湖南省长沙浏阳市2023-2024学年高三3月份第一次模拟考试数学试卷

考生请注意：

1．答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。

2．第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。

3．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知双曲线$E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，**P**是双曲线**E**上的一点，且$|PF_2|=2|PF_1|$．若直线$PF_2$与双曲线**E**的渐近线交于点**M**，且**M**为PF_2的中点，则双曲线**E**的渐近线方程为(　　)

A．$y=\pm\dfrac{1}{3}x$　　B．$y=\pm\dfrac{1}{2}x$　　C．$y=\pm 2x$　　D．$y=\pm 3x$

2．已知函数$f(x)=\sin^2x+\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，则$f(x)$的最小值为（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{1}{4}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

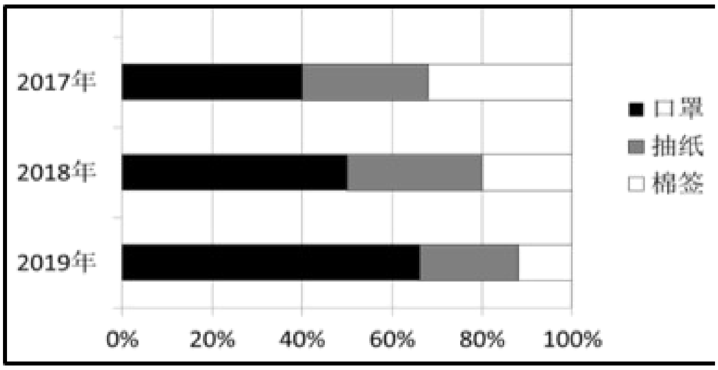
3．定义域为**R**的偶函数$f(x)$满足任意$x\in\mathbf{R}$，有$f(x+2)=f(x)-f(1)$，且当$x\in[2,3]$时，$f(x)=-2x^2+12x-18$.若函数$y=f(x)-\log_a(x+1)$至少有三个零点，则a的取值范围是（　　）

A．$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　B．$\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$　　C．$\left(0,\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$　　D．$\left(0,\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$

4．若函数$f(x)=x^3-mx^2+2x(m\in R)$在$x=1$处有极值，则$f(x)$在区间$[0,2]$上的最大值为（　　）

A．$\dfrac{14}{27}$　　B．2　　C．1　　D．3

5．某工厂只生产口罩、抽纸和棉签，如图是该工厂2017年至2019年各产量的百分比堆积图（例如：2017年该工厂口罩、抽纸、棉签产量分别占40%、27%、33%），根据该图，以下结论一定正确的是（　　）



A．2019年该工厂的棉签产量最少

B．这三年中每年抽纸的产量相差不明显

C．三年累计下来产量最多的是口罩

D．口罩的产量逐年增加

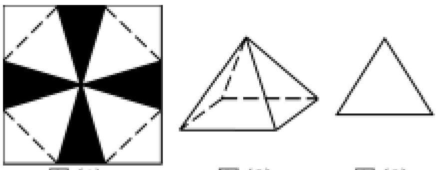
6．已知四棱锥 $E-ABCD$，底面 ***ABCD*** 是边长为 **1** 的正方形，$ED=1$，平面 $ECD\perp$ 平面 ***ABCD***，当点 ***C*** 到平面 ***ABE*** 的距离最大时，该四棱锥的体积为（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{6}$　　**B**．$\frac{1}{3}$　　**C**．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　**D**．1

7．直线 $y=kx+1$ 与抛物线 ***C***：$x^2=4y$ 交于 ***A***，***B*** 两点，直线 $l//AB$，且 ***l*** 与 ***C*** 相切，切点为 ***P***，记 $\vee PAB$ 的面积为 ***S***，则 $S-|AB|$ 的最小值为(　　)

A．$-\frac{9}{4}$　　**B**．$-\frac{27}{4}$　　**C**．$-\frac{32}{27}$　　**D**．$-\frac{64}{27}$

8．将一张边长为12cm的纸片按如图**(1)**所示阴影部分裁去四个全等的等腰三角形，将余下部分沿虚线折叠并拼成一个有底的正四棱锥模型，如图**(2)**放置，如果正四棱锥的主视图是正三角形，如图**(3)**所示，则正四棱锥的体积是(　　)



图(1)　　图(2)　　图(3)

A．$\frac{32}{3}\sqrt{6}cm^3$　　**B**．$\frac{64}{3}\sqrt{6}cm^3$　　**C**．$\frac{32}{3}\sqrt{2}cm^3$　　**D**．$\frac{64}{3}\sqrt{2}cm^3$

9．已知函数 $f\left(x\right)=\sin(2x+\varphi)$，其中 $\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$，若 $\forall x\in R,f(x)\le\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 恒成立，则函数 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间为（　　）

A．$\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in z)$　　**B**．$\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in z)$

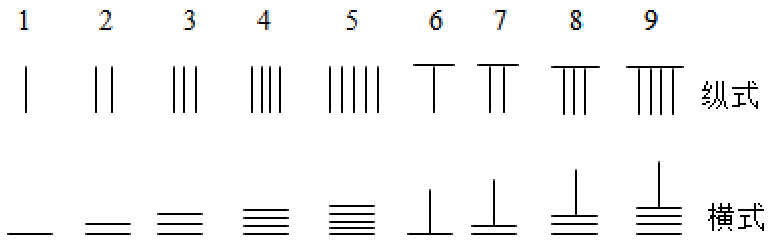
C．$\left[k\pi+\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in z)$　　**D**．$\left[k\pi,k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in Z)$

10．已知平面 α，β，直线 l 满足 $l\subset\alpha$，则“$l\perp\beta$”是“$\alpha\perp\beta$”的（　　）

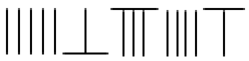
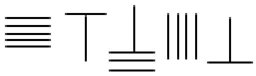
A．充分不必要条件　　**B**．必要不充分条件

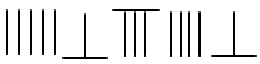
C．充要条件　　**D**．即不充分也不必要条件

11．中国古代用算筹来进行记数，算筹的摆放形式有纵横两种形式（如图所示），表示一个多位数时，像阿拉伯记数一样，把各个数位的数码从左到右排列，但各位数码的筹式需要纵横相间，其中个位、百位、方位**……**用纵式表示，十位、千位、十万位**……**用横式表示，则 **56846** 可用算筹表示为（　　）



中国古代的算筹数码

A. 　　B. 　　C. 

D. 

12．在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，若$a_5a_6=3$，则$\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_{10}=$（　　）

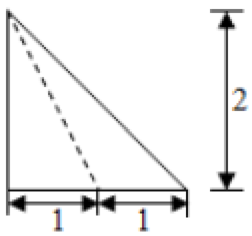
A．$1+\log_3 5$　　B．6　　C．4　　D．5

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

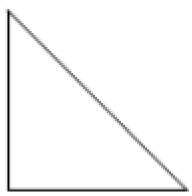
13．若函数$f(x)=\sin\left(2\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{1}{2}$在区间$[0,\pi]$上恰有 4 个不同的零点，则正数$\omega$的取值范围是______.

14．设全集$U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid -3<x\le 1,x\in Z\}$，$B=\{x\mid x^2-x-2\ge 0,x\in R\}$，则$A\cap \complement_U B=$______.

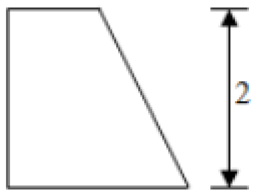
15．某几何体的三视图如图所示（单位：cm），则该几何体的体积是_____cm^3；最长棱的长度是_____cm .



正视图



侧视图



俯视图

16．已知四棱锥$P-ABCD$，底面四边形$ABCD$为正方形，$PA=PB=PC=PD$，四棱锥的体积为$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，在该四棱锥内放置一球O，则球O体积的最大值为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

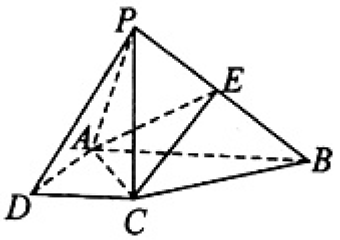
17．（12 分）在本题中，我们把具体如下性质的函数 $f(x)$ 叫做区间 D 上的闭函数：① $f(x)$ 的定义域和值域都是 D；② $f(x)$ 在 D 上是增函数或者减函数.

（1）若 $f(x)=\tan(\omega x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是闭函数，求常数 ω 的值；

（2）找出所有形如 $f(x)=a\log_3 x+b\sqrt{x}$ 的函数（a,b 都是常数），使其在区间 $[1,9]$ 上是闭函数.

18．（12 分）如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,四边形 $ABCD$ 是直角梯形，$AB\perp AD, AB//CD, PC\perp$ 底面 $ABCD$

$AB=2AD=2CD=4, PC=2a, E$,是 PB 的中点.



（1）.求证:平面 $EAC\perp$ 平面 PBC；

（2）.若二面角 $P-AC-E$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,求直线 PA 与平面 EAC 所成角的正弦值.

19．（12 分）在直角坐标系 xOy 中，点 P 的坐标为 $\left(a,\sqrt{3}a\right)$，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=a+\dfrac{1}{2}t, \\ y=\sqrt{3}a+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数，a 为常数，且 $a>0$）.以直角坐标系的原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴，且两个坐标系取相等的长度单位，建立极坐标系，圆 C 的极坐标方程为 $\rho=2$.设点 P 在圆外.

（1）求 a 的取值范围.

（2）设直线 l 与圆 C 相交于 A,B 两点，若 $|PA|=|AB|$，求 a 的值.

20．（12 分）已知 $f(x)=2\ln(x+2)-(x+1)^2$，$g(x)=k(x+1)$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 $k=2$ 时，求证：对于 $\forall x>-1$，$f(x)<g(x)$ 恒成立；

（3）若存在 $x_0>-1$，使得当 $x\in(-1,x_0)$ 时，恒有 $f(x)>g(x)$ 成立，试求 k 的取值范围.

21．（12 分）在**△*ABC*** 中，角 A,B,C 所对的边分别为 $a,b,c,$ 向量 $\vec{m}=\left(2a-\sqrt{3}b,\sqrt{3}c\right)$，向量 $\vec{n}=(\cos B, cosC)$，且 $\vec{m}//\vec{n}$.

（1）求角C的大小；

（2）求$y=sinA+\sqrt{3}sin(B-\frac{\pi}{3})$的最大值.

22.（10分）已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且满足$2\cos B=\frac{2a-b}{c}$.

（1）求角C的大小；

（2）若$\triangle ABC$的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，求$\triangle ABC$的周长的最小值.

参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

由双曲线定义得$|PF_2|=4a$，$|PF_1|=2a$，OM是$\triangle PF_1F_2$的中位线，可得$|OM|=a$，在$\triangle OMF_2$中，利用余弦定理即可建立a,c关系，从而得到渐近线的斜率.

【详解】

根据题意，点P一定在左支上.

由$|PF_2|=2|PF_1|$及$|PF_2|-|PF_1|=2a$，得$|PF_1|=2a$，$|PF_2|=4a$，

再结合M为PF_2的中点，得$|PF_1|=|MF_2|=2a$，

又因为OM是$\triangle PF_1F_2$的中位线，又$|OM|=a$，且$OM//PF_1$，

从而直线PF_1与双曲线的左支只有一个交点.

在$\triangle OMF_2$中$\cos\angle MOF_2=\frac{a^2+c^2-4a^2}{2ac}$.——①

由$\tan\angle MOF_2=\frac{b}{a}$，得$\cos\angle MOF_2=\frac{a}{c}$.——②

由①②，解得$\frac{c^2}{a^2}=5$，即$\frac{b}{a}=2$，则渐近线方程为$y=\pm 2x$.

故选：C.

【点睛】

本题考查求双曲线渐近线方程，涉及到双曲线的定义、焦点三角形等知识，是一道中档题.

2、A

【解析】

先通过降幂公式和辅助角法将函数转化为$f\left(x\right)=1-\dfrac{1}{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，再求最值.

【详解】

已知函数$f(x)=\sin^2x+\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

$=\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\dfrac{1-\cos\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)}{2}$，

$=1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos 2x}{2}-\dfrac{\sqrt{3}\sin 2x}{2}\right)=1-\dfrac{1}{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

因为$\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\in\left[-1,1\right]$，

所以$f(x)$的最小值为$\dfrac{1}{2}$.

故选：A

【点睛】

本题主要考查倍角公式及两角和与差的三角函数的逆用，还考查了运算求解的能力，属于中档题.

3、B

【解析】

由题意可得$f(x)$的周期为2，当$x\in[2,3]$时，$f(x)=-2x^2+12x-18$，令$g(x)=\log_a(x+1)$，则$f(x)$的图像和$g(x)$的图像至少有3个交点，画出图像，数形结合，根据$g(2)>f(2)$，求得a的取值范围.

【详解】

$f(x)$是定义域为R的偶函数，满足任意$x\in\mathbf{R}$，

$f(x+2)=f(x)-f(1)$，令$x=-1, f(1)=f(-1)-f(1)$，

又$f(-1)=f(1), \therefore f(1)=0, f(x+2)=f(x)$，

$\therefore f(x)$为周期为2的偶函数，

当$x\in[2,3]$时，$f(x)=-2x^2+12x-18=-2(x-3)^2$，

当 $x\in[0,1],x+2\in[2,3],f(x)=f(x+2)=-2(x-1)^2$，

当 $x\in[-1,0],-x\in[0,1],f(x)=f(-x)=-2(x+1)^2$，

作出 $f(x),g(x)$ 图像，如下图所示：

函数 $y=f(x)-\log_a(x+1)$ 至少有三个零点，

则 $f(x)$ 的图像和 $g(x)$ 的图像至少有 3 个交点，

$\because f(x)\le 0$，若 $a>1$，

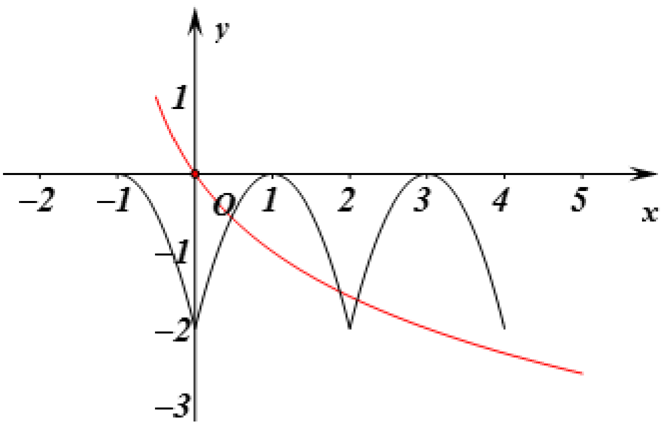
$f(x)$ 的图像和 $g(x)$ 的图像只有 **1** 个交点，不合题意，

所以 $0<a<1$，$f(x)$ 的图像和 $g(x)$ 的图像至少有 3 个交点，

则有 $g(2)>f(2)$，即 $\log_a(2+1)>f(2)=-2,\therefore \log_a 3>-2$，

$\therefore \dfrac{1}{a^2}>3,a^2<\dfrac{1}{3},\because 0<a<1,\therefore 0<a<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

故选:**B.**



【点睛】

本题考查函数周期性及其应用，解题过程中用到了数形结合方法，这也是高考常考的热点问题，属于中档题.

4、**B**

【解析】

根据极值点处的导数为零先求出 m 的值，然后再按照求函数在连续的闭区间上最值的求法计算即可.

【详解】

解：由已知得 $f'(x)=3x^2-2mx+2$，$\therefore f'(1)=3-2m+2=0$，$\therefore m=\dfrac{5}{2}$，经检验满足题意.

$\therefore f(x)=x^3-\dfrac{5}{2}x^2+2x$，$f'(x)=3x^2-5x+2$.

由 $f'(x)<0$ 得 $\frac{2}{3}<x<1$；由 $f'(x)>0$ 得 $x<\frac{2}{3}$ 或 $x>1$.

所以函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{2}{3}\right]$ 上递增，在 $\left[\frac{2}{3},1\right]$ 上递减，在 $[1,2]$ 上递增.

则 $f(x)_{极大值}=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{14}{27}$，$f(2)=2$，

由于 $f(2)>f(x)_{极大值}$，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值为 2.

故选：*B*.

【点睛】

本题考查了导数极值的性质以及利用导数求函数在连续的闭区间上的最值问题的基本思路，属于中档题.

5、C

【解析】

根据该厂每年产量未知可判断 A、B、D 选项的正误，根据每年口罩在该厂的产量中所占的比重最大可判断 C 选项的正误.综合可得出结论.

【详解】

由于该工厂 2017 年至 2019 年的产量未知，所以，从 2017 年至 2019 年棉签产量、抽纸产量以及口罩产量的变化无法比较，故 A、B、D 选项错误；

由堆积图可知，从 2017 年至 2019 年，该工厂生产的口罩占该工厂的总产量的比重是最大的，则三年累计下来产量最多的是口罩，C 选项正确.

故选：C.

【点睛】

本题考查堆积图的应用，考查数据处理能力，属于基础题.

6、B

【解析】

过点 *E* 作 $EH\perp CD$，垂足为 *H*，过 *H* 作 $HF\perp AB$，垂足为 *F*，连接 *EF*.因为 $CD//$ 平面 *ABE*，所以点 *C* 到平面 *ABE* 的距离等于点 *H* 到平面 *ABE* 的距离 h.设 $\angle CDE=\theta(0<\theta\leq\frac{\pi}{2})$，将 h 表示成关于 θ 的函数，再求函数的最值，即可得答案.

【详解】

过点 *E* 作 $EH\perp CD$，垂足为 *H*，过 *H* 作 $HF\perp AB$，垂足为 *F*，连接 *EF*.

因为平面 $ECD\perp$ 平面 *ABCD*，所以 $EH\perp$ 平面 *ABCD*，

所以$EH \perp HF$.

因为底面**ABCD**是边长为**1**的正方形，$HF//AD$，所以$HF=AD=1$.

因为$CD//$平面**ABE**，所以点**C**到平面**ABE**的距离等于点**H**到平面**ABE**的距离.

易证平面$EFH\perp$平面**ABE**，

所以点**H**到平面**ABE**的距离，即为**H**到**EF**的距离h.

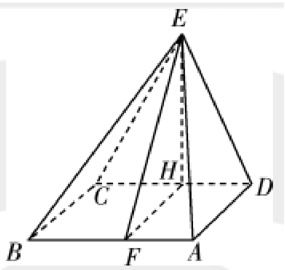
不妨设$\angle CDE=\theta(0<\theta\le\frac{\pi}{2})$，则$EH=\sin\theta$，$EF=\sqrt{1+\sin^2\theta}$.

因为$S_{\triangledown EHF}=\frac{1}{2}\cdot EF\cdot h=\frac{1}{2}\cdot EH\cdot FH$，所以$h\cdot\sqrt{1+\sin^2\theta}=\sin\theta$，

所以$h=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta}+1}}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$，当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，等号成立.

此时**EH**与**ED**重合，所以$EH=1$，$V_{E-ABCD}=\frac{1}{3}\times1^2\times1=\frac{1}{3}$.

故选：**B.**



【点睛】

本题考查空间中点到面的距离的最值，考查函数与方程思想、转化与化归思想，考查空间想象能力和运算求解能力，求解时注意辅助线及面面垂直的应用.

7、**D**

【解析】

设出A,B坐标，联立直线方程与抛物线方程，利用弦长公式求得$|AB|$，再由点到直线的距离公式求得P到AB的距离，得到ΔPAB的面积为S，作差后利用导数求最值.

【详解】

设$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，联立$\begin{cases}y=kx+1\\x^2=4y\end{cases}$，得$x^2-4kx-4=0$

则$x_1+x_2=4k$，$y_1+y_2=k\left(x_1+x_2\right)+2=4k^2+2$