

阳江市重点中学 2024 届数学高三第一学期期末调研试题

考生须知:

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -2 < x < 3, x \in N\}$, $B = \{x | x^2 > 1\}$ $\mathbf{A}$, 则集合 $A \cap B = (\quad)$

- A.** $\{2\}$ **B.** $\{-1,0,1\}$ **C.** $\{-2,2\}$ **D.** $\{-1,0,1,2\}$

2. 若集合 $A = \{x | y = \sqrt{2-x}\}$, $B = \{x | -3 \leq x \leq 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A.** $[-3, 2]$ **B.** $\{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$

- C.** $(2,3)$
- D.** $\{x|-3 \leq x < 2\}$

3. 已知集合 $A = \{x | x < 0\}$, $B = \{x | x^2 + mx - 12 = 0\}$, 若 $A \cap B = \{-2\}$, 则 $m =$ ()

- A. 4** **B. -4** **C. 8** **D. -8**

4. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为 A_1D_1 的中点, 若三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的球面上, 则球 O 的表面积为 ()

- A.** 12π **B.** $\frac{21\pi}{2}$ **C.** $\frac{41\pi}{4}$ **D.** 10π

5. 函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ 的定义域为 ()

- A.** $\{x|x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 3\}$ **B.** $\{x|x \leq -3 \text{ 或 } x \geq -2\}$

- C.** $\{x|2 \leq x \leq 3\}$ **D.** $\{x|-3 \leq x \leq -2\}$

6. 已知 i 是虚数单位, 若 $\frac{z}{1-i} = i$, 则 $|z| =$ ()

- A.** $\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** 3

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $C = 30^\circ$, $\cos A = -\frac{2}{3}$, $AC = \sqrt{15} - 2$, 则 AC 边上的高为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{2}$

8. 已知 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} 2x + y - 2 \leq 0 \\ x - 2y - 1 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$, 则点 $P(x, y)$ 所在区域的面积是()

- A. 1 B. 2 C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{4}{5}$

9. 已知函数 $f(x) = x^3 - ax - 1$, 以下结论正确的个数为 ()

- ①当 $a = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象的对称中心为 $(0, -1)$;
 ②当 $a \geq 3$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上为单调递减函数;
 ③若函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上不单调, 则 $0 < a < 3$;
 ④当 $a = 12$ 时, $f(x)$ 在 $[-4, 5]$ 上的最大值为 1.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

10. 已知正四面体的内切球体积为 v , 外接球的体积为 V , 则 $\frac{V}{v} =$ ()

- A. 4 B. 8 C. 9 D. 27

11. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $\frac{a^4 + b^4 + c^4 + a^2 b^2}{a^2 + b^2} = 2c^2$, 若 c 为最大边, 则 $\frac{a+b}{c}$ 的取值范围是 ()

- A. $\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ B. $(1, \sqrt{3})$ C. $\left[1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ D. $(1, \sqrt{3}]$

12. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle ABC = 60^\circ$, 则 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD} =$ ()

- A. 4 B. 6 C. $2\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若 $\left(\frac{5}{x} - 3\sqrt{x}\right)^n$ 的展开式中各项系数之和为 32, 则展开式中 x 的系数为_____

14. 设复数 z 满足 $(1+i)z = 4-2i$, 其中 i 是虚数单位, 若 $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数, 则 $\bar{z} =$ _____.

15. 有 2 名老师和 3 名同学, 将他们随机地排成一行, 用 ξ 表示两名老师之间的学生人数, 则 $\xi = 1$ 对应的排法有_____种; $E(\xi) =$ _____;

16. 已知两圆相交于两点 $A(a, 3), B(-1, 1)$, 若两圆圆心都在直线 $x + y + b = 0$ 上, 则 $a + b$ 的值是_____.

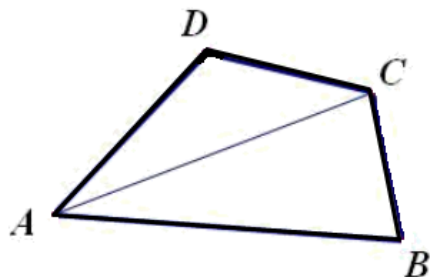
三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3 = 7$, $a_5 + a_7 = 26$.

(1) 求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分) 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle D = \frac{2\pi}{3}$, $\sin \angle BAC = \cos \angle B = \frac{5}{13}$, $AB = 13$.



(1) 求 AC ;

(2) 求四边形 $ABCD$ 面积的最大值.

19. (12 分) 某商场以分期付款销售某种商品, 根据以往资料统计, 顾客购买该商品选择分期付款的期数 X 的分布列为:

X	2	3	4
P	0.4	a	b

其中 $0 < a < 1$, $0 < b < 1$

(I) 求购买该商品的 3 位顾客中, 恰有 2 位选择分 2 期付款的概率;

(II) 商场销售一件该商品, 若顾客选择分 2 期付款, 则商场获得利润 100 元, 若顾客选择分 3 期付款, 则商场获得利润 150 元, 若顾客选择分 4 期付款, 则商场获得利润 200 元. 商场销售两件该商品所获的利润记为 Y (单位: 元)

(i) 求 Y 的分布列;

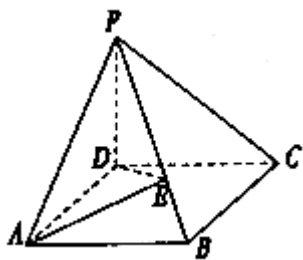
(ii) 若 $P(Y \leq 300) \geq 0.8$, 求 Y 的数学期望 $E(Y)$ 的最大值.

20. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的长轴长为 4, 离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 A, B 分别为椭圆与 x 轴正半轴和 y 轴正半轴的交点, P 是椭圆 C 上在第一象限的一点, 直线 PA 与 y 轴交于点 M , 直线 PB 与 x 轴交于点 N , 问 $\triangle PMN$ 与 $\triangle PAB$ 面积之差是否为定值? 说明理由.

21. (12 分) 如图在棱锥 $P-ABCD$ 中, $ABCD$ 为矩形, $PD \perp$ 面 $ABCD$, $PB = 2$, $\angle BPC = 45^\circ$, $\angle PBD = 30^\circ$.



(1) 在 PB 上是否存在一点 E ，使 $PC \perp$ 面 ADE ，若存在确定 E 点位置，若不存在，请说明理由；

(2) 当 E 为 PB 中点时，求二面角 $P-AE-D$ 的余弦值.

22. (10 分) 甲、乙、丙三名射击运动员射中目标的概率分别为 $\frac{1}{2}, a, a$ ($0 < a < 1$)，三人各射击一次，击中目标的次数记为 ξ .

(1) 求 ξ 的分布列及数学期望；

(2) 在概率 $P(\xi = i)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) 中，若 $P(\xi = 1)$ 的值最大，求实数 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

化简集合 A, B ，按交集定义，即可求解.

【详解】

集合 $A = \{x \mid -2 < x < 3, x \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 2\}$,

$B = \{x \mid x > 1 \text{ 或 } x < -1\}$ ，则 $A \cap B = \{2\}$.

故选:A.

【点睛】

本题考查集合间的运算，属于基础题.

2、A

【解析】

先确定集合 A 中的元素，然后由交集定义求解.

【详解】

$$Q A = \{x | y = \sqrt{2-x}\} = \{x | x \leq 2\}, B = \{x | -3 \leq x \leq 3\}, \therefore A \cap B = \{x | -3 \leq x \leq 2\}.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查求集合的交集运算, 掌握交集定义是解题关键.

3、B

【解析】

根据交集的定义, $A \cap B = \{-2\}$, 可知 $-2 \in B$, 代入计算即可求出 m .

【详解】

由 $A \cap B = \{-2\}$, 可知 $-2 \in B$,

又因为 $B = \{x | x^2 + mx - 12 = 0\}$,

所以 $x = -2$ 时, $(-2)^2 - 2m - 12 = 0$,

解得 $m = -4$.

故选: B.

【点睛】

本题考查交集的概念, 属于基础题.

4、C

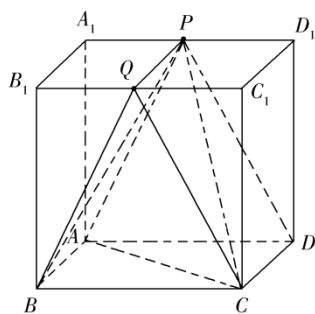
【解析】

取 B_1C_1 的中点 Q , 连接 PQ, BQ, CQ, PD , 则三棱柱 $BCQ-ADP$ 为直三棱柱, 此直三棱柱和三棱锥 $P-ABC$ 有相同的外接球, 求出等腰三角形 QBC 的外接圆半径, 然后利用勾股定理可求出外接球的半径

【详解】

如图, 取 B_1C_1 的中点 Q , 连接 PQ, BQ, CQ, PD , 则三棱柱 $BCQ-ADP$ 为直三棱柱, 所以该直三棱柱的六个顶点都在球 O 的球面上, $\triangle QBC$ 的外接圆直径为 $2r = \frac{QB}{\sin \angle QCB} = \frac{5}{2}$, 球 O 的半径 R 满足 $R^2 = r^2 + (\frac{AB}{2})^2 = \frac{41}{16}$, 所以球 O 的表面积 $S = 4\pi R^2 = \frac{41\pi}{4}$,

故选: C.



【点睛】

此题考查三棱锥的外接球半径与棱长的关系，及球的表面积公式，解题时要注意审题，注意空间思维能力的培养，属于中档题.

5、A

【解析】

根据偶次根式被开方数非负可得出关于 x 的不等式，即可解得函数 $y = f(x)$ 的定义域.

【详解】

由题意可得 $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ ，解得 $x \leq 2$ 或 $x \geq 3$.

因此，函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 3\}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查具体函数定义域的求解，考查计算能力，属于基础题.

6、A

【解析】

直接将 $\frac{z}{1-i} = i$ 两边同时乘以 $1-i$ 求出复数 z ，再求其模即可.

【详解】

解：将 $\frac{z}{1-i} = i$ 两边同时乘以 $1-i$ ，得

$$z = i(1-i) = 1+i$$

$$|z| = \sqrt{2}$$

故选：A

【点睛】

考查复数的运算及其模的求法，是基础题.

7、C

【解析】

结合正弦定理、三角形的内角和定理、两角和的正弦公式，求得 BC 边长，由此求得 AC 边上的高.

【详解】

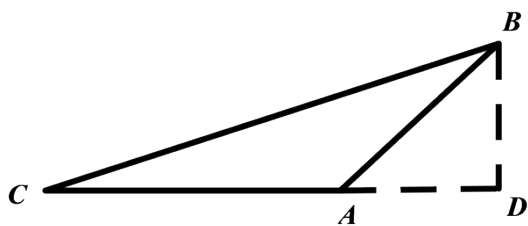
过 B 作 $BD \perp CA$ ，交 CA 的延长线于 D . 由于 $\cos A = -\frac{2}{3}$ ，所以 A 为钝角，且 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ，所以

$$\sin \angle CBA = \sin(\pi - \angle CBA) = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{15} - 2}{6}. \text{在三角形}$$

ABC 中，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，即 $\frac{BC}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{\sqrt{15} - 2}{\frac{\sqrt{15} - 2}{6}}$ ，所以 $BC = 2\sqrt{5}$. 在 $Rt\triangle BCD$ 中有

$$BD = BC \sin C = 2\sqrt{5} \times \frac{1}{2} = \sqrt{5}, \text{即 } AC \text{ 边上的高为 } \sqrt{5}.$$

故选：C



【点睛】

本小题主要考查正弦定理解三角形，考查三角形的内角和定理、两角和的正弦公式，属于中档题.

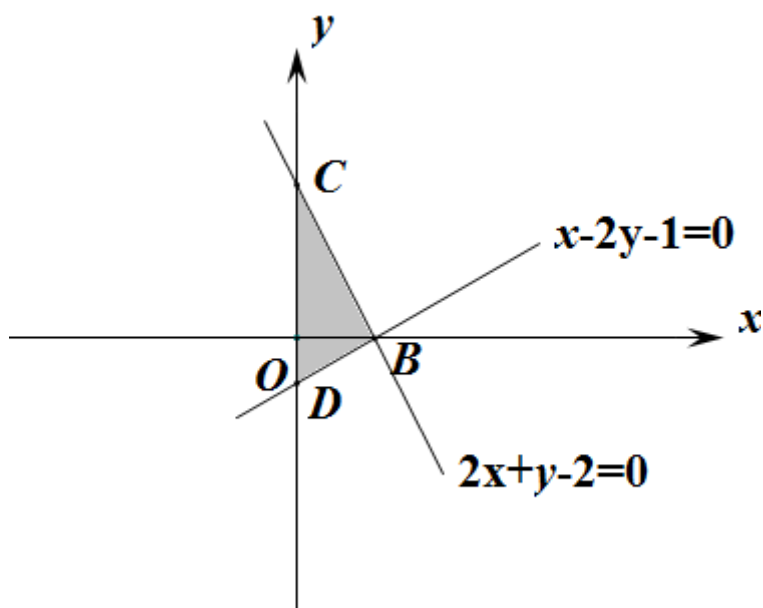
8、C

【解析】

画出不等式表示的平面区域，计算面积即可.

【详解】

不等式表示的平面区域如图：



直线 $2x + y - 2 = 0$ 的斜率为 -2 ，直线 $x - 2y - 1 = 0$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$ ，所以两直线垂直，故 $\triangle BCD$ 为直角三角形，易得

$$B(1, 0), D(0, -\frac{1}{2}), C(0, 2), |BD| = \frac{\sqrt{5}}{2}, |BC| = \sqrt{5} \text{ 所以阴影部分面积 } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} |BD| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{5} = \frac{5}{4}.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查不等式组表示的平面区域面积的求法，考查数形结合思想和运算能力，属于常考题.

9、C

【解析】

逐一分析选项，①根据函数 $y = x^3$ 的对称中心判断；②利用导数判断函数的单调性；③先求函数的导数，若满足条件，则极值点必在区间 $(-1, 1)$ ；④利用导数求函数在给定区间的最值.

【详解】

① $y = x^3$ 为奇函数，其图象的对称中心为原点，根据平移知识，函数 $f(x)$ 的图象的对称中心为 $(0, -1)$ ，正确.

②由题意知 $f'(x) = 3x^2 - a$. 因为当 $-1 < x < 1$ 时， $3x^2 < 3$,

又 $a \geq 3$ ，所以 $f'(x) < 0$ 在 $(-1, 1)$ 上恒成立，所以函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上为单调递减函数，正确.

③由题意知 $f'(x) = 3x^2 - a$ ，当 $a \leq 0$ 时， $f'(x) \geq 0$ ，此时 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为增函数，不合题意，故 $a > 0$.

令 $f'(x) = 0$ ，解得 $x = \pm \frac{\sqrt{3a}}{3}$. 因为 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上不单调，所以 $f'(x) = 0$ 在 $(-1, 1)$ 上有解，

需 $0 < \frac{\sqrt{3a}}{3} < 1$ ，解得 $0 < a < 3$ ，正确.

④令 $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$ ，得 $x = \pm 2$ ．根据函数的单调性， $f(x)$ 在 $[-4, 5]$ 上的最大值只可能为 $f(-2)$ 或 $f(5)$ ．

因为 $f(-2) = 15$ ， $f(5) = 64$ ，所以最大值为 64，结论错误．

故选：C

【点睛】

本题考查利用导数研究函数的单调性，极值，最值，意在考查基本的判断方法，属于基础题型．

10、D

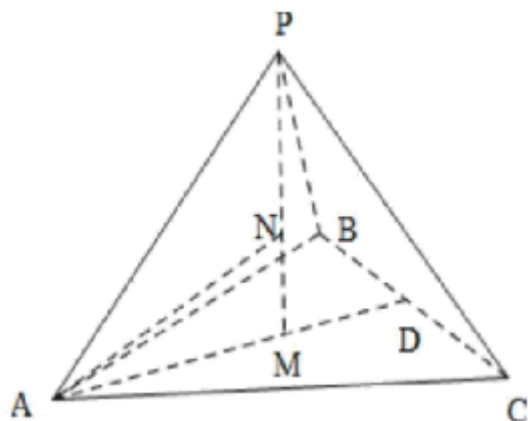
【解析】

设正四面体的棱长为 1，取 BC 的中点为 D ，连接 AD ，作正四面体的高为 PM ，首先求出正四面体的体积，再利用等体法求出内切球的半径，在 $Rt\triangle AMN$ 中，根据勾股定理求出外接球的半径，利用球的体积公式即可求解．

【详解】

设正四面体的棱长为 1，取 BC 的中点为 D ，连接 AD ，

作正四面体的高为 PM ，



$$\text{则 } AD = \frac{\sqrt{3}}{2}, AM = \frac{2}{3}AD = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore PM = \sqrt{PA^2 - AM^2} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12},$$

设内切球的半径为 r ，内切球的球心为 O ，

$$\text{则 } V_{P-ABC} = 4V_{O-ABC} = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} r,$$

$$\text{解得： } r = \frac{\sqrt{6}}{12};$$

设外接球的半径为 R ，外接球的球心为 N ，

则 $|MN| = |PM - R|$ 或 $|R - PM|$ ， $AN = R$ ，

在 $Rt\triangle AMN$ 中，由勾股定理得：

$$AM^2 + MN^2 = AN^2,$$

$$\therefore \frac{1}{3} + \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - R \right)^2 = R^2, \text{ 解得 } R = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\therefore \frac{R}{r} = 3,$$

$$\therefore \frac{V}{v} = \frac{R^3}{r^3} = 27$$

故选：D

【点睛】

本题主要考查了多面体的内切球、外接球问题，考查了椎体的体积公式以及球的体积公式，需熟记几何体的体积公式，属于基础题.

11、C

【解析】

由 $\frac{a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2}{a^2 + b^2} = 2c^2$ ，化简得到 $\cos C$ 的值，根据余弦定理和基本不等式，即可求解.

【详解】

$$\text{由 } \frac{a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2}{a^2 + b^2} = 2c^2, \text{ 可得 } \frac{(a^2 + b^2)^2 + c^4 - a^2b^2}{a^2 + b^2} = 2c^2,$$

$$\text{可得 } a^2 + b^2 - c^2 = \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2) + a^2b^2}{a^2 + b^2},$$

$$\text{通分得 } \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(c^2 - a^2 - b^2) + a^2b^2}{a^2 + b^2} = 0,$$

$$\text{整理得 } (a^2 + b^2 - c^2)^2 = a^2b^2, \text{ 所以 } \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\text{因为 } C \text{ 为三角形的最大角, 所以 } \cos C = -\frac{1}{2},$$

$$\text{又由余弦定理 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 + ab = (a+b)^2 - ab$$

$$\geq (a+b)^2 - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{3}{4}(a+b)^2, \text{ 当且仅当 } a=b \text{ 时, 等号成立,}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/767114013010006056>