6.3　平面向量基本定理及坐标表示

6.3.1　平面向量基本定理

自主预习·新知导学

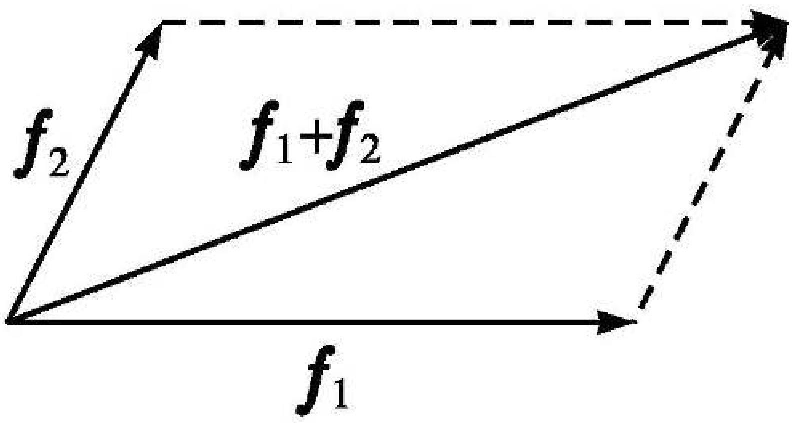
合作探究·释疑解惑

易　错　辨　析

自主预习·新知导学

平面向量基本定理

1.如图,在物理中,已知两个力可以求出它们的合力;反过来,一个力也可以分解为两个不同方向的力.那么对于平面内的任意向量a和两个非零向量e_1,e_2,能否将向量a按e_1,e_2的方向分解?如果能,分解方法唯一吗?



提示:当非零向量e_1,e_2共线时,向量a不一定能按e_1,e_2的方向分解,当非零向量e_1,e_2不共线时,任意向量a一定可以按e_1,e_2的方向分解,且分解方法是唯一的.

2.平面向量基本定理

<table>
<tr><td rowspan="2">a 定理</td><td>条件</td><td>$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$是同一平面内的两个________向量</td></tr>
<tr><td>结论</td><td>对于这一平面内的______向量 $\mathbf{a}$,__________一对实数 λ_1,λ_2,使______________</td></tr>
<tr><td>基底</td><td colspan="2">若 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$________,我们把$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$叫做表示这一平面内______向量的一个______</td></tr>
</table>

3.(1)已知向量e_1,e_2不共线,则下列各对向量可以作为平面内的一组基底的是(　　)

A.e_1-e_2与e_2-e_1

B.$2e_1-3e_2$ 与 $e_1-\frac{3}{2}e_2$

C.$-e_1-2e_2$与$2e_1+4e_2$

D.e_1-2e_2与$2e_1-e_2$

(2)下列说法正确的是(　　)

A.平面内的任一向量a,都可以用平面内的两个非零向量e_1,e_2线性表示

B.当a与两个不共线的非零向量e_1,e_2之一平行时,a不能用e_1,e_2线性表示

C.零向量可以作为基底中的向量

D.平面内的基底是不唯一的

解析:(1)根据基底的定义,只要两向量不共线便可作为基底,易知选D.

(2)根据平面向量基本定理可知,只要是不共线的两个向量就可以作为基底,因此基底是不唯一的.故选D.

答案:(1)D　(2)D

合作探究·释疑解惑

探究一

探究二

探究三

探究一　基底的概念

【例1】 (1)(多选题)设$\{e_1,e_2\}$是平面内所有向量的一个基底,则下列四组向量中,能作为基底的是(　　)

A.e_1+e_2和e_1-e_2　　B.$3e_1-4e_2$和$6e_1-8e_2$

C.e_1+2e_2和$2e_1+e_2$　D.e_1和e_1+e_2

(2)已知e_1与e_2不共线,$a=e_1+2e_2$,$b=\lambda e_1+e_2$,且$\{a,b\}$是一个基底,则实数λ的取值范围是____________.

解析:(1)B中,∵$6e_1-8e_2=2(3e_1-4e_2)$,

∴$(6e_1-8e_2)\parallel(3e_1-4e_2)$,

故$3e_1-4e_2$和$6e_1-8e_2$不能作为基底.

A,C,D中两向量均不共线,可以作为基底.

(2)考虑向量 a,b 共线,则有 $\lambda=\frac{1}{2}$,

故当 λ $\lambda\neq\frac{1}{2}$ 时,向量 a,b 不共线,可作为一个基底.

答案:(1)ACD　　(2)$\lambda\neq\frac{1}{2}$

反思感悟

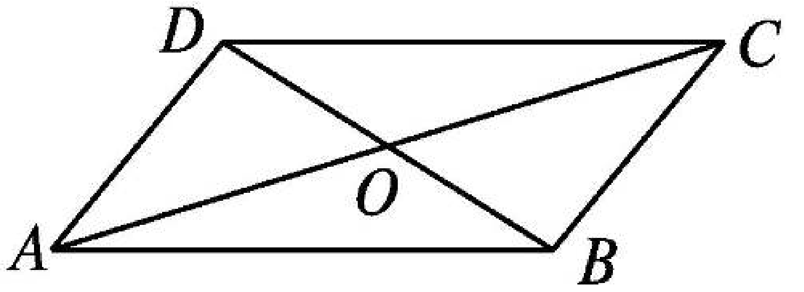
对基底的理解:

(1)两个向量能否作为一个基底,关键是看这两个向量是否共线.若共线,则不能作基底,反之,则可作基底.

(2)一个平面的基底一旦确定,平面上任意一个向量都可以由这个基底唯一线性表示出来.设向量**a**与**b**是平面内两个不共线的向量,若$x_1\mathbf{a}+y_1\mathbf{b}=x_2\mathbf{a}+y_2\mathbf{b}$,则 $\begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$

提醒:一个平面的基底不是唯一的;同一个向量用不同的基底表示,表达式不一样.

【变式训练1】 (1)(多选题)设O是▱$ABCD$的对角线交点,下列四组向量,可作为这个平行四边形所在平面的所有向量的基底的是(　　)



A.$\vec{AD}$与$\vec{AB}$　　B.$\vec{DA}$与$\vec{BC}$

C.$\vec{CA}$与$\vec{DC}$　　D.$\vec{OD}$与$\vec{OB}$

(2)已知{a,b}是一个基底,实数x,y满足$(3x-4y)$a+$(2x-3y)$b=6a+3b,则$x-y$的值为__________.

解析:(1)$\vec{AD}$与$\vec{AB}$不共线,故 A 项可作为平面向量的一个基底;

$\vec{DA} \parallel \vec{BC}$,故 B 项不可以作为基底;

$\vec{CA}$与$\vec{DC}$不共线,故 C 项可作为基底;

$\vec{OD}$与$\vec{OB}$共线,故 D 项不可以作为基底.

(2)因为{a,b}是一个基底,所以 a 与 b 不共线,

因为$(3x-4y)\mathbf{a}+(2x-3y)\mathbf{b}=6\mathbf{a}+3\mathbf{b}$,

所以 $\begin{cases}3x-4y=6,\\2x-3y=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=6,\\y=3,\end{cases}$

所以 $x-y=3$.

答案:(1)AC　(2)3