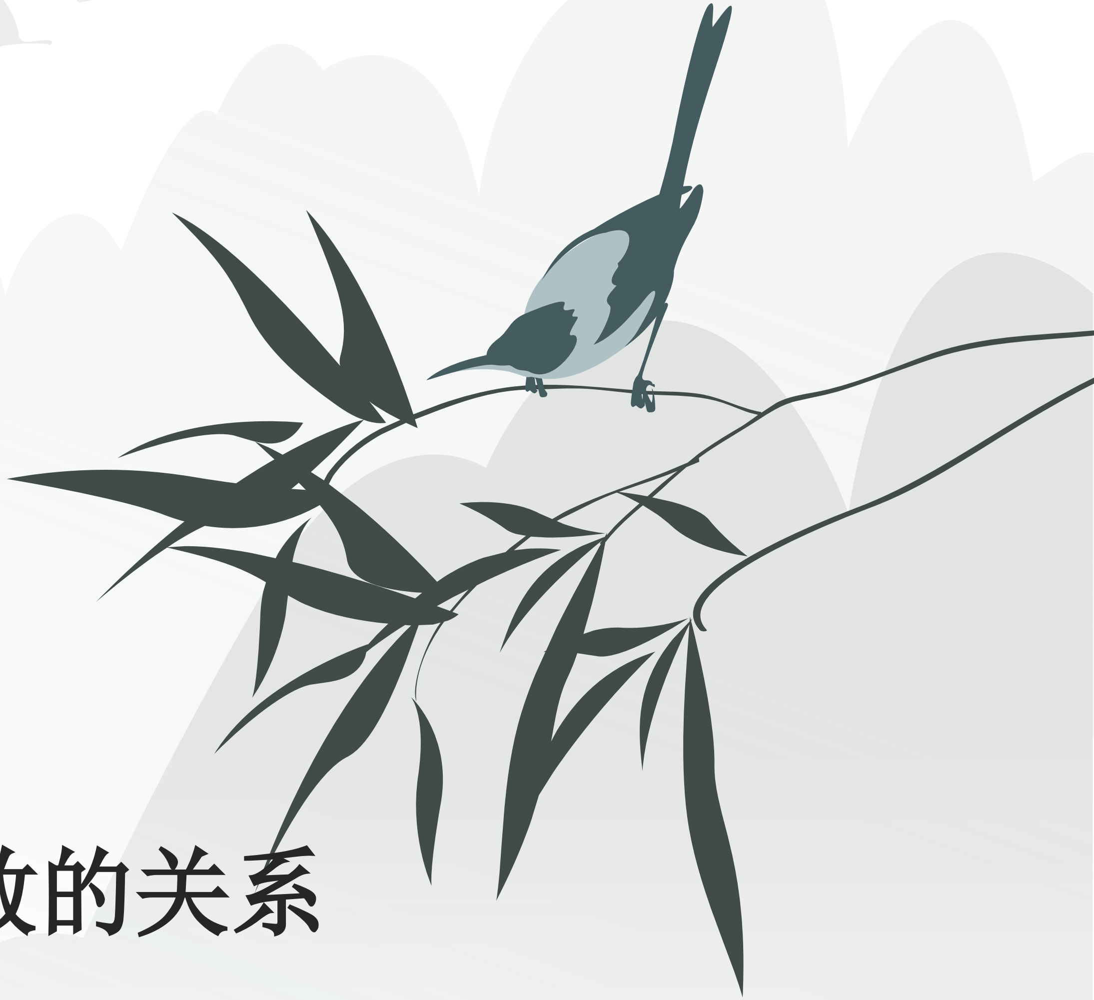
第二章
等式与不等式

2.1.2
一元二次方程的解集及其根与系数的关系



必备知识解读

知识点1　一元二次方程的解法

例1-1　(1) 方程$(x+1)^2-1=0$的解集为(　D　)

A.$\{-1,1\}$　　B.$\{-2,2\}$　　C.$\{0,2\}$　　D.$\{0,-2\}$

【解析】移项,得$(x+1)^2=1$,所以$x+1=\pm 1$,所以$x=0$或$x=-2$.

(2) 用配方法得方程$x^2-2x+5=0$的解集为$\underline{\varnothing}$.

【解析】$x^2-2x+5=(x-1)^2+4$,由$(x-1)^2+4=0$,得$(x-1)^2=-4$，所以方程无实数解，方程的解集为$\varnothing$.

例1-2 用公式法求下列方程的解集：

（1）$x^2-2x+3=0$；

【解析】 由题意知$a=1,b=-2,c=3$,所以

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times3=-8<0$.故方程的解集为$\varnothing$.

（2）$x^2+9x-2=-x^2+4x+10$;

【解析】 原方程化为$2x^2+5x-12=0$,

则$a=2,b=5,c=-12$,

所以$\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times2\times(-12)=121>0$,故方程有两个不相等的实数根,

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5\pm11}{4}$,即$x_1=\frac{3}{2}$,$x_2=-4$,故方程的解集为$\{-4,\frac{3}{2}\}$.

（3）$3x^2+1=2\sqrt{3}x$;

【解析】原方程化为$3x^2-2\sqrt{3}x+1=0$,

则$a=3$,$b=-2\sqrt{3}$,$c=1$,所以$\Delta=b^2-4ac=\left(-2\sqrt{3}\right)^2-4\times3\times1=0$,故方程有两个相等的实数根，$x=-\frac{b}{2a}=\frac{2\sqrt{3}}{2\times3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,即$x_1=x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

故方程的解集为$\{\frac{\sqrt{3}}{3}\}$.

（4）$x-\sqrt{x}-6=0$.

【解析】 设$\sqrt{x}=y$,则$y\geq 0$,且原方程可变为$y^2-y-6=0$,则$a=1$,$b=-1$,$c=-6$,所以$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times 1\times(-6)=25$,故$y^2-y-6=0$有两个不相等的实数根,$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1\pm 5}{2}$,即$y_1=3$,$y_2=-2$（舍）,从而$\sqrt{x}=3$,即$x=9$.故原方程的解集为$\{9\}$.

知识点2 一元二次方程根与系数的关系

例2-3 **[教材改编P52例2]** 已知方程$3x^2-5x-7=0$的两个根为x_1,x_2，则下列各式中正确的是(C)

A.$x_1+x_2=5,x_1x_2=7$

B.$x_1+x_2=-5,x_1x_2=-7$

C.$x_1+x_2=\frac{5}{3},x_1x_2=-\frac{7}{3}$

D.$x_1+x_2=-\frac{5}{3},x_1x_2=-\frac{7}{3}$

【解析】 已知方程$3x^2-5x-7=0$的两个根为x_1,x_2,根据一元二次方程根与系数的关系知$x_1+x_2=\frac{5}{3},x_1x_2=-\frac{7}{3}$.

关键能力构建

题型1 求一元二次方程的解集

例4 用适当的方法求下列方程的解集.

（1）$x^2-2x-8=0$;

【解析】方法1（配方法） 移项，得$x^2-2x=8$,配方，得$(x-1)^2=9$,由此可得

$x-1=\pm 3$,

$\therefore x_1=4,x_2=-2$,$\therefore$ 方程的解集为$\{-2,4\}$.

方法2（因式分解法） 原方程可化为$(x-4)(x+2)=0$,$\therefore x-4=0$或$x+2=0$,

$\therefore x_1=4,x_2=-2$,$\therefore$ 方程的解集为$\{-2,4\}$.

（2）$2x^2+4x-1=0$；

【解析】方法1（配方法） 移项，得$2x^2+4x=1$，

即$x^2+2x=\frac{1}{2}$，

配方，得$(x+1)^2=\frac{3}{2}$,

由此可得，$x+1=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$，

$\therefore x_1=-\frac{\sqrt{6}}{2}-1$，$x_2=\frac{\sqrt{6}}{2}-1$，

$\therefore$ 方程的解集为$\{-\frac{\sqrt{6}}{2}-1, \frac{\sqrt{6}}{2}-1\}$.

方法2（公式法） $\because a=2, b=4, c=-1$,

$\therefore \Delta=b^2-4ac=24>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$,

$\therefore x_1=-\frac{\sqrt{6}}{2}-1$，$x_2=\frac{\sqrt{6}}{2}-1$，

$\therefore$ 方程的解集为$\{-\frac{\sqrt{6}}{2}-1，\frac{\sqrt{6}}{2}-1\}$.

（3）$2x^2-7x+6=0$;

【解析】方法1（因式分解法） 原方程可化为$(x-2)(2x-3)=0$,$\therefore x-2=0$或

$2x-3=0$,

$\therefore x_1=2,x_2=\frac{3}{2}$,

$\therefore$ 方程的解集为$\{2,\frac{3}{2}\}$.

方法2（公式法） $\because a=2,b=-7,c=6$,

$\therefore \Delta=b^2-4ac=1>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{7\pm1}{4}$,

即$x_1=2,x_2=\frac{3}{2}$,$\therefore$ 方程的解集为$\{2,\frac{3}{2}\}$.

（4）$x^2-\sqrt{2}x=\frac{1}{2}$.

【解析】方法1（公式法） $\because a=1, b=-\sqrt{2}, c=-\frac{1}{2}, \therefore \Delta=b^2-4ac=4>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{\sqrt{2}\pm2}{2}$，

$\therefore x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}-1$，$x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}+1$，

$\therefore$ 方程的解集为$\{\frac{\sqrt{2}}{2}-1，\frac{\sqrt{2}}{2}+1\}$.

方法2（配方法） 配方，得$\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$,由此可得，$x-\frac{\sqrt{2}}{2}=\pm1$，$\therefore x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}-1$，

$x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}+1$，

$\therefore$ 方程的解集为$\{\frac{\sqrt{2}}{2}-1，\frac{\sqrt{2}}{2}+1\}$.

【学会了吗|变式题】

1.求下列方程的解集:

（1）$4x^2-4x-1=0$;

【答案】方程的两边同时加上2，得$4x^2-4x+1=2$,

即$(2x-1)^2=2$,$\therefore 2x-1=\pm\sqrt{2}$,$\therefore x_1=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$,$x_2=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore$ 方程的解集为$\{\frac{1-\sqrt{2}}{2},\frac{1+\sqrt{2}}{2}\}$.

（2）$x^2+3x+1=0$;

【答案】$\because a=1,b=3,c=1$,$\therefore b^2-4ac=3^2-4\times 1\times 1=5>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$,即$x_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$,$x_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.$\therefore$ 方程的解集为$\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\}$.

（3）$x^2-7x+10=0$.

【答案】$\because x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$,

$\therefore$ 原方程可化为$(x-2)(x-5)=0$,

从而可知$x-2=0$或$x-5=0$,

即$x_1=2$,$x_2=5$.故方程的解集为$\{2,5\}$.

例5 求下列方程的解集.

(1) $(x^2-5x)^2-2(x^2-5x)-24=0$;

【解析】 令$t=x^2-5x$,

则原方程可以化为$t^2-2t-24=0$,即$(t-6)(t+4)=0$,故$t=6$或$t=-4$,

即$x^2-5x=6$或$x^2-5x=-4$.

解得$x_1=-1, x_2=6, x_3=1, x_4=4$,

所以原方程的解集为$\{-1,1,4,6\}$.

教材链接 POINT

换元法是数学问题中的一个非常重要的方法，此处正是对教材第53页【练习A】T3的链接，同学们要好好感悟换元法的妙用.

（2）$3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$.

【解析】令$\sqrt{x^2+5x+1}=t(t\geq 0)$,则原方程化为$3t^2+2t-5=0$,解得$t_1=1$,

$t_2=-\frac{5}{3}$（舍去）.

所以$\sqrt{x^2+5x+1}=1$,即$x^2+5x=0$,

解得$x_1=-5,x_2=0$.

所以原方程的解集为$\{-5,0\}$.

例6 **[教材改编P53 T4]** 求关于x的方程$ax^2=a-2$的解集.

【解析】（1）当$a=0$时，方程为$0=-2$，显然不成立，此时方程的解集为$\varnothing$.

（2）当$a\neq 0$时，由$ax^2=a-2$得$x^2=\frac{a-2}{a}$.

当$\frac{a-2}{a}<0$，即$0<a<2$时，方程$x^2=\frac{a-2}{a}$无解，即方程$ax^2=a-2$的解集为$\varnothing$.

当$\frac{a-2}{a}>0$，即$a<0$或$a>2$时，方程$x^2=\frac{a-2}{a}$的解为$x=\pm\sqrt{\frac{a-2}{a}}$,所以方程

$ax^2=a-2$的解集为$\{-\sqrt{\frac{a-2}{a}},\sqrt{\frac{a-2}{a}}\}$.

当$a=2$时，$2x^2=0$，方程的解集为$\{0\}$.

综上所述，当$0\leq a<2$时，方程$ax^2=a-2$的解集为$\varnothing$ ；

当$a<0$或$a>2$时，方程$ax^2=a-2$的解集为$\{-\sqrt{\frac{a-2}{a}},\sqrt{\frac{a-2}{a}}\}$;

当$a=2$时，方程$ax^2=a-2$的解集为$\{0\}$.

题型2 一元二次方程的判别式的应用

例7 对于任意实数k，关于x的方程$x^2-2(k+1)x-k^2+2k-1=0$的根的情况为(C)

A.有两个相等的实数根　　B.没有实数根

C.有两个不相等的实数根　　D.无法确定

【解析】所给的一元二次方程中，$a=1,b=-2(k+1),c=-k^2+2k-1$,所以$\Delta=b^2-4ac=[-2(k+1)]^2-4\times1\times(-k^2+2k-1)=8+8k^2>0$,故此方程有两个不相等的实数根.

例8 **[教材改编P53练习A T2]** 已知关于x的方程$(m+1)x^2+2mx+m-3=0$有实数根.

（1）求m的取值范围;

【解析】 关于x的方程$(m+1)x^2+2mx+m-3=0$有实数根，分两种情况讨论:

①当$m+1=0$，即$m=-1$时，原方程是一元一次方程，此时方程为$-2x-4=0$，必有实数根;

②当$m+1\neq 0$，即$m\neq -1$时，原方程是一元二次方程,

$\Delta=b^2-4ac=(2m)^2-4\times(m+1)\times(m-3)=8m+12\geq 0$,解得$m\geq-\frac{3}{2}$且$m\neq-1$.

综上可知，当$m\geq-\frac{3}{2}$ 时，方程$(m+1)x^2+2mx+m-3=0$有实数根.

（2）m为何值时，方程有两个相等的实数根？并求出这两个实数根.

【解析】$\because$ 关于x的方程$(m+1)x^2+2mx+m-3=0$有两个相等的实数根,

$\therefore \Delta=b^2-4ac=(2m)^2-4\times(m+1)\times(m-3)=8m+12=0$,解得$m=-\frac{3}{2}$,

$\therefore$ 方程为$-\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{9}{2}=0$,

两边同时乘以-2，得$x^2+6x+9=0$,即$(x+3)^2=0$,解得$x_1=x_2=-3$.

【学会了吗|变式题】

2.设集合$A=\{x|x^2+4x=0\}$,$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$,若$B\subseteq A$,求实数$a$的取值范围.

【解析】$A=\{x|x^2+4x=0\}=\{-4,0\}$,因为$B\subseteq A$,所以分$B=A$和$B\subsetneqq A$两种情况讨论.

(1)当$A=B$时,$B=\{-4,0\}$,则有$-4,0$是方程$x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$的两根,于是$-2(a+1)=-4$,得$a=1$.

(2)当$B\subsetneqq A$时,若$B=\varnothing$,则$\Delta=4(a+1)^2-4\left(a^2-1\right)<0$,解得$a<-1$;

若$B\neq\varnothing$,则$B=\{-4\}$或$B=\{0\}$,$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=0$,解得$a=-1$,验证知$B=\{0\}$,满足条件.

综上可知,实数a的取值范围为$a=1$或$a\leq-1$.

题型3 一元二次方程根与系数的关系的应用

例9 已知集合$A=\{x|x^2-bx+c=0\}$,$B=\{1,-2\}$，$A=B$,则b与c的值分别为(**D**)

A.$b=-1,c=2$　　B.$b=1,c=-2$　　C.$b=1,c=2$　　D.$b=-1,c=-2$

【解析】根据方程根与系数的关系有$\begin{cases}1+(-2)=-(-b),\\1\times(-2)=c,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=-1,\\c=-2.\end{cases}$

例10 **[教材改编P84 T2]** 关于x的方程$x^2-2(a-2)x-3=0$有一根为3，则另一根为(**A**)

A.-1　　B.3　　C.2　　D.1

【解析】方法1设方程另一根为t,根据根与系数的关系得到$3\times t=-3$,解得$t=-1$.

方法2把$x=3$代入方程，得$9-6(a-2)-3=0$，解得$a=3$.

$\therefore$ 原方程为$x^2-2x-3=0$,解得$x_1=-1$，$x_2=3$.

例11（1） **［教材改编P52例2（2）］**设方程$x^2-6x+1=0$的两个不等实根分别为x_1，x_2，则$|x_1-x_2|=$(**D**)

A.3　　B.6　　C.$2\sqrt{2}$　　D.$4\sqrt{2}$

【解析】根据题意，$x_1+x_2=6$，$x_1x_2=1$，

则$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{6^2-4}=4\sqrt{2}$．

（2）［教材改编P53练习B T2］设x_1，x_2是方程$x^2+3x-3=0$的两个实数根，则$\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$的值是(　**B**　)

A.5　　　B.−5　　　C.1　　　D.−1

【解析】由x_1，x_2是方程$x^2+3x-3=0$的两个实数根，可得$x_1+x_2=-3$，$x_1x_2=-3$，则$\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{9+6}{-3}=-5$.

例12 **［教材改编P60 T13］** 已知关于x的一元二次方程$2x^2-mx-2m+1=0$的两根的平方和是$\frac{29}{4}$,求m的值.

【解析】 设方程的两根分别为x_1,x_2,由已知，得$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{m}{2},\\x_1x_2=\frac{-2m+1}{2}.\end{cases}$

$\because x_1^2+x_2^2=\frac{29}{4}$,$\therefore (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{29}{4}$,

$\therefore \left(\frac{m}{2}\right)^2-2\times\frac{-2m+1}{2}=\frac{29}{4}$,解得$m_1=-11$,$m_2=3$.

当$m=-11$时，方程为$2x^2+11x+23=0$,