2025



# 课时规范练49　基本立体图形及空间几何体的表面积与体积

## 基础　巩固练

1.下列说法正确的是( D )

A.棱台的侧棱长都相等

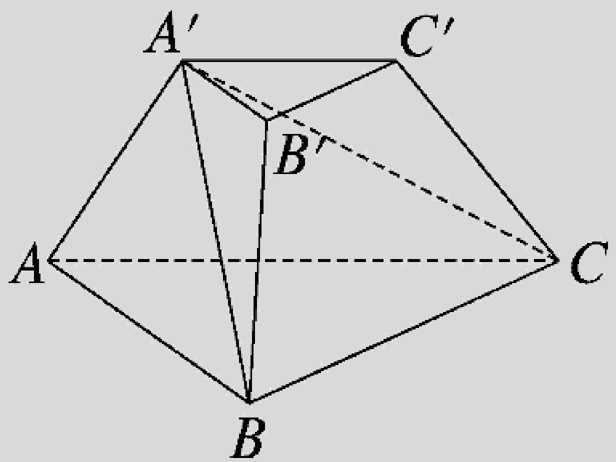
B.棱锥被平面截成的两部分是棱锥和棱台

C.棱柱的侧棱都相等,侧面都是全等的平行四边形

D.棱台的两个底面相似

解析　由棱台的定义知棱台的侧棱长不一定都相等,而棱台的两个底面相似,所以A不正确,D正确;只有用平行于棱锥底面的平面截棱锥才能得到一个棱锥和一个棱台,B不正确;棱柱的侧棱都相等且相互平行,且侧面是平行四边形,但侧面并不一定全等,C不正确.

**2**.(2024·安徽淮北模拟)如图所示,在三棱台$A'B'C'$-$ABC$中,沿平面$A'BC$截去三棱锥$A'$-$ABC$,则剩余的部分是( B )




A.三棱锥　　B.四棱锥

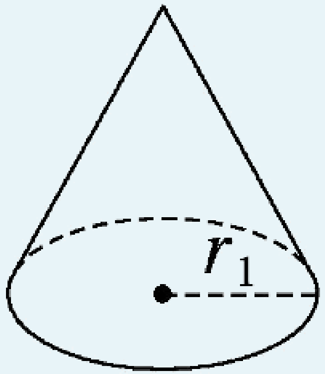
C.三棱柱　　D.组合体

解析　三棱台$A'B'C'$-$ABC$中,沿平面$A'BC$截去三棱锥$A'$-$ABC$,剩余的部分是以$A'$为顶点,四边形$BCC'B'$为底面的四棱锥$A'$-$BCC'B'$.

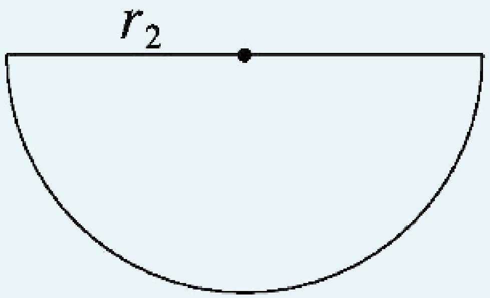
**3**.(2021·新高考Ⅰ,3)已知圆锥的底面半径为$\sqrt{2}$,其侧面展开图为一个半圆,则该圆锥的母线长为( B )

A.2　　B.$2\sqrt{2}$　　C.4　　D.$4\sqrt{2}$

**解析** 设圆锥底面半径为 $r_1$,圆锥侧面展开图半圆所在圆的半径为 $r_2$.由条件得,$2\pi r_1=\frac{1}{2}\cdot 2\pi r_2$,则 $r_2=2r_1=2\sqrt{2}$,故该圆锥的母线长为 $2\sqrt{2}$.故选 B.




图①



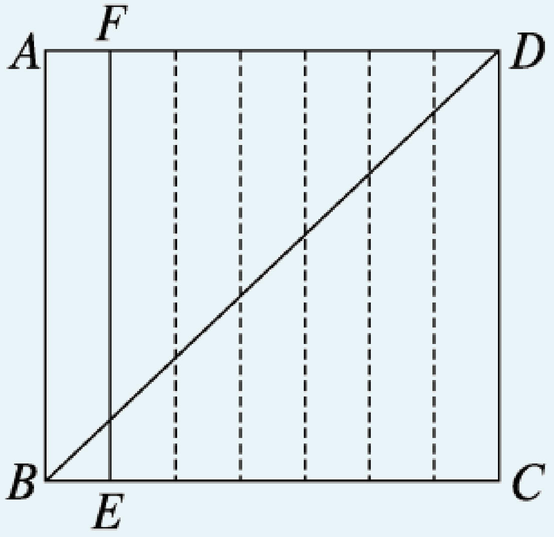

图②

4.(2024·江西新余一中校考)《增减算法统宗》中,许多数学问题都是以歌诀的形式出现的.其中有一首“葛藤缠木”,大意是说:有根高2丈的圆木柱,该圆木的周长为3尺,有根葛藤从圆木的根部向上生长,缓慢地自下而上均匀绕该圆木7周,刚好长的和圆木一样高.已知1丈等于10尺,则能推算出该葛长为( C )

A.21尺　　B.25尺　　C.29尺　　D.33尺

**解析** 如图所示,圆柱的侧面展开图是矩形$ABEF$,由题意得圆柱的高$AB$=2丈=20尺,底面圆的周长$BE$=3尺,则葛藤绕圆柱7周后长为

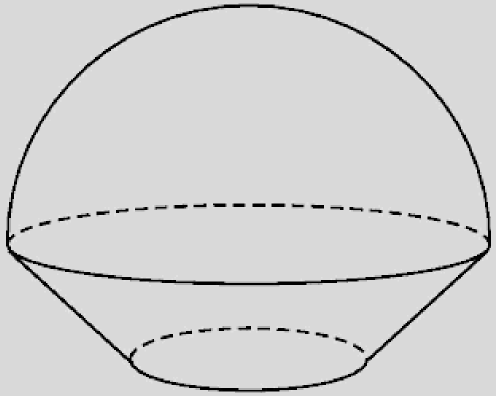
$BD=\sqrt{AB^2+(7BE)^2}=\sqrt{20^2+21^2}$=29(尺).



5.(2024·福建莆田模拟)某校科技社利用3D打印技术制作实心模型.如图,该模型的上部分是半球,下部分是圆台.其中半球的体积为$144\pi$ cm$^3$,圆台的上底面半径及高均是下底面半径的一半.打印所用原料密度为1.5 g/cm$^3$,不考虑打印损耗,制作该模型所需原料的质量约为( C )($1.5\pi\approx4.7$)

A.3 045.6 g　　B.1 565.1 g

C.972.9 g　　D.296.1 g



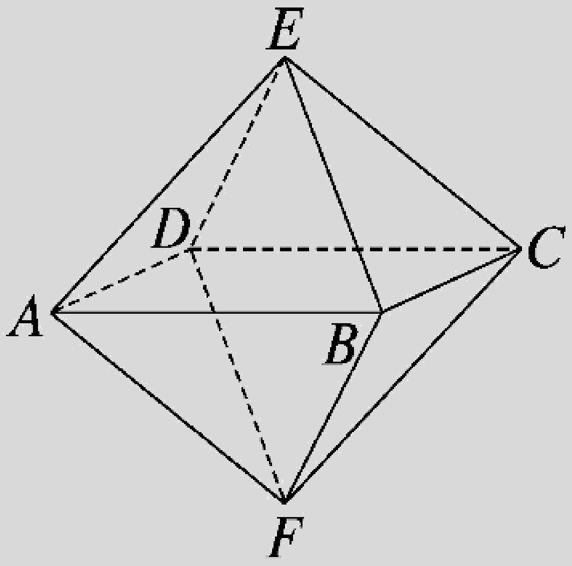
**解析** 设半球的半径为 $R$,因为 $V_{半球}=\frac{2}{3}\pi R^3=144\pi\ \mathrm{cm}^3$,所以 $R=6\ \mathrm{cm}$,由题意圆台的上底面半径及高均是 3,下底面半径为 6,所以 $V_{圆台}=\frac{1}{3}(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}S_{下}})h$

$=\frac{1}{3}(3^2\cdot\pi+6^2\cdot\pi+\sqrt{3^2\cdot\pi\cdot6^2\cdot\pi})\times3=63\pi(\mathrm{cm}^3)$,所以该实心模型的体积为

$V=V_{半球}+V_{圆台}=144\pi+63\pi=207\pi(\mathrm{cm}^3)$,所以制作该模型所需原料的质量为

$207\pi\times1.5\approx207\times4.7=972.9(\mathrm{g})$.

6.(2024·湖南邵阳模拟)如图所示,正八面体的棱长为2,则此正八面体的表面积与体积之比为( D )



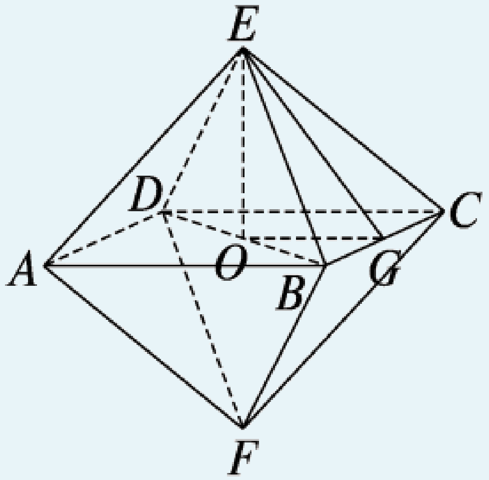

A.$\frac{5\sqrt{6}}{2}$

B.$\frac{\sqrt{6}}{2}$

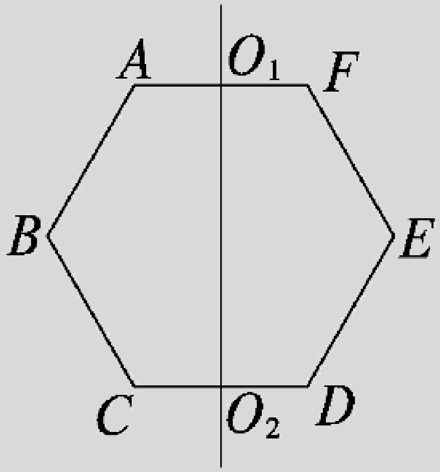
C.$\frac{\sqrt{6}}{3}$

D.$\frac{3\sqrt{6}}{2}$

**解析** 如图,点 $O$ 为正方形 $ABCD$ 的中心,连接 $EO,BD,EG\perp BC,G$ 为垂足.由边长为 2,可得$\triangle EBC$ 的 $BC$ 边上的高 $EG=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3},EO=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$,则正八面体的表面积为 $S=8\times\frac{EG\cdot BC}{2}=8\times\frac{\sqrt{3}\times2}{2}=8\sqrt{3}$.正八面体的体积为 $V=2\times\frac{AB\cdot BC\cdot EO}{3}=2\times\frac{2\times2\times\sqrt{2}}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$.所以此正八面体的表面积与体积之比为$\frac{3\sqrt{6}}{2}$.



7.(2024·福建福州模拟)如图,正六边形$ABCDEF$的边长为6,设边$AF$,$CD$的中点分别为$O_1$,$O_2$,已知某几何体是由此正六边形$ABCDEF$绕直线$O_1O_2$旋转一周而成,则该几何体的体积为( B )

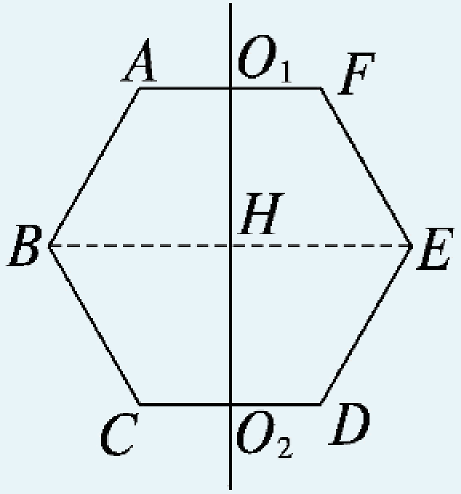



A.$378\sqrt{3}\pi$　　B.$126\sqrt{3}\pi$

C.$90\sqrt{3}\pi$　　D.$63\sqrt{3}\pi$

**解析** 连接$BE$交$O_1O_2$于点$H$,因为该几何体是由此正六边形$ABCDEF$绕直线$O_1O_2$旋转一周而成,所以该几何体为两个圆台组合而成的组合体.由题可得 $O_1F=3,HE=EF=6$,则 $O_1H=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$,所以

$V_{台}=\frac{1}{3}\pi(3^2+6^2+\sqrt{3^2\times 6^2})\times 3\sqrt{3}=63\sqrt{3}\pi$,则该几何体的体积为 $2V_{台}=126\sqrt{3}\pi$.



**8**.(2022·全国甲,理 9)甲、乙两个圆锥的母线长相等,侧面展开图的圆心角之和为 $2\pi$,侧面积分别为 $S_{甲}$和 $S_{乙}$,体积分别为 $V_{甲}$和 $V_{乙}$.若$\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=2$,则$\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=$( C )

A.$\sqrt{5}$

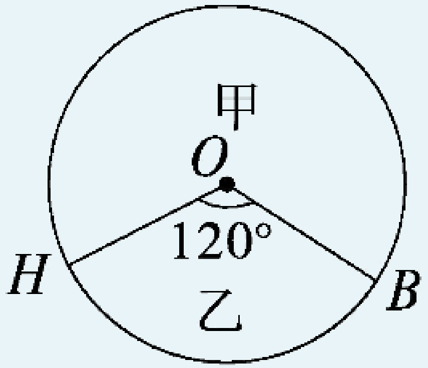
B.$2\sqrt{2}$

C.$\sqrt{10}$

D.$\frac{5\sqrt{10}}{4}$

**解析** 如图,甲、乙两个圆锥的侧面展开图刚好拼成一个圆,设圆的半径(即圆锥的母线长)为3,则圆的周长为$6\pi$,甲、乙两个圆锥的底面半径分别为$r_1,r_2$,高分别为$h_1,h_2$,则$2\pi r_1=4\pi,2\pi r_2=2\pi$,则$r_1=2,r_2=1$,由勾股定理得,

$h_1=\sqrt{5},h_2=2\sqrt{2}$,所以$\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=\frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2h_2}=\frac{2^2\times\sqrt{5}}{1^2\times2\sqrt{2}}=\sqrt{10}$,故选 C.



**9**.(2023·全国甲,文10)在三棱锥$P$-$ABC$中,△$ABC$是边长为2的等边三角形,$PA=PB=2$,$PC=\sqrt{6}$,则该棱锥的体积为( A )

A.1　　B.$\sqrt{3}$

C.2　　D.3

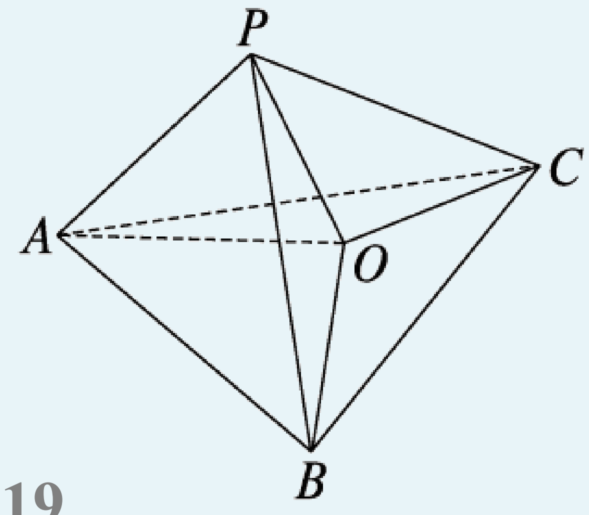
**解析** (方法一)如图,作$AO\perp$平面$PBC$,设$AO=h$,连接$OP,OB,OC$,由$AP=AB=AC=2$,可得$OP=OB=OC$,即$O$为$\triangle PBC$的外心.在$\triangle PBC$中,

$\cos\angle PBC=\dfrac{PB^2+BC^2-PC^2}{2PB\cdot BC}=\dfrac{4+4-6}{2\times2\times2}=\dfrac{1}{4}$,

则$\sin\angle PBC=\sqrt{1-\cos^2\angle PBC}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.设$\triangle PBC$的外接圆半径为$R$,$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin\angle PBC}=2R$,

解得$R=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.在$\mathrm{Rt}\triangle AOP$中,$\because AO^2+PO^2=AP^2$,$\therefore h=AO=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$.$\therefore S_{\triangle BPC}=\dfrac{1}{2}\cdot PB\cdot BC\cdot\sin\angle PBC=\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

$\therefore V_{P\text{-}ABC}=V_{A\text{-}BPC}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle BPC}\cdot h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{15}}{2}\times\dfrac{2\sqrt{15}}{5}=1$.



(方法二)如图,过点 $P$ 作 $PO\perp$平面 $ABC$ 于点 $O$,连接 $CO$ 并延长交 $AB$ 于点 $D$,连接 $PD$. $\because PA=PB=AB$, $\therefore D$ 为 $AB$ 的中点. $\therefore CD=\sqrt{3}$, $PD=\sqrt{3}$. 由 $PO\perp CD$,设 $OD=x$, $0\leq x<\sqrt{3}$. 由 $PD^2-OD^2=PC^2-OC^2$,得$(\sqrt{3})^2-x^2=6-(\sqrt{3}-x)^2$,解得 $x=0$ 或 $x=\sqrt{3}$(舍去), $\therefore PD\perp$平面 $ABC$. 则 $V_{P\text{-}ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot PD=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\times\sqrt{3}=1$. 故选 A.