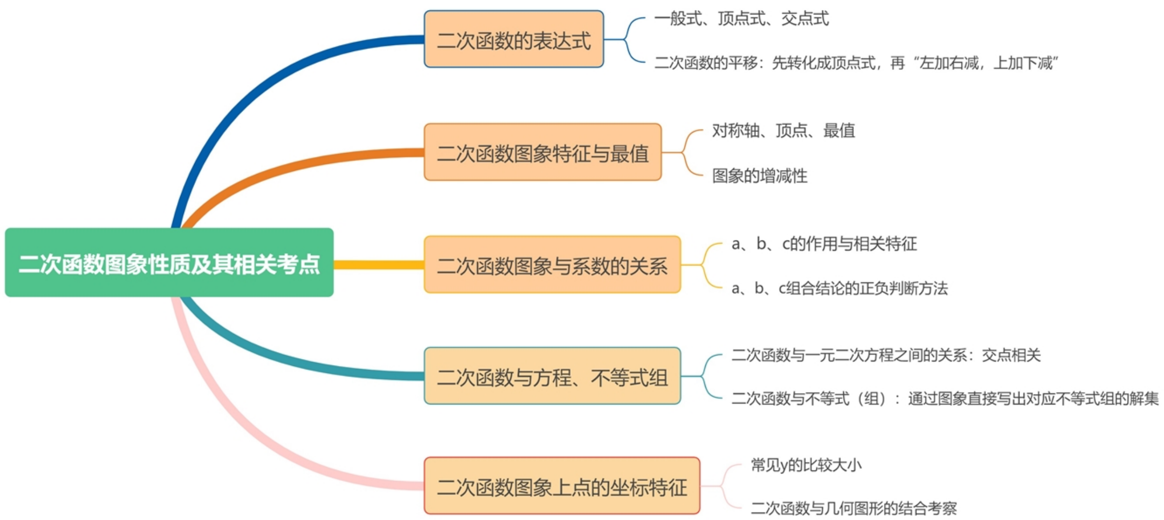
专题 12 二次函数

命题研究

二次函数是初中数学三大函数里面考点内容多，出现频率高，考查难度大的一个函数，一直深受中考各地区命题老师的青睐。此部分知识在考查形式上比较灵活多样，根据往年中考情况分析，选择、填空及解答题均有所考查，有单独知识的考查，也有跟其他知识结合着一起考查，单独考查难度一般不大，难度主要体现在综合知识的考查，特别是作为最后一道题的时候考查，往往除第一问较简单外，剩余的问答基本较难，故此在复习时必须特别熟练的掌握二次函数的图像与性质，同时强化数形结合思想，通过适当训练来提高相关题型的熟悉度，作为重难点去突破。

知识导图



重点考向

	考点	知识要求	考查角度
1	二次函数的意义和函数表达式	通过对实际问题情境的分析确定二次函数的表达式，并体会二次函数的意义	基本以选择题、填空题的形式考查二次函数的意义和函数解析式的求法

1.二次函数的概念：

一般地，如果 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，$a\neq0$），那么 y 叫做 x 的二次函数．

$y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，$a\neq0$）叫做二次函数的一般式．

2. 二次函数的解析式：

二次函数的解析式有三种形式：

（1）一般式：$y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，$a\neq 0$）

（2）顶点式：$y=a(x-h)^2+k$（a，h，k 是常数，$a\neq 0$）

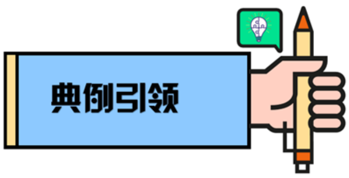
（3）两根式（交点式）：当抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有交点时，即对应二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根 x_1 和 x_2 存在时，根据二次三项式的分解因式 $ax^2+bx+c= a(x-x_1)(x-x_2)$，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 可转化为两根式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$．如果没有交点，则不能这样表示．

3.用待定系数法求二次函数的解析式：

（1）若已知抛物线上三点坐标，可设二次函数表达式为 $y=ax^2+bx+c$．

（2）若已知抛物线上顶点坐标或对称轴方程，则可设顶点式：$y=a(x-h)^2+k$，其中对称轴为 $x=h$，顶点坐标为$(h，k)$．

（3）若已知抛物线与 x 轴的交点坐标或交点的横坐标，则可采用两根式（交点式）：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$，其中与 x 轴的交点坐标为$(x_1，0)$，$(x_2，0)$．



1．下列 y 关于 x 的函数中，是二次函数的是（　　）

A．$y=5x^2$　　B．$y=2^2-2x$

C．$y=2x^2-3x^3+1$　　D．$y=\frac{1}{x^2}$

2．若函数 $y=(1+m)x^{m^2-2m-1}$是关于 x 的二次函数，则 m 的值是（　　）

A．2　　B．－1 或 3　　C．3　　D．$-1\pm\sqrt{2}$

3．用配方法将二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-2x-4$ 化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式为（　　）

A．$y=\frac{1}{2}(x-2)^2-4$　　B．$y=\frac{1}{2}(x-1)^2-3$

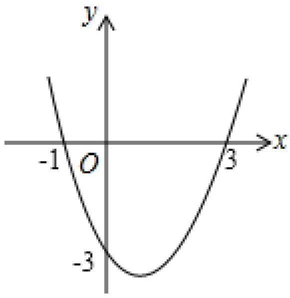
C．$y=\frac{1}{2}(x-2)^2-5$　　D．$y=\frac{1}{2}(x-2)^2-6$

4．抛物线的形状、开口方向与 $y=\frac{1}{2}x^2-4x+3$ 相同，顶点在$(-2，1)$，则关系式为（　　）

A．$y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$　　B．$y=\frac{1}{2}(x+2)^2-1$

C．$y=\frac{1}{2}(x+2)^2+1$　　D．$y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+1$

5．如图是一条抛物线的图象，则其解析式为（　　）



A．$y=x^2-2x+3$　　B．$y=x^2-2x-3$　　C．$y=x^2+2x+3$　　D．$y=x^2+2x-3$

6．顶点是（1，3），开口方向、大小与 $y=2x^2$ 完全相同的抛物线解析式为 ________．

7．已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）与 x 轴、y 轴分别相交于 A（－1，0）、B（3，0）、C（0，3）三点．则该抛物线的解析式是________．

8．已知抛物线经过点 A（－2，0），B（－1，0），C（0，2），求抛物线的解析式．

9．已知某二次函数的图象的顶点为（－2，2），且过点（－1，3）．

（1）求此二次函数的关系式．

（2）判断点 P（1，9）是否在这个二次函数的图象上，并说明理由．

跟踪训练

10．下列函数中是二次函数的是（　　）

A．$y=-2x$　　B．$y=-\frac{6}{x}$　　C．$y=1-3x^2$　　D．$y=x+3$

11．若函数 $y=(m^2+m)x^{m^2-2m-1}$ 是二次函数，那么 m 的值是（　　）

A．2　　B．－1 或 3　　C．3　　D．$-1\pm\sqrt{2}$

12．用配方法将二次函数 $y=x^2-4x-6$ 化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式为（　　）

A．$y=(x-2)^2-2$　　　　B．$y=(x-2)^2-10$

C．$y=(x+2)^2-2$　　　　D．$y=(x+2)^2-10$

13．已知二次函数的图象经过（－1，0），（2，0），（0，2）三点，则该函数解析式为（　　）

A．$y=-x^2-x+2$　　B．$y=x^2+x-2$　　C．$y=x^2+3x+2$　　D．$y=-x^2+x+2$

14．用配方法把二次函数 $y=x^2-6x+3$ 化成顶点式为 ______．

15．若二次函数 $y=ax^2$ 的图象经过点（－1，2），则二次函数 $y=ax^2$ 的解析式是______．

16．已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 A（－1，0），B（2，－3），求该抛物线的解析式．

17．已知抛物线的顶点坐标为 M（2，－5），与 y 轴交于点 A（0，3）．

（1）求抛物线的解析式；

（2）当 $0\leqslant x\leqslant 5$ 时，求 y 的取值范围．

重点考向

	考点	知识要求	考查角度
2	二次函数的图象和性质	①会用描点法画出二次函数的图象，能从图象上认识二次函数的性质； ②会根据公式确定图象的顶点、开口方向和对称轴； ③会利用二次函数图象求一元二次方程的近似解	选择题、填空题的形式考查二次函数图象的顶点、对称轴、最值、抛物线的平移、二次函数与方程的关系等基础知识，以解答题、探究题的形式考查二次函数综合能力。

1.二次函数的图象：

二次函数的图象是一条关于 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 对称的曲线，这条曲线叫抛物线.

（1）二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图象是抛物线，抛物线的对称轴是直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$，顶点是（$-\dfrac{b}{2a}$，$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$）. 当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上，函数有最小值；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，函数有最大值.

（2）抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 与 $y=ax^2$ 形状相同，位置不同，把抛物线 $y=ax^2$ 向上（下）向左（右）平移，可以得到抛物线 $y=a(x-h)^2+k$.

2.二次函数图象的画法：

五点法：

（1）先根据函数解析式，求出顶点坐标，在平面直角坐标系中描出顶点 M，并用虚线画出对称轴；

（2）求抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与坐标轴的交点：

当抛物线与 x 轴有两个交点时，描出这两个交点 A，B 及抛物线与 y 轴的交点 C，再找到点 C 的对称 D.将这五个点按从左到右的顺序连接起来，并向上或向下延伸，就得到二次函数的图象.

3.二次函数的性质：

二次函数 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，$a\neq0$）中，a、b、c 的含义：

a 表示开口方向：$a>0$ 时，抛物线开口向上， $a<0$ 时，抛物线开口向下；

b 与对称轴有关：对称轴为 $x=-\dfrac{b}{2a}$；

c 表示抛物线与 y 轴的交点坐标：（0，c）.

4.二次函数的最值：

（1）如果自变量的取值范围是全体实数，那么函数在顶点处取得最大值（或最小值），即当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$y_{最值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

（2）如果自变量的取值范围是 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$，那么，首先要看 $-\dfrac{b}{2a}$ 是否在自变量取值范围 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 内，若在此范围内，则当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$y_{最值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；若不在此范围内，则需要考虑函数在 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 范围内的增减性，如果在此范围内，y 随 x 的增大而增大，则当 $x=x_2$ 时，$y_{最大}=ax_2^2+bx_2+c$，当 $x=x_1$ 时，$y_{最小}=ax_1^2+bx_1+c$ ；如果在此范围内，y 随 x 的增大而减小，则当 $x=x_1$ 时，$y_{最大}=ax_1^2+bx_1+c$ ，当 $x=x_2$ 时，$y_{最小}=ax_2^2+bx_2+c$.

5.二次函数与一元二次方程的关系：

一元二次方程的解是其对应的二次函数的图象与 x 轴的交点坐标．

因此一元二次方程中的 $\Delta=b^2-4ac$，在二次函数中表示图象与 x 轴是否有交点．

当 $\Delta>0$ 时，图象与 x 轴有两个交点；当 $\Delta=0$ 时，图象与 x 轴有一个交点；当 $\Delta<0$ 时，图象与 x 轴没有交点．

①如果抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与 x 轴有两个交点，则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根；

②如果抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与 x 轴只有一个交点，则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个 相等 的实数根；

③如果抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与 x 轴没有交点，则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有 实数根．

抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点个数	判别式 b^2-4ac 的符号	方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根个数
2 个	$b^2-4ac>0$	两个不相等的实数根
1 个	$b^2-4ac=0$	两个 相等 的实数根
没有	$b^2-4ac<0$	没有 实数根

6.二次函数与不等式的关系:

（1）$ax^2+bx+c>0$ 的解集：函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象位于 x 轴上方对应的点的横坐标的取值范围；

（2）$ax^2+bx+c<0$ 的解集：函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象位于 x 轴下方对应的点的横坐标的取值范围．

7.图象的平移

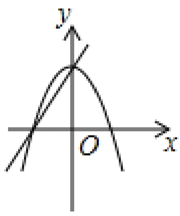
左加右减，上加下减

典例引领

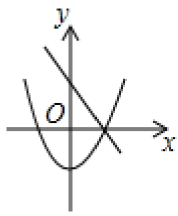
1．抛物线 $y=-(3-x)^2+5$ 的顶点坐标是（　　）

A．（3，－5）　　B．（－3，5）　　C．（3，5）　　D．（－3，－5）

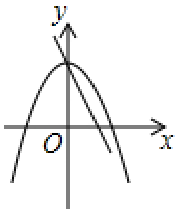
2．在同一平面直角坐标系中，一次函数 $y=ax-b$ 和二次函数 $y=-ax^2-b$ 的大致图象是（　　）



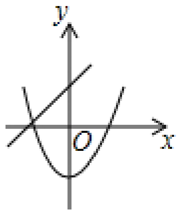
A．



B．



C.



D.

3．已知二次函数 $y=-x^2+2x-3$，点 A（x_1，y_1）、B（x_2，y_2）在该函数图像上，若 $x_1+x_2>2$，$x_1>x_2$，则 y_1 与 y_2 的大小关系是（　　）

A．$y_1<y_2$　　B．$y_1>y_2$　　C．$y_1=y_2$　　D．无法判断

4．若函数 $y=(a-3)x^2-x+1$（a 为常数）的图象与 x 轴有且只有一个交点，那么 a 满足（　　）

A．$a=\frac{13}{4}$且 $a\neq3$　　B．$a=\frac{13}{4}$

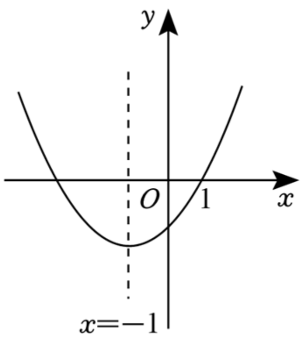
C．$a=3$　　D．$a=\frac{13}{4}$或 $a=3$

5．已知二次函数 $y=mx^2-2mx+2$（$m\neq0$）在 $-2\leqslant x<2$ 时有最小值 -2，则 $m=$（　　）

A．-4 或 $-\frac{1}{2}$　　B．4 或 $-\frac{1}{2}$　　C．-4 或$\frac{1}{2}$　　D．4 或$\frac{1}{2}$

6．二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，以下结论正确的个数为（　　）

①$abc<0$；②$c+2a<0$；③$9a-3b+c=0$；④$am^2-a+bm+b>0$（m 为任意实数）



A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

7．已知一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根是 -1 和 2，则抛物线 $y=bx^2-ax+c$ 的对称轴为 _______.

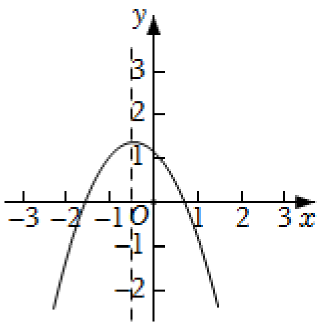
8．二次函数 $y=x^2$ 的图象先向左平移 2 个单位．再向下平移 5 个单位后的解析式为 _______.

9．二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象如图所示，比较下列各式与 0 的大小．

①abc_______0；

②b^2-4ac_______0；

③$(a+c)^2-b^2$_______0.



10．在同一平面直角坐标系中画出二次函数 $y=\frac{1}{3}x^2+1$ 与二次函数 $y=-\frac{1}{3}x^2-1$ 的图形．

（1）从抛物线的开口方向、形状、对称轴、顶点等方面说出两个函数图象的相同点与不同点；

（2）说出两个函数图象的性质的相同点与不同点．

11．已知二次函数 $y=2x^2-bx+c$ 的图象经过 A（1，n），B（3，n）．

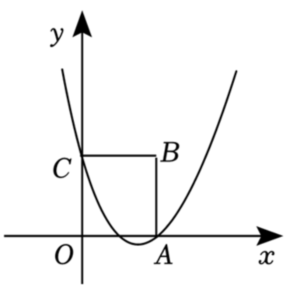
（1）用含 n 的代数式表示 c．

（2）若二次函数 $y=2x^2-bx+c$ 的最小值为$\frac{c^2}{81}$，求 n 的值．

12．如图，在平面直角坐标系中，边长为 2 的正方形 $OABC$，点 A 在 x 轴的正半轴上，点 C 在 y 轴的正半轴上，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 A 与点 C．

（1）求这个二次函数的表达式，并求出抛物线的对称轴．

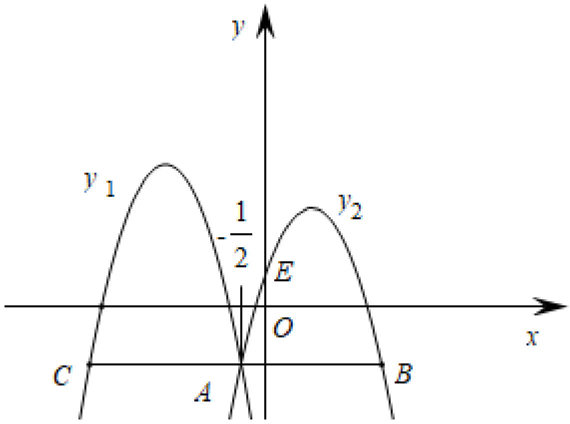
（2）现将抛物线向左平移 m（$m>0$）个单位，向上平移 n（$n>0$）个单位，若平移后的抛物线恰好经过点 B 与点 C，求 m，n 的值．



13．已知抛物线 $y_1=-x^2-6x+c$．

（1）若抛物线 y_1 过点（-2，18），求抛物线 y_1 的表达式及对称轴；

（2）如图，若抛物线 y_1 过点 A，点 A 的横坐标为 $-\dfrac{1}{2}$，平移抛物线 y_1，使平移后的抛物线 y_2 仍过点 A，过点 A 作 CB∥x 轴，分别交两条抛物线于 C，B 两点，且 $CB=8$，点 M（-5，m）在抛物线 y_1 上，点 N（3，n）在抛物线 y_2 上，试判定 m 与 n 的大小关系，并说明理由．



跟踪训练

14．对于二次函数 $y=2(x-2)^2+1$，下列说法中正确的是（　　）

A．图象的开口向下

B．函数的最小值为 1

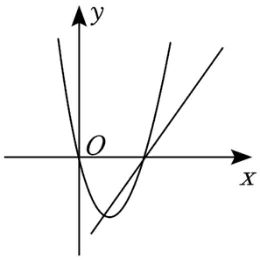
C．图象的对称轴为直线 $x=-2$

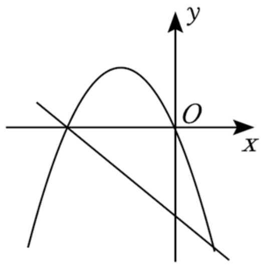
D．图象的顶点坐标是（1，2）

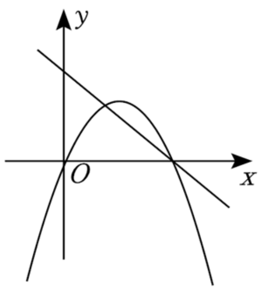
15．二次函数 $y=-2x^2-8x+m$ 的图象与 x 轴只有一个交点，则 m 的值是（　　）

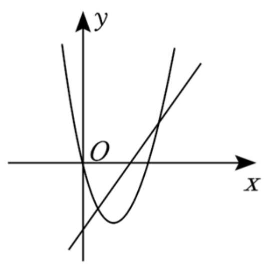
A．8　　B．16　　C．-8　　D．-16

16．在同一平面直角坐标系中，函数 $y=ax^2+bx$ 与 $y=ax+b$ 的图象不可能是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

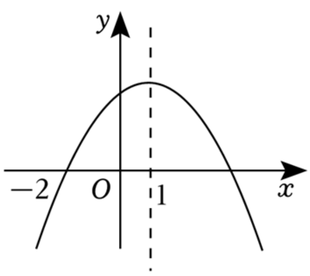
17．已知二次函数 $y=ax^2+bx+3$ 经过点（2，3），且函数最大值为 4，则 a 的值为（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．-1　　C．-2　　D．$-\frac{1}{3}$

18．二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象如图，图象过点（-2，0），对称轴为直线 $x=1$，下列结论：

①$abc<0$；②$2a-b=0$；③$b^2-4ac>0$；④$9a+c>3b$，

其中正确的结论序号为（　　）



A．①②③　　B．①③　　C．①③④　　D．②③

19．将抛物线 $y=10(x+1)^2-3$ 向右平移 5 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度，平移后抛物线的解析式是 _______．

20．已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数）中，$4a-b=0$，$a-b+c>0$，抛物线与 x 轴的两交点之间的距离小于 2，且经过点（0，3）．下列四个结论：

①对称轴为直线 $x=-2$；

②若点（$m-2$，y_1）和（$n-2$，y_2）在抛物线上，且 $m>n$，则 $y_1>y_2$；

③一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根在 -2 和 -3 之间；

④$0<a<1$；

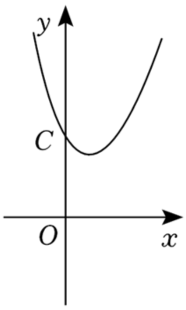
其中结论正确结论是 _______（填写序号）．

21．如图，已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）图象的顶点坐标为（1，2），且交 y 轴于点 C（0，3）．

（1）求该二次函数的表达式．

（2）求该二次函数图象关于 y 轴对称的二次函数图象的解析式．

（3）点 P 为二次函数图象上一动点，若点 P 纵坐标与点 C 纵坐标之差的绝对值小于或等于 1，请根据图象直接写出点 P 横坐标 x 的取值范围．



22．抛物线 C_1：$y=x^2-2ax+a$ 的顶点 A 在某一条抛物线 C_2 上，将抛物线 C_1 向右平移 b（$b>0$）个单位后，所得抛物线顶点 B 仍在抛物线 C_2 上．

（1）求点 A 的坐标（用含 a 的代数式表示）；

（2）求 a 与 b 的关系式；

（3）抛物线 C_2 的顶点为 F，其对称轴与 x 轴的交点为 D，点 E 是抛物线 C_2 上不同于顶点的任意一点，直线 ED 交抛物线 C_2 于另一点 M，直线 EF 交直线 l：$y=\frac{1}{2}$于点 N，求证：直线 MN 与 x 轴互相垂直．

重点考向

	考点	知识要求	考查角度
3	二次函数的应用问题	能用二次函数知识解决某些实际问题	多以选择题、填空题、解答题的形式考查二次函数在实际生活中的应用

1.二次函数的应用问题求解思路：

建立<u>二次函数</u>模型→求出二次函数<u>**解析式**</u>→结合函数解析式、函数性质做出解答.

2.列二次函数解应用题

列二次函数解应用题与列整式方程解应用题的思路和方法是一致的，不同的是，学习了二次函数后，表示量与量的关系的代数式是含有两个变量的等式．对于应用题要注意以下步骤：

(1)审清题意，弄清题中涉及哪些量，已知量有几个，已知量与变量之间的基本关系是什么，找出等量关系(即函数关系).

(2)设出两个变量，注意分清自变量和因变量，同时还要注意所设变量的单位要准确.

(3)列函数表达式，抓住题中含有等量关系的语句，将此语句抽象为含变量的等式，这就是二次函数.

(4)按题目要求，结合二次函数的性质解答相应的问题。

(5)检验所得解是否符合实际：即是否为所提问题的答案.

(6)写出答案.

要点：

常见的问题：求最大(小)值(如求最大利润、最大面积、最小周长等)、涵洞、桥梁、抛物体、抛物线的模型问题等.解决这些实际问题关键是找等量关系，把实际问题转化为函数问题，列出相关的函数关系式.

3.建立二次函数模型求解实际问题

一般步骤：(1)恰当地建立直角坐标系；(2)将已知条件转化为点的坐标；(3)合理地设出所求函数关系式；(4)代入已知条件或点的坐标，求出关系式；(5)利用关系式求解问题.

要点：

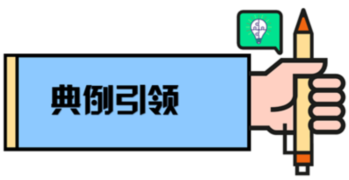
(1)利用二次函数解决实际问题，要建立数学模型，即把实际问题转化为二次函数问题，利用题中存在的公式、内含的规律等相等关系，建立函数关系式，再利用函数的图象及性质去研究问题.在研究实际问题时要注意自变量的取值范围应具有实际意义.

(2)对于本节的学习，应由低到高处理好如下三个方面的问题：

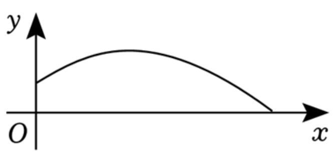
①首先必须了解二次函数的基本性质；

②学会从实际问题中建立二次函数的模型；

③借助二次函数的性质来解决实际问题.



1．如图，一位运动员推铅球，铅球运行高度 y（m）与水平距离 x（m）之间的函数关系式是 $y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$. 问：此运动员能把铅球推出多远？（　　）



A．12m　　B．10m　　C．3m　　D．4m

2．向上发射一枚炮弹，经 x 秒后的高度为 y 米，且时间与高度关系为 $y=ax^2+bx$．若此炮弹在第 5 秒与第

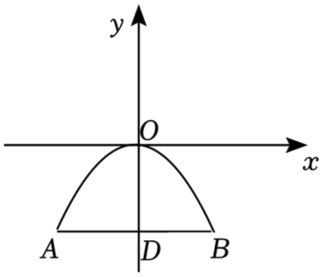
10 秒时的高度相等，则高度达到最高时为（　　）

A．第 6 秒　　B．第 7 秒　　C．第 7.5 秒　　D．第 8.5 秒

3．某种商品每天的销售利润 y 元与单价 x 元（$x \geqslant 2$）之间的函数关系式为 $y=-0.1(x-3)^2+50$．则这种商品每天的最大利润为（　　）

A．0.1 元　　B．3 元　　C．50 元　　D．75 元

4．一座石拱桥的桥拱是近似的抛物线形．建立如图所示的坐标系，其函数关系式为 $y=-\frac{1}{25}x^2$，当水面离桥拱顶的高度 OD 是 $4m$ 时，水面的宽度 AB 为 ______m．



5．用总长为 a 米的铝合金材料做成如图 1 所示的“日”字形窗框（材料厚度忽略不计），窗户的透光面积 y（米 ^{2}）与窗框的宽 x（米）之间的函数图象如图 2 所示，则 a 的值是 ______．

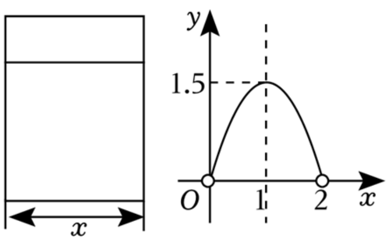


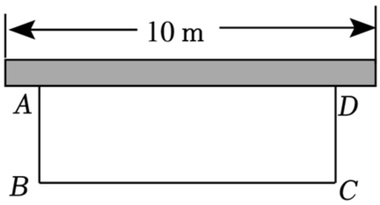
图1　　图2

6．如图，有长为 $24m$ 的篱笆，现一面利用墙（墙的最大可用长度为 $10m$），设矩形花圃的宽 AB 为 xm，面积为 Sm^2．

（1）求 S 与 x 的函数关系式及 x 的取值范围；

（2）当花圃的面积为 $54m^2$ 时，求 AB 的长；

（3）当 AB 的长是多少米时，围成的花圃的面积最大？



7．某超市经销一种商品，每千克的成本为 10 元，经试销发现，该种商品每天的销售量 y（千克）与销售单价 x（元/千克）满足一次函数关系，其每天销售单价、销售量的两组对应值如表所示：

销售单价 x（元/千克）	12	14
销售量 y（千克）	80	60

（1）请直接写出 y（千克）与 x（元/千克）之间的函数表达式 ________；

（2）为保证某天获得 240 元的销售利润，则该天的销售单价应定为多少？

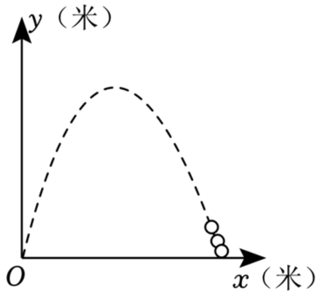
（3）当销售单价定为多少时，才能使当天的销售利润最大？最大利润是多少？

跟踪训练

8．用三根同样长的铁丝围成长方形，正方形，圆，（　　）面积最大．

A．长方形　　B．正方形　　C．圆　　D．三角形

9．我校办公楼前的花园是一道美丽的风景，现计划在花园里再加上一喷水装置，水从地面喷出，如图，以水平地面为 x 轴，出水点为原点建立平面直角坐标系，水在空中划出的曲线是抛物线 $y=-x^2+5x$（单位：米）的一部分，则水喷出的最大高度是（　　）



A．4.5 米　　B．5 米　　C．6.25 米　　D．7 米

10．便民商店经营一种商品，在销售过程中，发现一周利润 y（元）与每件销售价 x（元）之间的关系满足 $y=-2x^2+80x+758$，由于某种原因，价格需满足 $15\leqslant x\leqslant 19$，那么一周可获得最大利润是（　　）

A．1554 元　　B．1556 元　　C．1558 元　　D．1560 元

11．如图，一抛物线形拱桥，当拱顶到水面的距离为 2 米时，水面宽度为 4 米；那么当水位上升 0.5 米后，水面的宽度为 ________米．（结果可带根号）