试) 无穷数列 $\{a_n\}$ 满足: $0 < a_1 < 1$, 且对任意的正整数 n , 均有 $e^{a_{n+1}} = (3 - a_n)e^{a_n}$, 则下列说法正确的是 ()

- A. 数列 $\{a_n\}$ 为严格减数列 B. 存在正整数 n , 使得 $a_n < 0$
C. 数列 $\{a_n\}$ 中存在某一项为最大项 D. 存在正整数 n , 使得 $a_n > \frac{4}{3}$

【答案】D

【解析】 因为 $e^{a_{n+1}} = (3 - a_n)e^{a_n} > 0$, 所以 $3 - a_n > 0$, 所以 $a_n < 3$,

由 $e^{a_{n+1}} = (3 - a_n)e^{a_n}$ 可得 $e^{a_{n+1} - a_n} = (3 - a_n)$, 则 $a_{n+1} - a_n = \ln(3 - a_n)$,

则有 $a_{n+1} = a_n + \ln(3 - a_n)$,

设函数 $f(x) = x + \ln(3 - x), 0 < x < 3$,

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x-3} = \frac{x-2}{x-3},$$

当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $2 < x < 3$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递增, $(2, 3)$ 单调递减,

所以 $f(x) \leq f(2) = 2$,

因为 $0 < a_1 < 1$, 所以 $a_2 = f(a_1) \in (0, 2), a_3 = f(a_2) \in (0, 2), \dots$

以此类推, 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $0 < a_n < 2$, 故 B 错误;

所以 $a_{n+1} = f(a_n) = a_n + \ln(3 - a_n) > a_n$, 故 A 错误;

因为 $a_{n+1} > a_n$, 所以数列 $\{a_n\}$ 中不存在某一项为最大项, C 错误;

因为 $0 < a_1 < 1$, 所以 $a_2 = f(a_1) = a_1 + \ln(3 - a_1) > \ln 3 > 1$,

$$a_3 = f(a_2) = a_2 + \ln(3 - a_2) > 1 + \ln 2 > \frac{3}{2} > \frac{4}{3},$$

所以存在正整数 n , 使得 $a_n > \frac{4}{3}$, D 正确.

题型二: 函数与不等式的综合

例 4. (2023·全国·高三专题练习) 关于 x 的不等式 $(x-1)^{9999} - 2^{9999} \cdot x^{9999} \leq x+1$, 解集为_____.

【答案】 $[-1, +\infty)$

【解析】由题设, $(x-1)^{9999} - (2x)^{9999} \leq x+1$, 而 $y = x^{9999}$ 在 $\mathbf{R}$ 上递增,

当 $x-1 > 2x$ 即 $x < -1$ 时, $(x-1)^{9999} - (2x)^{9999} > 0 > x+1$, 原不等式不成立;

当 $x-1 \leq 2x$ 即 $x \geq -1$ 时, $(x-1)^{9999} - (2x)^{9999} \leq 0 \leq x+1$, 原不等式恒成立.

综上, 解集为 $[-1, +\infty)$.

故答案为: $[-1, +\infty)$

例 5. (2023·全国·高三专题练习) 意大利数学家斐波那契(1175 年~1250 年)以兔子繁殖数量为例, 引入数列: 1, 1, 2, 3, 5, 8, L, 该数列从第三项起, 每一项都等于前两项之和, 即 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 故此数列

称为斐波那契数列, 又称“兔子数列”, 其通项公式为 $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$. 设 n 是不等式

$\log_2 [(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n] > n+5$ 的正整数解, 则 n 的最小值为_____.

【答案】 8

【解析】由 $\log_2 [(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n] > n+5$, 得 $\log_2 [(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n] - n > 5$,

得 $\log_2 [(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n] - \log_2 2^n > 5$, 得 $\log_2 \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n} > 5$,

得 $\log_2 \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] > 5$, $\therefore \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n > 2^5$,

所以 $\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] > \frac{2^5}{\sqrt{5}}$,

令 $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$, 则数列 $\{a_n\}$ 即为斐波那契数列,

$\therefore a_n > \frac{2^5}{\sqrt{5}}$, 则 $a_n^2 > \frac{2^{10}}{5}$, 显然数列 $\{a_n\}$ 为递增数列且 $a_n > 0$, 所以数列 $\{a_n^2\}$ 亦为递增数列,

由 $a_1 = a_2 = 1$, 得 $a_3 = a_1 + a_2 = 2$, $a_4 = a_2 + a_3 = 3$, $a_5 = a_3 + a_4 = 5$, $a_6 = a_4 + a_5 = 8$,

$a_7 = a_5 + a_6 = 13$, $a_8 = a_6 + a_7 = 21$,

因为 $a_7^2 = 13^2 = 169 < \frac{2^{10}}{5} = 204.8$, $a_8^2 = 21^2 = 441 > \frac{2^{10}}{5} = 204.8$,

所以

使得 $a_n^2 > \frac{2^{10}}{5}$ 成立的 n 的最小值为 8.

故答案为: 8.

例 6. (2023·辽宁·高三校考阶段练习) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2^x + 1} + x + 2$, 若不等式

$f(m \cdot 4^x + 1) + f(m - 2^x) \geq 5$ 对任意的 $x > 0$ 恒成立, 则实数 m 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

【解析】 因为 $f(x) + f(-x) = \frac{1}{2^x + 1} + x + 2 + \frac{1}{2^{-x} + 1} - x + 2 = 5$,

所以 $f(x)$ 图象关于点 $(0, \frac{5}{2})$ 对称,

又 $f'(x) = 1 - \frac{2^x \ln 2}{(2^x + 1)^2} = \frac{4^x + (2 - \ln 2)2^x + 1}{(2^x + 1)^2} > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

$f(m \cdot 4^x + 1) + f(m - 2^x) \geq 5$ 等价于 $f(m \cdot 4^x + 1) + f(m - 2^x) \geq f(m - 2^x) + f(2^x - m)$,

即 $f(m \cdot 4^x + 1) \geq f(2^x - m)$ 恒成立,

所以 $m \cdot 4^x + 1 \geq 2^x - m$, 即 $m \geq \frac{2^x - 1}{4^x + 1} (x > 0)$ 恒成立,

令 $2^x - 1 = t (t > 0)$, 可得 $m \geq \frac{t}{(t+1)^2 + 1} = \frac{t}{t^2 + 2t + 2}$,

而 $\frac{t}{t^2 + 2t + 2} = \frac{1}{t + \frac{2}{t} + 2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2} + 2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$, 当且仅当 $t = \sqrt{2}$ 时取等号,

所以 $m \geq \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$, 即实数 m 的最小值为 $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

变式 4. (2023·全国·模拟预测) 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数, $f(2+x) + f(-x) = 0$, 对任意 x_1 ,

$x_2 \in [1, +\infty)$ ($x_1 < x_2$), 均有 $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 已知 $a, b (a \neq b)$ 为关于 x 的方程 $x^2 - 2x + t^2 - 3 = 0$ 的两个解, 则关于 t 的不等式 $f(a) + f(b) + f(t) > 0$ 的解集为 ()

- A. $(-2, 2)$ B. $(-2, 0)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, 2)$

【答案】D

【解析】由 $f(2+x) + f(-x) = 0$, 得 $f(1) = 0$ 且函数 $f(x)$ 关于点 $(1, 0)$ 对称.

由对任意 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ ($x_1 < x_2$), 均有 $f(x_2) - f(x_1) > 0$,

可知函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增.

又因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

因为 $a, b (a \neq b)$ 为关于 x 的方程 $x^2 - 2x + t^2 - 3 = 0$ 的两个解,

所以 $\Delta = 4 - 4(t^2 - 3) > 0$, 解得 $-2 < t < 2$,

且 $a + b = 2$, 即 $b = 2 - a$.

又 $f(2+x) + f(-x) = 0$,

令 $x = -a$, 则 $f(a) + f(b) = 0$,

则由 $f(a) + f(b) + f(t) > 0$, 得 $f(t) > 0 = f(1)$,

所以 $t > 1$.

综上, t 的取值范围是 $(1, 2)$.

故选: D.

题型三: 函数中的创新题

例 7. (2023·重庆渝中·高三重庆巴蜀中学校考阶段练习) 帕德近似是法国数学家亨利·帕德发明的用有理多项式近似特定函数的方法. 给定两个正整数 m, n , 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 $[m, n]$ 阶帕德近似定义为:

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{1 + b_1x + \dots + b_nx^n}, \text{ 且满足 } f(0) = R(0), f'(0) = R'(0), f''(0) = R''(0), \dots, f^{(m+n)}(0) = R^{(m+n)}(0). \text{ 已}$$

知 $f(x) = \ln(x+1)$ 在 $x=0$ 处的 $[1, 1]$ 阶帕德近似为 $R(x) = \frac{ax}{1+bx}$. 注:

$$f''(x) = [f'(x)]', f'''(x) = [f''(x)]', f^{(4)}(x) = [f'''(x)]', f^{(5)}(x) = [f^{(4)}(x)]', \dots$$

(1) 求实数 a, b 的值;

(2) 求证: $(x+b)f\left(\frac{1}{x}\right) > 1$;

(3) 求不等式 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ 的解集, 其中 $e = 2.71828\dots$.

【解析】(1) 因为 $R(x) = \frac{ax}{1+bx}$ ，所以 $R'(x) = \frac{a}{(1+bx)^2}$ ， $R''(x) = \frac{-2ab}{(1+bx)^3}$ ，

$$f(x) = \ln(x+1)，\text{ 则 } f'(x) = \frac{1}{x+1}，f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}，$$

由题意知， $f'(0) = R'(0)$ ， $f''(0) = R''(0)$ ，

$$\text{所以 } \begin{cases} a=1 \\ -2ab=-1 \end{cases}，\text{ 解得 } a=1，b=\frac{1}{2}。$$

(2) 由 (1) 知，即证 $\left(x + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 1$ ，

令 $t = 1 + \frac{1}{x}$ ，则 $t > 0$ 且 $t \neq 1$ ，

即证 $t \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ 时 $\frac{t+1}{2(t-1)} \cdot \ln t > 1$ ，

记 $\varphi(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}$ ， $t \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ ，

$$\text{则 } \varphi'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0，$$

所以 $\varphi(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

当 $t \in (0,1)$ 时 $\varphi(t) < \varphi(1) = 0$ ，即 $\ln t < \frac{2(t-1)}{t+1}$ ，即 $\frac{t+1}{2(t-1)} \cdot \ln t > 1$ 成立，

当 $t \in (1,+\infty)$ 时 $\varphi(t) > \varphi(1) = 0$ ，即 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$ ，即 $\frac{t+1}{2(t-1)} \cdot \ln t > 1$ 成立，

综上所述可得 $t \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ 时 $\frac{t+1}{2(t-1)} \cdot \ln t > 1$ ，

所以 $\left(x + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 1$ 成立，即 $(x+b)f\left(\frac{1}{x}\right) > 1$ 成立。

(3) 由题意知，欲使得不等式 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ 成立，

则至少有 $1 + \frac{1}{x} > 0$ ，即 $x > 0$ 或 $x < -1$ ，

首先考虑 $e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ ，该不等式等价于 $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} > 1$ ，即 $\left(x + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 1$ ，

又由 (2) 知 $\left(x + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 1$ 成立，

所以使得 $e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ 成立的 x 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ ，

再考虑 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e$ ，该不等式等价于 $x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1$ ，

记 $h(x) = \ln x - x + 1$ ， $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ ，

则 $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ ，所以当 $0 < x < 1$ 时 $h'(x) > 0$ ， $x > 1$ 时 $h'(x) < 0$ ，

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $h(x) < h(1) = 0$ ，即 $\ln x < x - 1$ ， $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ ，

所以 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$ ， $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ ，

当 $x \in (0, +\infty)$ 时由 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$ ，可知 $x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1$ 成立，

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时由 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$ ，可知 $x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1$ 不成立，

所以使得 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e$ 成立的 x 的取值范围是 $(0, +\infty)$ ，

综上可得不等式 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ 的解集为 $(0, +\infty)$ 。

例 8. (2023·上海黄浦·上海市敬业中学校考三模) 定义：如果函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图像上分别存在点 M 和 N 关于 x 轴对称，则称函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 具有 C 关系。

(1) 判断函数 $f(x) = \log_2(8x^2)$ 和 $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ 是否具有 C 关系；

(2) 若函数 $f(x) = a\sqrt{x-1}$ 和 $g(x) = -x-1$ 不具有 C 关系，求实数 a 的取值范围；

(3) 若函数 $f(x) = xe^x$ 和 $g(x) = m \sin x (m < 0)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上具有 C 关系，求实数 m 的取值范围。

【解析】(1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 是具有 C 关系，理由如下：

根据定义，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 具有 C 关系，则在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域的交集上存在 x ，使得

$$f(x) + g(x) = 0,$$

因为 $f(x) = \log_2(8x^2)$ ， $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ ， $x > 0$ ，

所以 $f(x) + g(x) = \log_2(8x^2) + \log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 8 + \log_2 x^2 - \log_2 x = \log_2 x + 3$ ，

令 $f(x) + g(x) = 0$ ，即 $\log_2 x + 3 = 0$ ，解得 $x = \frac{1}{8}$ ，

所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 具有 C 关系。

(2) 令 $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ ，

因为 $f(x) = a\sqrt{x-1}$, $g(x) = -x-1$, 所以 $\varphi(x) = a\sqrt{x-1} - x - 1 (x \geq 1)$,

令 $t = \sqrt{x-1} (t \geq 0)$, 则 $x = t^2 + 1$, 故 $y = \varphi(x) = at - (t^2 + 1) - 1 = -t^2 + at - 2$,

因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不具有 C 关系, 所以 $\varphi(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒为负或恒为正,

又因为 $y = -t^2 + at - 2$ 开口向下, 所以 $y = -t^2 + at - 2$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒为负, 即 $-t^2 + at - 2 < 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立,

当 $t = 0$ 时, $-t^2 + at - 2 = -2 < 0$ 显然成立;

当 $t > 0$ 时, $a < t + \frac{2}{t}$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立,

因为 $t + \frac{2}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{2}{t}} = 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $t = \frac{2}{t}$, 即 $t = \sqrt{2}$ 时, 等号成立,

所以 $\left(t + \frac{2}{t}\right)_{\min} = 2\sqrt{2}$, 所以 $a < 2\sqrt{2}$,

综上: $a < 2\sqrt{2}$, 即 $a \in (-\infty, 2\sqrt{2})$.

(3) 因为 $f(x) = xe^x$ 和 $g(x) = m \sin x (m < 0)$,

令 $h(x) = f(x) + g(x)$, 则 $h(x) = xe^x + m \sin x$,

因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上具有 C 关系, 所以 $h(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上存在零点,

因为 $h'(x) = (x+1)e^x + m \cos x$,

当 $-1 \leq m < 0$ 且 $x \in (0, \pi)$ 时, 因为 $(x+1)e^x > 1, |m \cos x| < |m| \leq 1$, 所以 $h'(x) > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递增, 则 $h(x) > h(0) = 0$,

此时 $h(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上不存在零点, 不满足题意;

当 $m < -1$ 时, 显然当 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $h'(x) > 0$,

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 因为 $h'(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 且 $h'(0) = 1 + m < 0, h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)e^{\frac{\pi}{2}} > 0$,

故 $h'(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上存在唯一零点, 设为 α , 则 $h'(\alpha) = 0$,

所以当 $x \in (0, \alpha), h'(x) < 0$; 当 $x \in \left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right), h'(x) > 0$; 又当 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $h'(x) > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, \alpha)$ 上单调递减, 在 (α, π) 上单调递增, $h(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上存在唯一极小值点 α ,

因为 $h(0) = 0$, 所以 $h(\alpha) < 0$,

又因为 $h(\pi) = \pi e^\pi > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上存在唯一零点 β ,

所以函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上具有 C 关系,

综上: $m < -1$, 即 $m \in (-\infty, -1)$.

例 9. (2023·重庆·高三统考阶段练习) 悬索桥(如图)的外观大漂亮, 悬索的形状是平面几何中的悬链

线. 1691 年莱布尼兹和伯努利推导出某链线的方程为 $y = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right)$, 其中 c 为参数. 当 $c = 1$ 时, 该方程就是

双曲余弦函数 $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 类似的我们有双曲正弦函数 $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.



(1) 从下列三个结论中选择一个进行证明, 并求函数 $y = \cosh(2x) + \sinh(x)$ 的最小值;

① $[\cosh(x)]^2 - [\sinh(x)]^2 = 1$;

② $\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$;

③ $\cosh(2x) = [\cosh(x)]^2 + [\sinh(x)]^2$.

(2) 求证: $\forall x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{4}\right]$, $\cosh(\cos x) > \sinh(\sin x)$.

【解析】(1) 证明: 选①,

$$[\cosh(x)]^2 - [\sinh(x)]^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = 1;$$

选②, $\sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2 \times \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2 \times 2} = 2 \sinh(x) \cosh(x)$;

选③, $\cosh(2x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = [\cosh(x)]^2 + [\sinh(x)]^2$.

$$y = \cosh(2x) + \sinh(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ 令 } t = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

因为函数 $y = \frac{e^x}{2}$ 、 $y = -\frac{e^{-x}}{2}$ 均为 $\mathbb{R}$ 上的增函数, 故函数 $y = \sinh(x)$ 也为 $\mathbb{R}$ 上的增函数,

故 $t = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \in \mathbb{R}$, 则 $t^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$, 所以 $\cosh(2x) = 2t^2 + 1$,

所以 $y = 2t^2 + t + 1 = 2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \geq \frac{7}{8}$ ，当且仅当 $t = -\frac{1}{4}$ 时取“=”，

所以 $y = \cosh(2x) + \sinh(x)$ 的最小值为 $\frac{7}{8}$ 。

(2) 证明: $\forall x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{4}\right]$, $\cosh(\cos x) > \sinh(\sin x) \Leftrightarrow \frac{e^{\cos x} + e^{-\cos x}}{2} > \frac{e^{\sin x} - e^{-\sin x}}{2}$

$$\Leftrightarrow e^{\cos x} + e^{-\cos x} > e^{\sin x} - e^{-\sin x},$$

当 $x \in [-\pi, 0]$ 时, $e^{\cos x} + e^{-\cos x} > 0$, $\sin x \leq 0 \leq -\sin x$, 所以 $e^{\sin x} \leq e^{-\sin x}$,

所以 $e^{\sin x} - e^{-\sin x} \leq 0$, 所以 $e^{\cos x} + e^{-\cos x} > e^{\sin x} - e^{-\sin x}$ 成立;

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, 则 $0 < x \leq \frac{\pi}{2} - x < \frac{\pi}{2}$, 且正弦函数 $y = \sin x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上为增函数,

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq \sin x$, 所以 $e^{\cos x} \geq e^{\sin x}$, $-e^{-\sin x} < 0 < e^{-\cos x}$,

所以 $e^{\cos x} + e^{-\cos x} > e^{\sin x} - e^{-\sin x}$ 成立,

综上, $\forall x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{4}\right]$, $\cosh(\cos x) > \sinh(\sin x)$ 。

变式 5. (2023·广东深圳·高三深圳市南山区华侨城中学校考阶段练习)布劳威尔不动点定理是拓扑学里一个非常重要的不动点定理,它得名于荷兰数学家鲁伊兹·布劳威尔,简单地讲就是对于满足一定条件的连续实函数 $f(x)$, 存在一个点 x_0 , 使得 $f(x_0) = x_0$, 那么我们称该函数为“不动点”函数, 而称 x_0 为该函数的一个不动点。现新定义: 若 x_0 满足 $f(x_0) = -x_0$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的次不动点。

(1) 判断函数 $f(x) = x^2 - 2$ 是否是“不动点”函数, 若是, 求出其不动点; 若不是, 请说明理由

(2) 已知函数 $g(x) = \left|\frac{1}{2}x + 1\right|$, 若 a 是 $g(x)$ 的次不动点, 求实数 a 的值:

(3) 若函数 $h(x) = \log_{\frac{1}{2}}(4^x - b \cdot 2^x)$ 在 $[0, 1]$ 上仅有一个不动点和一个次不动点, 求实数 b 的取值范围。

【解析】(1) 依题意, 设 x_0 为 $f(x)$ 的不动点, 即 $f(x_0) = x_0$, 于是得 $x_0^2 - 2 = x_0$, 解得 $x_0 = 2$ 或 $x_0 = -1$,

所以 $f(x) = x^2 - 2$ 是“不动点”函数, 不动点是 2 和 -1。

(2) 因 $g(x) = \left|\frac{1}{2}x + 1\right|$ 是“次不动点”函数, 依题意有 $g(a) = -a$, 即 $\left|\frac{1}{2}a + 1\right| = -a$, 显然 $a \leq 0$, 解得 $a = -\frac{2}{3}$,

所以实数 a 的值是 $-\frac{2}{3}$ 。

(3) 设 m, n 分别是函数 $h(x) = \log_{\frac{1}{2}}(4^x - b \cdot 2^x)$ 在 $[0, 1]$ 上的不动点和次不动点, 且 m, n 唯一,

由 $h(m)=m$ 得: $\log_{\frac{1}{2}}(4^m - b \cdot 2^m) = m$, 即 $4^m - b \cdot 2^m = (\frac{1}{2})^m$, 整理得: $b = 2^m - \frac{1}{4^m}$,

令 $\varphi(m) = 2^m - \frac{1}{4^m}$, 显然函数 $\varphi(m)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增, 则 $\varphi(m)_{\min} = \varphi(0) = 0$, $\varphi(m)_{\max} = \varphi(1) = \frac{7}{4}$, 则 $0 \leq b \leq \frac{7}{4}$,

由 $h(n) = -n$ 得: $\log_{\frac{1}{2}}(4^n - b \cdot 2^n) = -n$, 即 $4^n - b \cdot 2^n = 2^n$, 整理得: $b = 2^n - 1$,

令 $u(n) = 2^n - 1$, 显然函数 $u(n)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增, $u(n)_{\min} = u(0) = 0$, $u(n)_{\max} = u(1) = 1$, 则 $0 \leq b \leq 1$,

综上得: $0 \leq b \leq 1$,

所以实数 b 的取值范围 $[0,1]$.

题型四: 最大值的最小值问题 (平口单峰函数、铅锤距离)

例 10. (2023·浙江绍兴·高三浙江省柯桥中学校考开学考试) 已知函数 $f(x) = |x^3 - 6x^2 + ax + b|$, 对于任意的实数 a, b , 总存在 $x_0 \in [0,3]$, 使得 $f(x_0) \geq m$ 成立, 则当 m 取最大值时, $a+b =$ ()

A. 7

B. 4

C. -4

D. -7

【答案】A

【解析】由 $f(x) = |x^3 - 6x^2 + ax + b|$, 得 $f(x) = |x^3 - 6x^2 + 9x - [(9-a)x - b]|$,

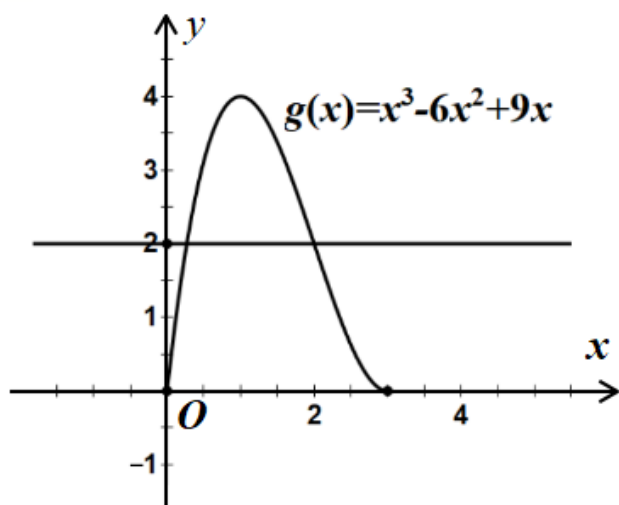
设 $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, 则 $g'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$,

$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 在 $(1,3)$ 上单调递减,

$g(0) = g(3) = 0$,

设 $h(x) = (9-a)x - b$,

画出函数的图像如图



对任意的实数 a, b , 总存在 $x_0 \in [0,3]$, 使得 $f(x_0) \geq m$ 成立,

等价于求 $f(x)$ 最大值中的最小值,

由图像可知当 $a=9, b=-2$ 时, m 取得最大值 2, 此时 $a+b=7$,

故选: A

例 11. (2023·湖北·高三校联考阶段练习) 设函数 $f(x) = \left| x + \frac{4}{x} - ax - b \right|$, 若对任意的实数 a, b , 总存在 $x_0 \in [1, 3]$

使得 $f(x_0) \geq m$ 成立, 则实数 m 的最大值为 ()

- A. -1 B. 0 C. $\frac{8-4\sqrt{3}}{3}$ D. 1

【答案】C

【解析】 由已知得 $m \leq [f(x)_{\min}]_{\max}$

设构造函数 $g(x) = \frac{4}{x} + \lambda x$ 满足 $g(1) = g(3)$, 即 $4 + \lambda = \frac{4}{3} + 3\lambda$, 解得 $\lambda = \frac{4}{3}$,

则 $f(x) = \left| \frac{4}{x} + \frac{4x}{3} - \left(\frac{1}{3} + a \right)x - b \right|$, 令 $h(x) = \left(\frac{1}{3} + a \right)x + b$,

则函数 $f(x)$ 可以理解为函数 $g(x) = \frac{4}{x} + \frac{4}{3}x$ 与函数 $h(x) = \left(\frac{1}{3} + a \right)x + b$ 在横坐标相等时, 纵坐标的竖直距离,

$\therefore g(1) = g(3) = \frac{16}{3}$, 且 $g(x) = \frac{4}{x} + \frac{4}{3}x = 2\sqrt{\frac{4}{x} \cdot \frac{4x}{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ (当且仅当 $x = \sqrt{3}$ 时取等号),

$\therefore$ 若设直线 l_1 的方程为 $y = \frac{16}{3}$, 直线 l_2 的方程为 $y = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, 由此可知当 $a + \frac{1}{3} = 0$, 直线 $h(x) = b$ 位于直线 l_1 和

直线 l_2 中间时, 纵坐标的竖直距离取得最大值中的最小值, 故 $[f(x)_{\min}]_{\max} = \frac{\frac{16}{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{8-4\sqrt{3}}{3}$,

所以实数 m 的最大值为 $\frac{8-4\sqrt{3}}{3}$.

故选: C.

例 12. (2023·全国·高三专题练习) 设函数 $f(x) = \left| \frac{4}{x} - ax \right|$, 若对任意的正实数 a , 总存在 $x_0 \in [1, 4]$, 使得

$f(x_0) \geq m$, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, 0]$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(-\infty, 2]$ D. $(-\infty, 3]$

【答案】D

【解析】 对任意的正实数 a , 总存在 $x_0 \in [1, 4]$, 使得 $f(x_0) \geq m \Leftrightarrow m \leq f(x)_{\max}, x \in [1, 4]$.

令 $u(x) = \frac{4}{x} - ax$, $\because a > 0$, $\therefore$ 函数 $u(x)$ 在 $x \in [1, 4]$ 单调递减,

$\therefore u(x)_{\max} = u(1) = 4 - a$, $u(x)_{\min} = u(4) = 1 - 4a$.

① $a \leq 4$ 时, $0 \leq 4 - a > 1 - 4a$, 则 $f(x)_{\max} = 4 - a \geq 1$.

② $4 < a$ 时, $4 - a < 0 < 1 - 4a$, $4 - a + 1 - 4a = 5 - 5a < 0$, 则 $f(x)_{\max} = 4a - 1 > 3$.

③ $\frac{1}{4} < a, 1$ 时, $4-a > 0 > 1-4a$, $4-a+1-4a=5-5a \leq 0$, 则 $f(x)_{\max} = 4-a \leq 3$.

④ $0 < a, \frac{1}{4}$ 时, $4-a > 1-4a > 0$, 则 $f(x)_{\max} = 4-a > \frac{15}{4}$.

综上①②③④可得: $f(x)_{\max} \geq 3$, 即 $m, 3$.

$\therefore$ 实数 m 的取值范围为 $(-\infty, 3]$.

故选: D.

变式 6. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = \left| \frac{x-2}{x+2} - ax - b \right|$, 若对任意的实数 a, b , 总存在

$x_0 \in [-1, 2]$, 使得 $f(x_0) \leq m$ 成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$ B. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ C. $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$ D. $(-\infty, 1]$

【答案】B

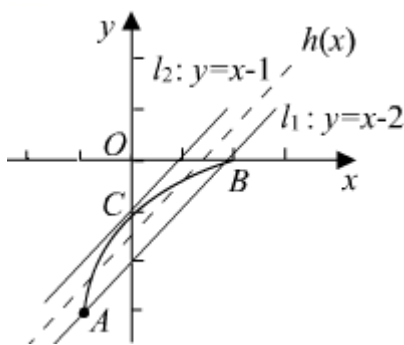
【解析】 由存在 $x_0 \in [-1, 2]$, 使得 $f(x_0) \leq m$ 成立, 故 $m \leq f(x)_{\max}$,

又对任意的实数 a, b , $m \leq f(x)_{\max}$, 则 $m \leq [f(x)_{\max}]_{\min}$,

$\left| \frac{x-2}{x+2} - ax - b \right| = \left| \frac{x-2}{x+2} - (ax+b) \right|$ 可看作横坐标相同时, 函数 $g(x) = \frac{x-2}{x+2}$

与函数 $h(x) = ax+b$ 图象上的纵向距离的最大值中的最小值,

又 $g(-1) = -3, g(2) = 0$, 作示意图如图所示:



设 $A(-1, -3), B(2, 0)$, 则直线 AB 的方程 $l_1: y = x - 2$, 设 $l_2: y = x + m$ 与 $g(x)$ 相切,

则 $\frac{x-2}{x+2} = x + m$, 得 $x^2 + (m+1)x + 2(m+1) = 0$, 有 $\Delta = (m+1)^2 - 8(m+1) = 0$,

得 $m = -1$ 或 $m = 7$, 由图知, 切点 $C(0, -1)$, 则 $l_2: y = x - 1$,

当直线 $h(x)$ 与 l_1, l_2 平行且两直线距离相等时, 即恰好处于正中间时,

函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 图象上的纵向距离能取到最大值中的最小值,

此时 $h(x) = x - \frac{3}{2}$, $[f(x)_{\max}]_{\min} = |-1 - (-\frac{3}{2})| = \frac{1}{2}$, 故 $m \leq \frac{1}{2}$.

故选: B

变式 7. (2023·高一课时练习) 已知函数 $f(x) = \left| ax + \frac{1}{x} + b \right| (a, b \in \mathbb{R})$, 当 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right]$ 时, 设 $f(x)$ 的最大值为 $M(a, b)$, 则 $M(a, b)$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

【答案】B

【解析】 函数 $f(x) = \left| ax + \frac{1}{x} + b \right| (a, b \in \mathbb{R})$, 当 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right]$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $M(a, b)$,

可得 $M(a, b) \geq f(2) = |2a + b + \frac{1}{2}|$, $M(a, b) \geq f(\frac{1}{2}) = |\frac{1}{2}a + b + 2|$, $M(a, b) \geq f(1) = |a + b + 1|$,

可得 $\frac{1}{3}M(a, b) + \frac{2}{3}M(a, b) + M(a, b) \geq \left| \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{6} \right| + \left| \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{4}{3} \right| + |a + b + 1|$

$\geq \left| \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{4}{3} - a - b - 1 \right| = \frac{1}{2}$,

即 $2M(a, b) \geq \frac{1}{2}$, 即有 $M(a, b) \geq \frac{1}{4}$, 则 $M(a, b)$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$,

故选: B

变式 8. (2023·江西宜春·校联考模拟预测) 已知函数 $f(x) = \left| \ln x + \frac{1}{x} - ax - b \right| (a, b \in \mathbb{R})$, 且 $x_0 \in [1, e^2]$, 满足 $\ln x_0 + \frac{1}{x_0} = e - 1$, 当 $x \in \left[\frac{1}{e}, x_0 \right]$ 时, 设函数 $f(x)$ 的最大值为 $M(a, b)$, 则 $M(a, b)$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{3-e}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{e-1}{2}$ D. $\frac{e-2}{2}$

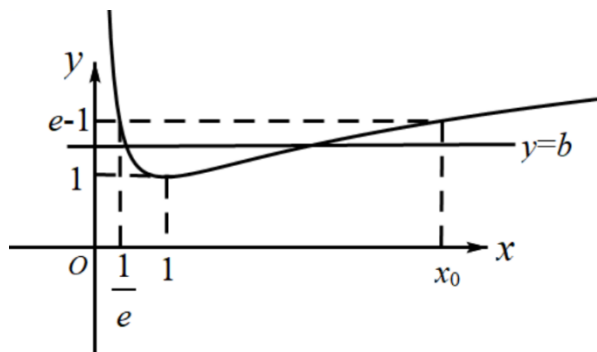
【答案】D

【解析】 设 $g(x) = \ln x + \frac{1}{x} (x > 0)$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} (x > 0)$,

当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 为减函数,

当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 为增函数, 所以 $g(x)_{\min} = g(1) = 1$,

作出 $g(x)$ 的图象如下,



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/767056110106006154>