第7讲

第4章　债券价格波动性的衡量(3)

- 4.1 债券价格的利率敏感性
- 4.2 债券的久期
- 4.3 债券的凸度

4.4.2 投资组合的久期的计算

- 理论计算

例4.6 假设目前为1997年6月30日有3种债券，均为六个月付息一次，小程按1：1：1的百分比持有这三种债券，求此投资组合的久期

债券类别	票面利率%	到期日	面额	价格
A	7	1998.12.31	100000	99.561
B	7.5	1999.12.31	100000	100.562
C	6	1998.6.30	100000	98.815

实务计算

- 投资组合的久期
- 投资组合的修正久期
- 投资组合的美元久期

$$D_{mac} = \sum_{i=1}^{n} W_i \times D_{i\,mac}$$

$$D_{\mathrm{mod}} = \sum_{i=1}^{n} W_i \times D_{i\,\mathrm{mod}}$$

$$D_{dol} = \sum_{i=1}^{n} X_i \times D_{i\,dol}$$

- Portfolio’s responsiveness to parallel changes in interest rates

4.4.3 浮动利率债券的久期

1.假如浮动利率债券到期日为T时刻，其久期怎样计算?

2.假设浮动利率债券没有到期日

$$P=\frac{C_1}{1+\frac{y}{2}}+\frac{P_1}{1+\frac{y}{2}}=\frac{C_1+P_1}{1+\frac{y}{2}}$$

思索题：

为何债券投资组合的久期与修正久期是以市值的比重，而美元久期却以持有张数为比重来计算?

4.4.4 补充阐明

修正的久期和有效久期(effective duration)

a) 久期

- 债券价值有关利率敏感性的一般描述

b) 修正的久期

- 假设当收益率变化时，债券的期望现金流不变，债券在收益率发生100个基点变化时的价格近似百分比变化
- 在收益率变化时，债券价格的变化仅仅因为贴现率(新的收益率水平)的变化引起
- 仅对没有嵌入期权的债券(option-free bonds)有意义
- 当债券有嵌入的期权(bonds with embedded options)时，收益率的变化，将可能造成债券期望现金流的变化
- 于是，在应用久期公式计算久期时，必须考虑债券期望现金流与收益率之间的相互影响

c) 有效久期(期权调整的久期)

- 计算债券价值是考虑收益率的变化可能引起债券期望现金流变化
- 债券价格计算是同步考虑贴现率和期望现金流的可能变化
- 对于有嵌入期权的债券，有效久期与修正的久期一般不相等
- 有效久期能够不小于修正的久期；有效久期也能够不不小于修正的久期

d) 比较(例)

- 没有嵌入期权的债券：有效久期等于修正的久期
- 可赎回债券：修正的久期为5，有效久期为3；
- 担保抵押债务(CMO):修正的久期为7 ,有效久期为20

债券久期的近似计算

$$\text{近似久期} = \frac{P_{-} - P_{+}}{P_0(y_{+} - y_{-})}$$

例　一债券收益率为11％时，价格为96.2312；收益率增长10个基本点时，价格为95.4490；收益率降低10个基点时，价格为96.9704。

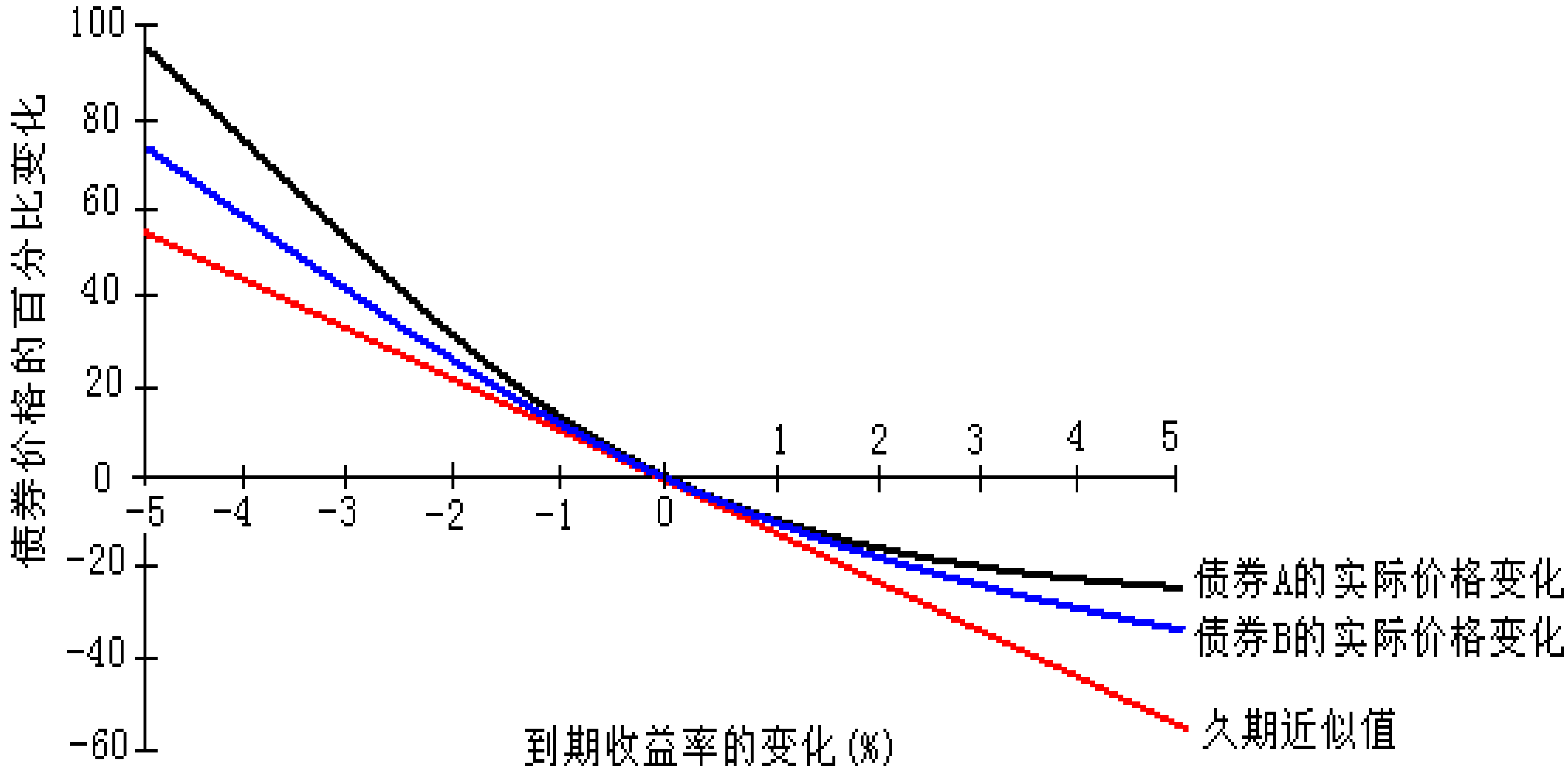
根据上式可得，债券的近似久期为

$$\frac{96.9704 - 95.4990}{96.2312 \times (0.056 - 0.054)} = 7.65$$

- **4. 5 债券的凸度**
  - 4. 5. 1 久期的不足

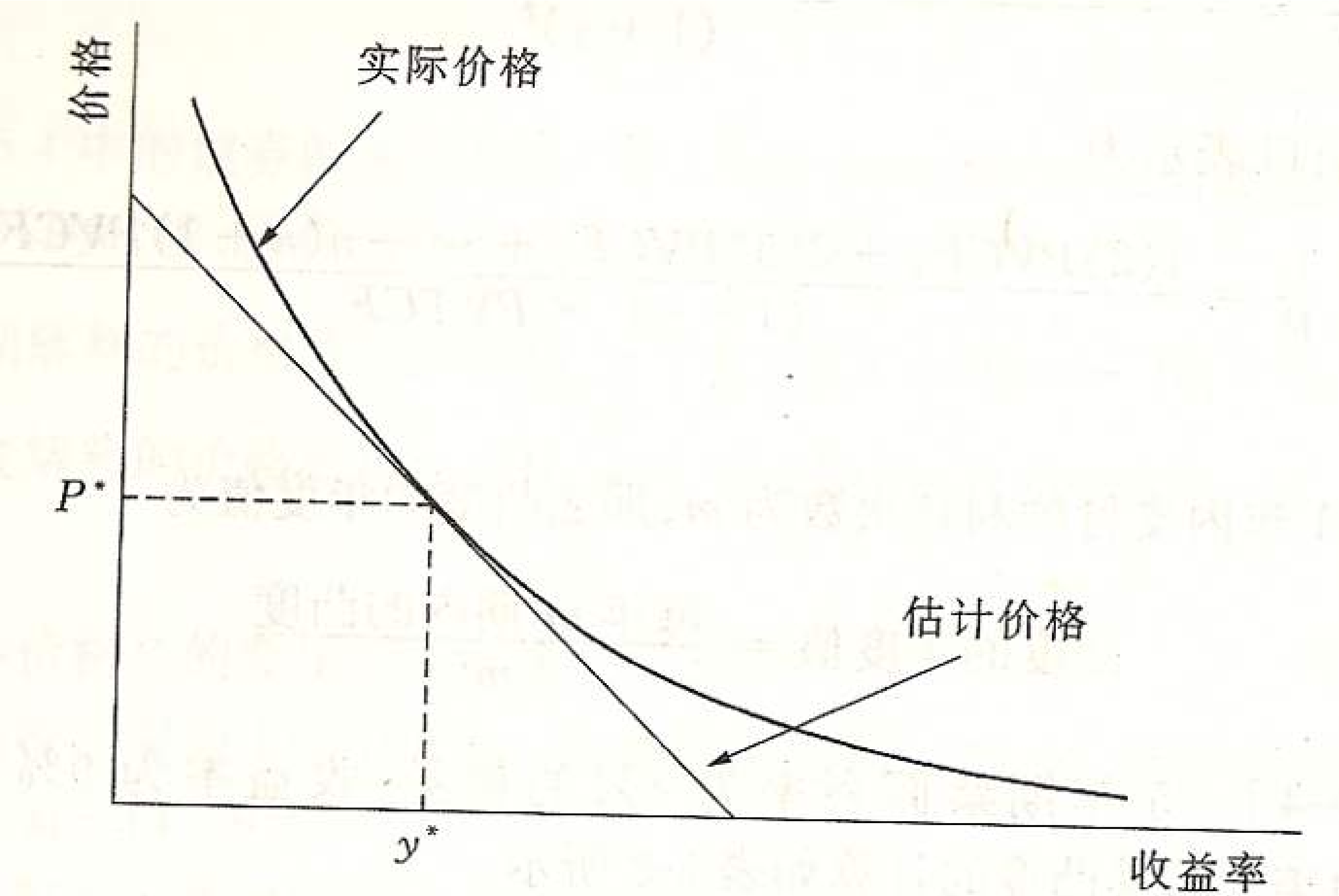
根据式（4-3'），债券价格变化的百分比作为到期收益率变化的函数，其图形是一条斜率为-D*的直线。所以，当债券收益变化时，能够这条直线对新产生的价格进行估计。

例如，图4-3中的债券A为30年期、8％息票利率、初始到期收益率8％的债券，可知其初始修正久期为11.26年。所以，当收益上升1个基点时，债券价格将下跌11.26×0.0001＝0.001126，即0.1126％。也就是说，根据修正久期，能够估计债券价格将跌至998.874元。而根据式（2-1）能够计算出此时的价格为998.875元。



100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
债券价格的百分比变化
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
到期收益率的变化(%)
债券A的实际价格变化
债券B的实际价格变化
久期近似值

图4-3 债券的凸度



价格收益率曲线切线

然而，从图4-1以及有关债券价格的利率敏感性的6条法则能够看到，债券价格变化的百分比与收益变化之间的关系并不是线性的，这使得对于债券收益的较大变化，利用久期对利率敏感性的测度将产生明显的误差。图4-3表白了这一点。债券A和债券B在初始处有相同的久期，相应的两条曲线在这一点相切，同步也与久期法则预期的价格变化百分比的直线相切于该点。这阐明，对于债券收益的微小变化，久期能够给出利率敏感性的精确测度。但伴随收益变化程度的增长，相应于债券A和债券B的两条曲线与久期近似直线之间的“间隔”不断扩大，表白久期法则越来越不精确。

从图4-3还能够看到，久期近似值总是在债券实际价格的下方。也就是说，当收益率下降时，它低估债券价格的增长程度，当收益率上升时，它高估债券价格的下跌程度。

债券A和债券B在初始处有相同的久期，但它们只是对较小的收益变化的敏感程度相同。对于较大的收益变化，债券A比债券B有更大的价格增长或更小的价格下跌。这是因为债券A比债券B具有更大的凸度。

– 4.5.2 债券凸度的计算

价格-收益曲线的曲率就称为债券的凸度（convexity measure）。凸度意味着债券的价格-收益曲线的斜率伴随收益率而变化：在较高收益率时变得平缓，即斜率是较小的负值；在较低收益率时变得陡峭，即斜率是较大的负值。

所以，凸度实际上是价格-收益曲线斜率的变化率。由式（4-3’）能够得

$$D_{\text{mod}} = -\frac{1}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial y}$$

可见，D_{mod}是价格-收益曲线的斜率，凸度等于D_{mod}对y的导数$\frac{\partial D_{\text{mod}}}{\partial y}$

求出 $\frac{\partial D_{\mathrm{mod}}}{\partial y}$ ，可得付息周期数为n，周期收益率为y的债券的凸度计算公式如下：

$$凸度=\frac{1}{P(1+y)^2}\sum_{t=1}^{n}\frac{t(t+1)C_t}{(1+y)^t}$$

其中， C_t为t时刻的现金支付。

利用下面的公式可把分期限计算的凸度转化为按年计算的凸度：

$$凸度(按年算)=\frac{凸度(分期限算)}{m^2}$$

其中m为每年的付息次数。

对于零息票债券，有

$$零息票债券凸度=\frac{n(n+1)}{(1+y)^2}$$

- 美元凸度

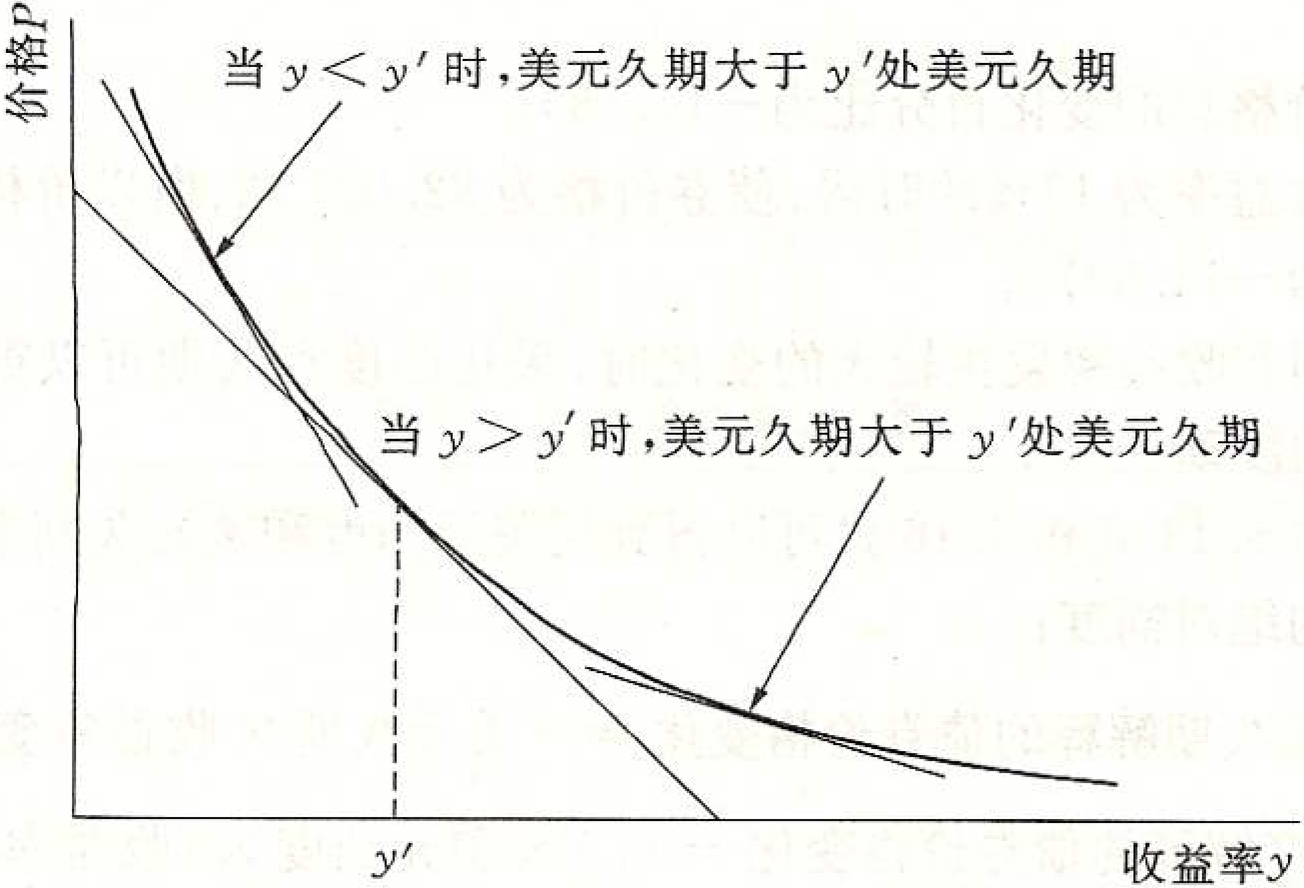
$$dP = \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \cdot (dy)^2 + o((dy)^2)$$

$$dP \Big/ P = \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{1}{P} dy + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \cdot \frac{1}{P} (dy)^2 + o((dy)^2) \Big/ P$$

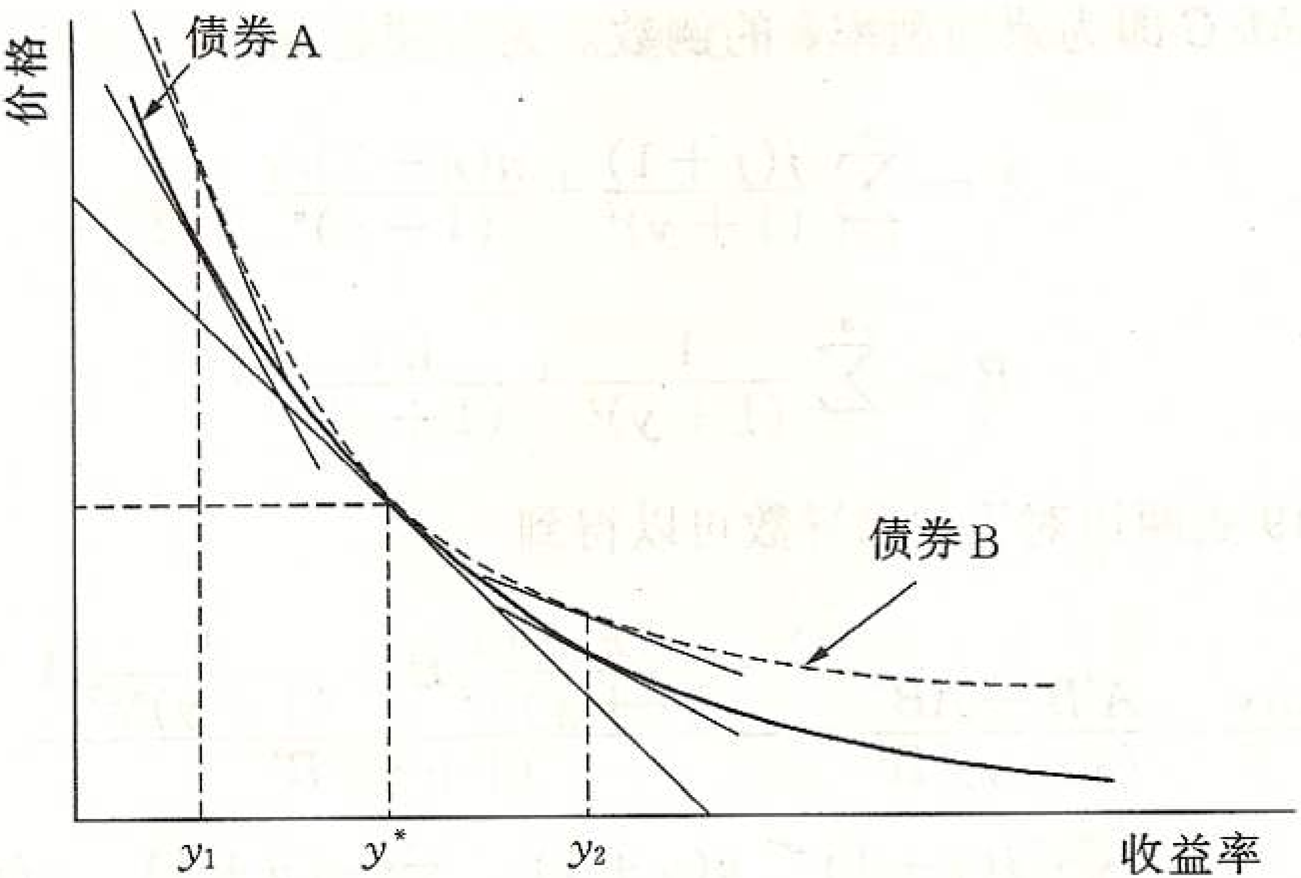
$$convexity \quad measure \ : \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \cdot \frac{1}{P}$$

$$dollar\ convexity\ measure : \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

4.5.3凸度与美元久期



债券的美元久期



美元久期的变化

4.5.4 properties of convexity

- Property 1: As the required yield increases(decreases),the convexity of a bond decreases(increases).This property is referred to as positive convexity.
- Property 2:For a given yield and maturity,the lower the coupon,the greater the convexity of a bond.
- Property 3:For a given yield and modified duration,the lower the coupon,the smaller the convexity.

4.5.4凸度的特征

1、收益率增长，债券的美元久期降低；收益率降低，债券的美元久期增长。

2、对于给定的收益率和到期期限，票面利率越低，债券的凸度越大。

3、给定收益率和修正久期，票面利率越低，债券的凸度越小。

4、久期增长时，凸度以加速度增长。