一次函数知识点总结和常见题型

基本概念

1、变量：在一个变化过程中可以取不同数值的量。 常量：在一个变化过程中只能取同一数值的量。

例题：在匀速运动公式$s=vt$中，v表示速度，t表示时间，s表示在时间t内所走的路程，则变量是，常量是。在圆的周长公式 2πr 中，变量是，常量是.

2、函数：一般的，在一个变化过程中，如果有两个变量 x 和 y，并且对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值和其对应，那么我们就把 x 称为自变量，把 y 称为因变量，y 是 x 的函数。

*判断 Y 是否为 X 的函数，只要看 X 取值确定的时候，Y 是否有唯一确定的值和之对应

例题：下列函数（1）πx (2)2x－1 (3) (4)$\frac{1}{2}$－3x (5)^2－1 中，是一次函数的有（ ）

（A）4 个 （B）3 个 （C）2 个 （D）1 个

3、定义域：一般的，一个函数的自变量允许取值的范围，叫做这个函数的定义域。

4、确定函数定义域的方法：

（1）关系式为整式时，函数定义域为全体实数；（2）关系式含有分式时，分式的分母不等于零；

（3）关系式含有二次根式时，被开放方数大于等于零；（4）关系式中含有指数为零的式子时，底数不等于零；

（5）实际问题中，函数定义域还要和实际情况相符合，使之有意义。

例题：下列函数中，自变量 x 的取值范围是 x≥2 的是（ ）

A. $\sqrt{2-x}$ B. C. $\sqrt{4-x^2}$ D. $\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x-2}$

函数$y=\sqrt{x-5}$中自变量 x 的取值范围是.

已知函数，当$-1<x\leq 1$时，y 的取值范围是 （ ）

A. B. C. D.

5、函数的图像

一般来说，对于一个函数，如果把自变量和函数的每对对应值分别作为点的横、纵坐标，那么坐标平面内由这些点组成的图形，就是这个函数的图象.

6、函数解析式：用含有表示自变量的字母的代数式表示因变量的式子叫做解析式。

7、描点法画函数图形的一般步骤

第一步：列表（表中给出一些自变量的值及其对应的函数值）；

第二步：描点（在直角坐标系中，以自变量的值为横坐标，相应的函数值为纵坐标，描出表格中数值对应的各点）；第三步：连线（按照横坐标由小到大的顺序把所描出的各点用平滑曲线连接起来）。

8、函数的表示方法

列表法：一目了然，使用起来方便，但列出的对应值是有限的，不易看出自变量和函数之间的对应规律。

解析式法：简单明了，能够准确地反映整个变化过程中自变量和函数之间的相依

关系，但有些实际问题中的函数关系，不能用解析式表示。

图象法：形象直观，但只能近似地表达两个变量之间的函数关系。

9、正比例函数及性质

一般地，形如(k是常数，k≠0)的函数叫做正比例函数，其中k叫做比例系数.

注：正比例函数一般形式 (k不为零) ①k不为零 ②x指数为1 ③b取零

当k>0时，直线经过三、一象限，从左向右上升，即随x的增大y也增大；当k<0时，•直线经过二、四象限，从左向右下降，即随x增大y反而减小.

(1) 解析式：（k是常数，k≠0）

(2) 必过点：（0，0）、（1，k）

(3) 走向：k>0时，图像经过一、三象限；k<0时，•图像经过二、四象限

(4) 增减性：k>0，y随x的增大而增大；k<0，y随x增大而减小

(5) 倾斜度：越大，越接近y轴；越小，越接近x轴

例题：(1).正比例函数$y=(3m+5)x$，当m时，y随x的增大而增大.

(2)若$y=x+2-3b$是正比例函数，则b的值是 （ ）

A.0 B.$\frac{2}{3}$C.$-\frac{2}{3}$D.$-\frac{3}{2}$

.(3)函数(k－1)x，y随x增大而减小，则k的范围是 （ ）

A.$k<0$B.$k>1$C.$k\le 1$D.$k<1$

(4)东方超市鲜鸡蛋每个0.4元，那么所付款y元和买鲜鸡蛋个数x（个）之间的函数关系式是.

(5)平行四边形相邻的两边长为x、y，周长是30，则y和x的函数关系式是.

10、一次函数及性质

一般地，形如＋b(是常数，k≠0)，那么y叫做x的一次函数.当0时，＋b即，所以说正比例函数是一种特殊的一次函数.

注：一次函数一般形式 (k不为零) ①k不为零 ②x指数为1 ③b取任意实数

一次函数的图象是经过（0，b）和（$-\frac{b}{k}$，0）两点的一条直线，我们称它为直线,它可以看作由直线平移个单位长度得到.（当b>0时，向上平移；当b<0时，向下平移）

（1）解析式：(k、b是常数，k$\neq$0（2）必过点：（0，b）和（$-\frac{b}{k}$，0）

（3）走向：k>0，图象经过第一、三象限；k<0，图象经过第二、四象限

b>0，图象经过第一、二象限；b<0，图象经过第三、四象限

直线经过第一、二、三象限 直线经过第一、三、四象限

直线经过第一、二、四象限 直线经过第二、三、四象限

（4）增减性：k>0，y随x的增大而增大；k<0，y随x增大而减小.

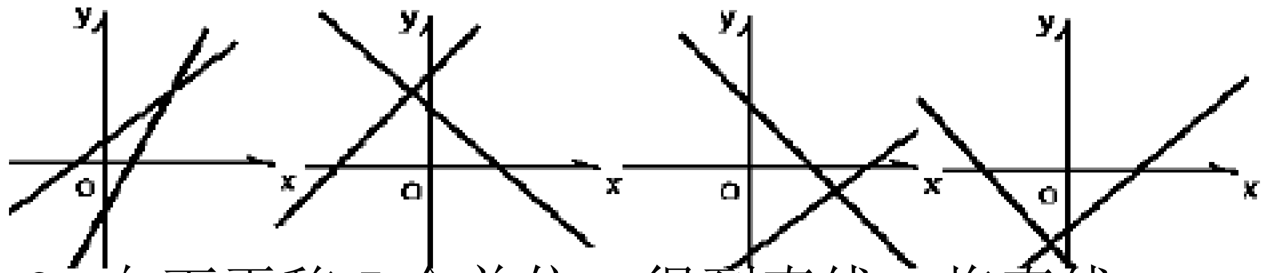
（5）倾斜度： 越大，图象越接近于y轴； 越小，图象越接近于x轴.

（6）图像的平移： 当b>0时，将直线的图象向上平移b个单位；

（上加下减，左加右减） 当b<0时，将直线的图象向下平移b个单位.

例题：若关于x的函数$y=(n+1)x^{m-1}$是一次函数，则， n.

.函数和的图象在同一坐标系内的大致位置正确的是（ ）



将直线 y＝3x 向下平移 5 个单位，得到直线；将直线 y＝－x－5 向上平移 5 个单位，得到直线.

若直线 $y=-x+a$ 和直线 $y=x+b$ 的交点坐标为 $(m,8)$，则 $a+b=$.

已知函数 y＝31，当自变量增加 m 时，相应的函数值增加（　　）

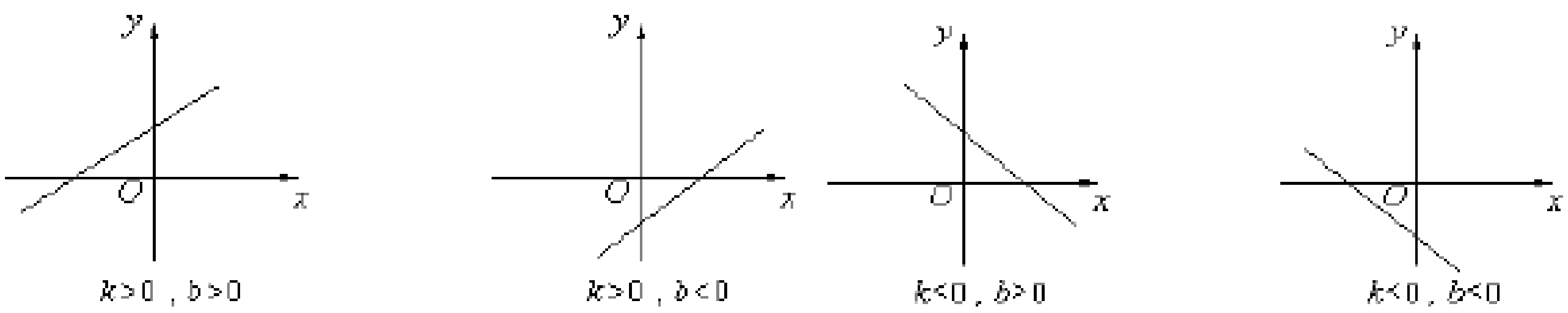
A．31　　B．3mC．m D．3m－1

11、一次函数＋b 的图象的画法.

根据几何知识：经过两点能画出一条直线，并且只能画出一条直线，即两点确定一条直线，所以画一次函数的图象时，只要先描出两点，再连成直线即可.一般情况下：是先选取它和两坐标轴的交点：和 y 轴的交点（0，b），和 x 轴的交点（$-\frac{b}{k}$，0）.即横坐标或纵坐标为 0 的点.

	b>0	b<0	0
k>0	经过第一、二、三象限	经过第一、三、四象限	经过第一、三象限
	图象从左到右上升，y 随 x 的增大而增大		
k<0	经过第一、二、四象限	经过第二、三、四象限	经过第二、四象限
	图象从左到右下降，y 随 x 的增大而减小		

☆k、b 的符号对直线位置的影响☆



图像过一、二、三象限　　图像过一、三、四象限　　图像过一、二、四象限　图像过二、三、四象限

（大大不过四）　　（大小不过二）　　（小大不过三）　　（小小不过一）

思考：若 m<0, n>0, 则一次函数的图象不经过　　　（　　）

A.第一象限　　B. 第二象限　　C.第三象限　　D.第四象限

12、正比例函数和一次函数图象之间的关系

一次函数＋b 的图象是一条直线，它可以看作是由直线平移个单位长度而得到（当 b>0 时，向上平移；当 b<0 时，向下平移）.

13、直线 和 的位置关系

（1）两直线平行：k_{12} 且 $b_1 \neq b_2$　　（2）两直线相交：$k_1 \neq k_2$

（3）两直线重合：k_{12} 且 b_{12}　　（4）两直线垂直：$k_1 \cdot k_2 = -1$

14、用待定系数法确定函数解析式的一般步骤：

（1）根据已知条件写出含有待定系数的函数关系式；

（2）将 x、y 的几对值或图象上的几个点的坐标代入上述函数关系式中得到以待定系数为未知数的方程；

（3）解方程得出未知系数的值；

（4）将求出的待定系数代回所求的函数关系式中得出所求函数的解析式.

15、一元一次方程和一次函数的关系

任何一元一次方程到可以转化为 0（a，b 为常数，a≠0）的形式，所以解一元一次方程可以转化为：当某个一次函数的值为 0 时，求相应的自变量的值. 从图象上看，相当于已知直线确定它和 x 轴的交点的横坐标的值.

16、一次函数和一元一次不等式的关系

任何一个一元一次不等式都可以转化为>0 或<0（a，b 为常数，a≠0）的形式，所以解一元一次不等式可以看作：当一次函数值大（小）于 0 时，求自变量的取值范围.

17、一次函数和二元一次方程组

（1）以二元一次方程的解为坐标的点组成的图象和一次函数的图象相同.

（2）二元一次方程组的解可以看作是两个一次函数和的图象交点.

18、一次函数的图像和两坐标轴所围成三角形的面积

一次函数＋b 的图象和两条坐标轴的交点：和 y 轴的交点（0，b），和 x 轴的交点（$-\frac{b}{k}$，0）.

直线 $y = kx + b$（b≠0）和两坐标轴围成的三角形面积为

常见题型

一、考察一次函数定义

1、若函数 $y = (m-1)x^{m^2} + 3$ 是 y 关于 x 的一次函数，则 m 的值为；解析式为________________.

2、要使(m－2) $^{-1}$ 是关于 x 的一次函数应满足，.

二、考查图像性质

1、已知一次函数（m－2）－3 的图像经过第一，第三，第四象限，则 m 的取值范围是.

2、若一次函数（2－m）的图像经过第一、•二、•四象限，•则 m•的取值范围是

3、已知 m 是整数，且一次函数 $y = (m+4)x + m + 2$ 的图象不过第二象限，则 m 为.

4、直线 $y = kx + b$ 经过一、二、四象限，则直线 $y = bx - k$ 的图象只能是图 4 中的（　　）

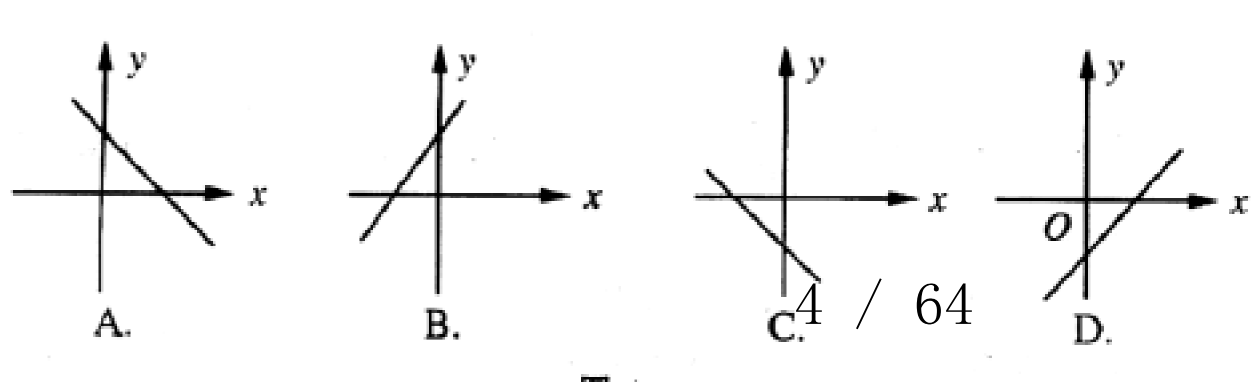


图 4

5、直线 $px+qy+r=0\ (pq\neq 0)$ 如图 5，则下列条件正确的是（　　）

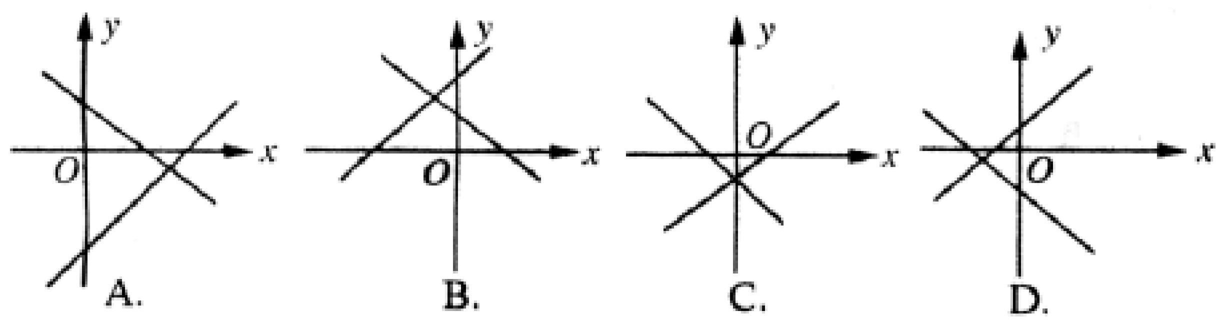
$A.p=q,r=1$ $B.p=q,r=0$

$C.p=-q,r=1$ $D.p=-q,r=0$

6、如果 $ab>0$，，则直线不通过（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

7、如图 6，两直线 $y_1=kx+b$ 和 $y_2=bx+k$ 在同一坐标系内图象的位置可能是（　　）



8、如果 $ab>0$，，则直线不通过（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

9、b 为 时，直线 $y=2x+b$ 和直线 $y=3x-4$ 的交点在 x 轴上.

10、要得到－$\frac{3}{2}$x－4 的图像，可把直线－$\frac{3}{2}$x（　）.

（A）向左平移 4 个单位（B）向右平移 4 个单位　（C）向上平移 4 个单位　（D）向下平移 4 个单位

11、已知一次函数－5，如果点 P_1（x_1，y_1），P_2（x_2，y_2）都在函数的图像上，且当 $x_1<x_2$ 时，有 $y_1<y_2$ 成立，那么系数 k 的取值范围是.

12、已知点（－4，y_1），（2，y_2）都在直线－ 2 上，则 y_1 、y_2 大小关系是(　　)

（A）$y_1>y_2$　　（B）y_{12}　　（C）$y_1<y_2$　　（D）不能比较

三、交点问题

1、若直线 3x－1 和－k 的交点在第四象限，则 k 的取值范围是（　）.

（A）k<$\frac{1}{3}$　　（B）$\frac{1}{3}$<k<1　　（C）k>1　　（D）k>1 或 k<$\frac{1}{3}$

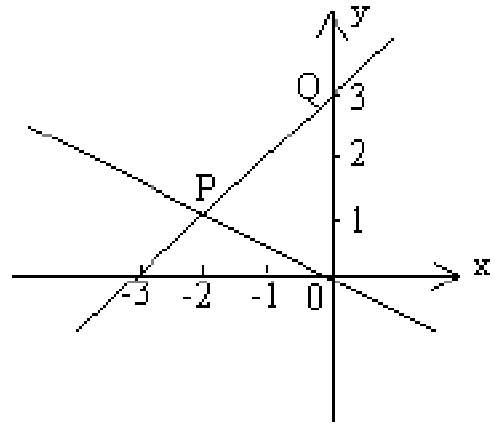
2、若直线 $y=-x+a$ 和直线 $y=x+b$ 的交点坐标为 $(m,8)$，则 $a+b=$.

3、一次函数 $y=kx+b$ 的图象过点 $(m,1)$ 和 $(1,m)$ 两点，且 $m>1$，则 $k=$，b 的取值范围是 .

4、直线 $y=kx+b$ 经过点 $A(-1,m)$，$B(m,1)\ (m>1)$，则必有（　　）

A. $k>0,b>0$ $B.k>0,b<0$ $C.k<0,b>0$ $D.k<0,b<0$

5、如图所示，已知正比例函数和一次函数$y=x+b$，它们的图像都经过点P（a，1），且一次函数图像和 y 轴交于 Q 点。（1）求 a、b 的值；（2）
求△的面积。



四、面积问题

1、若直线 36 和坐标轴围成的三角形的面积为 S，则 S 等于（　　）.
A. 6　　B. 12　　C. 3　　D. 24

2、若一次函数 2 的图像和坐标轴围成的三角形的面积是 9，则.

3、已知一次函数$y=2x+a$和$y=-x+b$的图像都经过$A(-2,0)$，且和y轴分别交于点 B，c，则ΔABC的面积为（　　）
A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

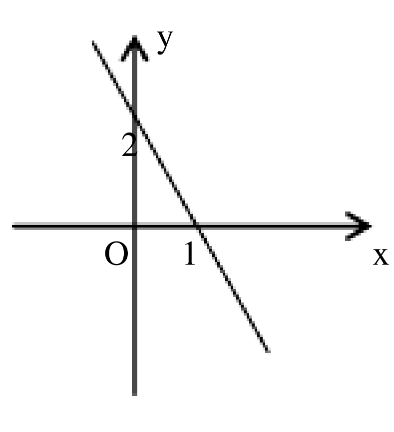
4、已知一次函数 y＝＋b 的图像经过点（－1，－5），且和正比例函数的图像相交于点（2，a），
求（1）a 的值；（2）k、b 的值；（3）这两个函数图像和 x 轴所围成的三角形面积。

五、一次函数解析式的求法

（1） 定义型　例 1. 已知函数$y=(m-3)x^{m^2-8}+3$是一次函数，求其解析式。

（2）点斜型　　例 2. 已知一次函数$y=kx-3$的图像过点（2，－1），求这个函数的解析式。

（3）两点型　　例 3.已知某个一次函数的图像和 x 轴、y 轴的交点坐标分别是（－2，0）、（0，4），则这个函数的解析式为。



（4）图像型　例 4. 已知某个一次函数的图像如图所示，则该函数的解析式为。

（5）斜截型　例 5. 已知直线 $y=kx+b$ 和直线 $y=-2x$ 平行，且在 y 轴上的截距为 2，则直线的解析式为。

（6）平移型　例 6. ①把直线 $y=2x+1$ 向上平移 2 个单位得到的图像解析式为。

②把直线 $y=2x+1$ 向下平移 2 个单位得到的图像解析式为。

③把直线 $y=2x+1$ 向左平移 2 个单位得到的图像解析式为。

④把直线 $y=2x+1$ 向右平移 2 个单位得到的图像解析式为。

规律：

（7）实际应用型　例 7. 某油箱中存油 20 升，油从管道中匀速流出，流速为 0.2 升/分钟，则油箱中剩油量 Q（升）和流出时间 t（分钟）的函数关系式为。

（8）面积型　例 8. 已知直线 $y=kx-4$ 和两坐标轴所围成的三角形面积等于 4，则直线解析式为 。

（9）对称型　例 9. 若直线 l 和直线 $y=2x-1$ 关于 y 轴对称，则直线 l 的解析式为。

知识归纳：　若直线 l 和直线 $y=kx+b$ 关于

（1）x 轴对称，则直线 l 的解析式为 $y=-kx-b$　（2）y 轴对称，则直线 l 的解析式为 $y=-kx+b$

（3）直线 y＝x 对称，则直线 l 的解析式为

（4）直线 $y=-x$ 对称，则直线 l 的解析式为

（5）原点对称，则直线 l 的解析式为 $y=kx-b$

（10)开放型　例 10. 一次函数的图像经过(－1,2)且函数 y 的值随 x 的增大而增大，请你写出一个符合上述条件的函数关系式____________________.

（11）比例型　例 11.. 已知 y 和 2 成正比例，且 x＝1 时 y＝－6. 求 y 和 x 之间的函数关系式

练习题：

1. 已知直线 3x－2, 当 1 时，
2. 已知直线经过点 A（2,3），B（－1，－3），则直线解析式为
3. 点（－1，2）在直线 2x＋4 上吗？（填在或不在）
4. 当 m 时，函数(m－2) x^{m^2-3} +5 是一次函数，此时函数解析式为。
5. 已知直线 3 和两坐标轴所围成的三角形的面积为 6，则函数的解析式为.
6. 已知变量 y 和 x 成正比例，且 2 时，$-\frac{1}{2}$,则 y 和 x 的函数关系式为。
7. 点(2,5)关于原点的对称点的坐标为；关于 x 轴对称的点的坐标为；关于 y 轴对称的点的坐标为。
8. 直线＋2 和 x 轴交于点（－1，0），则。
9. 直线 2x－1 和 x 轴的交点坐标为和 y 轴的交点坐标。
10. 若直线＋b 平行直线 3x＋4，且过点（1，－2），则.
11. 已知 A(－1,2)， B(1,－1)， C(5,1)， D(2,4)， E(2,2),其中在直线－6 上的点有,在直线 3x－4 上的点有

12. 某人用充值 50 元的卡从 A 地向 B 地打长途电话，按通话时间收费，3 分钟内收费 2.4 元，以后每超过 1 分钟加收 1 元，若此人第一次通话 t 分钟（3≤t≤45），则卡上所余的费用 y（元）和 t（分）之间的关系式是.

13. 某商店出售一种瓜子，其售价 y（元）和瓜子质量 x（千克）之间的关系如下表

质量 x（千克）	1	2	3	4
售价 y（元）	3.60+0.20	7.20+0.20	10.80+0.20	14.40+0.2

由上表得 y 和 x 之间的关系式是

14. 已知:一次函数的图象和正比例函数－$\frac{2}{3}$X 平行,且通过点(0,4), (1)求一次函数的解析式.(2)若点 M(－8)和 N(n,5)在一次函数的图象上,求的值

15. 已知一次函数的图象经过点(－1, －5),且和正比例函数 x 的图象相交于点(2),

求(1)a 的值(2)的值(3)这两个函数图象和 x 轴所围成的三角形面积.

16. 有两条直线 $y_1 = ax+b$，$y_2 = cx+5c$，学生甲解出它们的交点坐标为（3，－2），学生乙因把 c 抄错了而解出它们的交点坐标为，求这两条直线解析式

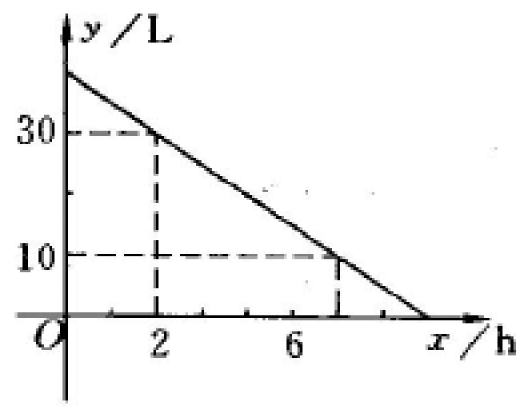
17. 已知正比例函数 $y=k_1x$ 的图象和一次函数 $y=k_2x-9$ 的图象交于点 P（3，－6）

（1）求 k_1,k_2 的值。（2）如果一次函数 $y=k_2x-9$ 和 x 轴交于点 A，求 A 点坐标

18. 某种拖拉机的油箱可储油 40L，加满油并开始工作后，•油箱中的余油量 y（L）和工作时间 x（h）之间为一次函数关系，如图所示.

（1）求 y 和 x 的函数解析式.

（2）一箱油可供拖位机工作几小时？

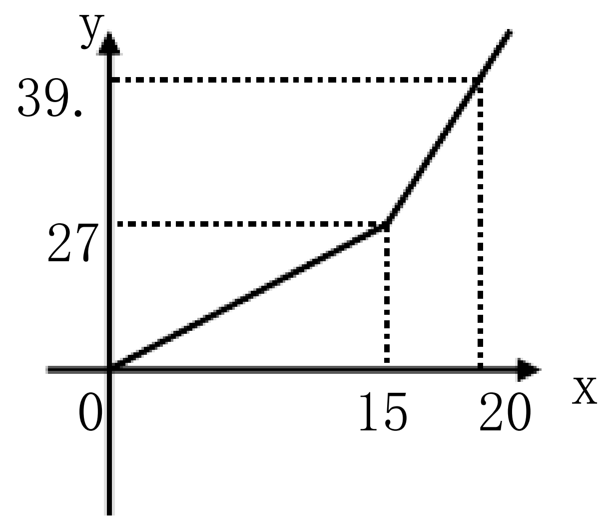


六、分段函数

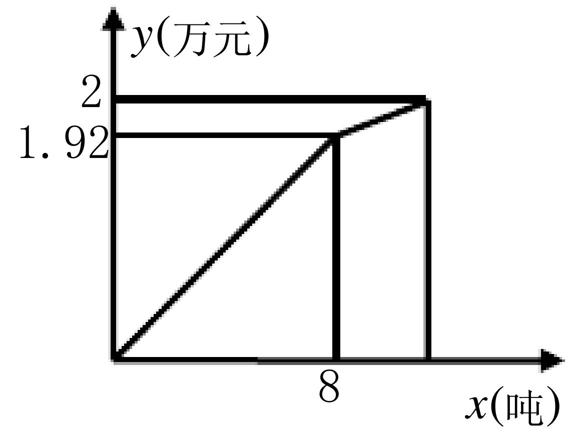
1、某自来水公司为鼓励居民节约用水，采取按月用水量收费办法，若某户居民应交水费 y（元）和用水量 x（吨）的函数关系如图所示。

（1）写出 y 和 x 的函数关系式；

（2）若某户该月用水 21 吨，则应交水费多少元？



2、果农黄大伯进城卖菠萝，他先按某一价格卖出了一部分菠萝后，把剩下的菠萝全部降价卖完，卖出的菠萝的吨数 x 和他收入的钱数 y（万元）的关系如图所示，结合图象回答下列问题：



（1）降价前每千克菠萝的价格是多少元？

（2）若降价后每千克菠萝的价格是 1.6 元，他这次卖菠萝的总收入是 2 万元，问他一共卖了多少吨菠萝？

3、某市电力公司为了鼓励居民用电，采用分段计费的方法计算电费：每月不超过 100 度时，按每度 0.57 元计费；每月用电超过 100 度时，其中的 100 度按原标准收费；超过部分按每度 0.50 元计费.

（1）设用电 x 度时，应交电费 y 元，当 x ≤100 和 x ＞100 时，分别写出 y 关于 x 的函数关系式.

（2）小王家第一季度交纳电费情况如下：

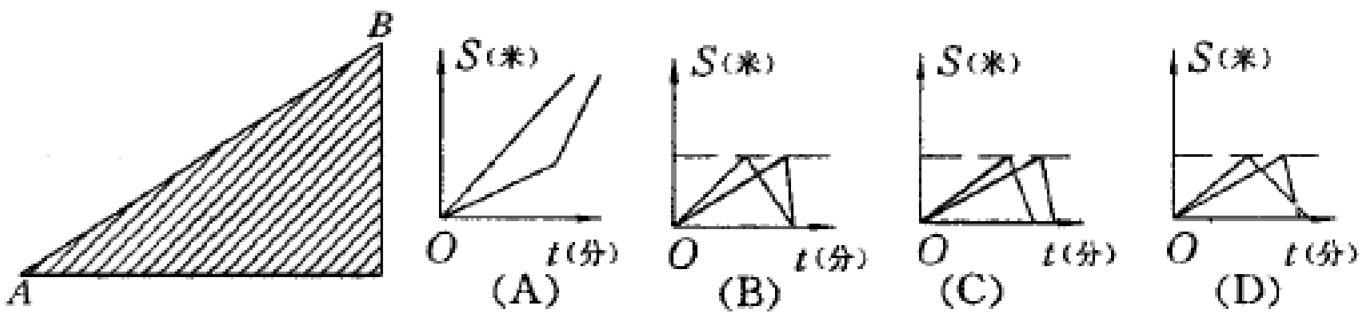
月份	一月份	二月份	三月份	合计
交费金额	76 元	63 元	45 元 6 角	184 元 6 角

问小王家第一季度共用电多少度？

4、某校需要刻录一批电脑光盘，若电脑公司刻录，每张需要 8 元（含空白光盘费）；若学校自刻，除租用刻录机需 120 元外每张还需成本费 4 元（含空白光盘费），问刻录这批电脑光盘，到电脑公司刻录费用少？还是自刻费用少？说明你的理由

七、一次函数应用

1、甲、乙二人在如图所示的斜坡上作往返跑训练．已知：甲上山的速度是 a 米/分，下山的速度是 b 米/分，（a<b）；乙上山的速度是 $\frac{1}{2}$a 米/分，下山的速度是 2b 米/分．如果甲、乙二人同时从点 A 出发，时间为 t（分），离开点 A 的路程为 S（米），•那么下面图象中，大致表示甲、乙二人从点 A 出发后的时间 t（分）和离开点 A 的路程 S（米）•之间的函数关系的是（　　　）



2、如图 7，A、B 两站相距 42 千米，甲骑自行车匀速行驶，由 A 站经 P 处去 B 站，

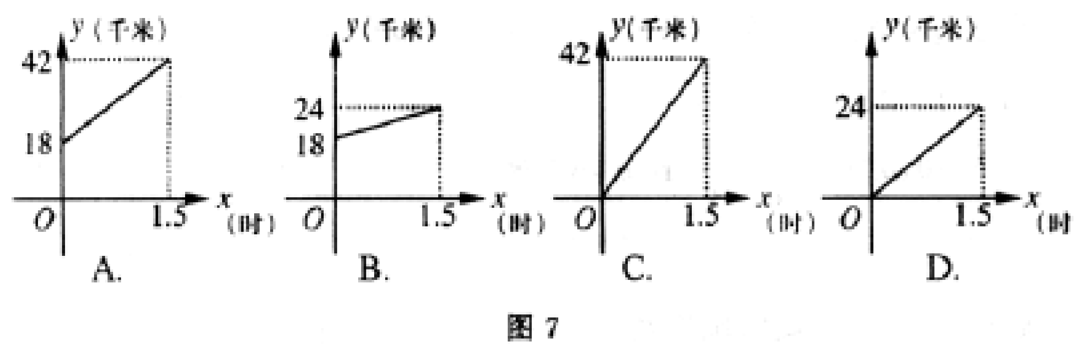
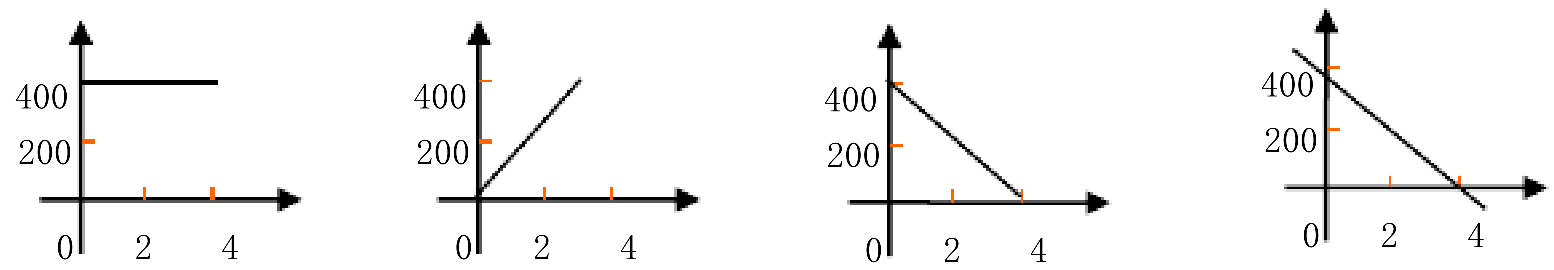


图 7

上午 8 时，甲位于距 A 站 18 千米处的 P 处，若再向前行驶 15 分钟，使可到达距 A 站 22 千米处. 设甲从 P 处出发 x 小时，距 A 站 y 千米，则 y 和 x 之间的关系可用图象表示为（　　）

3、汽车由重庆驶往相距 400 千米的成都，如果汽车的平均速度是 100 千米/时，那么汽车距成都的路程 s（千米）和行驶时间 t（小时）的函数关系用图象表示为(　　)



ABCD

4、某油库有一大型储油罐，在开始的 8 分钟内，只开进油管，不开出油管，油罐的油进至 24 吨（原油罐没储油）后将进油管和出油管同时打开 16 分钟，油罐内的油从 24 吨增至 40 吨，随后又关闭进油管，只开出油管，直到将油罐内的油放完，假设在单位时间内进油管和出油管的流量分别保持不变.

（1）试分别写出这一段时间内油的储油量 Q（吨）和进出油的时间 t(分)的函数关系式.

（2）在同一坐标系中，画出这三个函数的图象.

5、甲乙两个仓库要向 A、B 两地运送水泥，已知甲库可调出 100 吨水泥，乙库可调出 80 吨水泥，A 地需 70 吨水泥，B 地需 110 吨水泥，两库到 A，B 两地的路程和运费如下表（表中运费栏“元/（吨、千米）”表示每吨水泥运送 1 千米所需人民币）

	路程/千米		运费（元/吨、千米）	
	甲库	乙库	甲库	乙库
A 地	20	15	12	12
B 地	25	20	10	8

（1）设甲库运往A地水泥x吨，求总运费y（元）关于x（吨）的函数关系式，画出它的图象（草图）.

（2）当甲、乙两库各运往 A、B 两地多少吨水泥时，总运费最省？最省的总运费是多少？

6、A市、B市和C市有某种机器10台、10台、8台，•现在决定把这些机器支援给D市18台，E市10．已知：从A市调运一台机器到D市、E市的运费为200元和800元；从B•市调运一台机器到D市、E市的运费为300元和700元；从C市调运一台机器到D市、E市的运费为400元和500元.

（1）设从A市、B市各调x台到D市，当28台机器调运完毕后，求总运费W（元）关于x（台）的函数关系式，并求W的最大值和最小值.

（2）设从A市调x台到D市，B市调y台到D市，当28台机器调运完毕后，用x、y表示总运费W（元），并求W的最大值和最小值.

7、某公司到果园基地购买某种优质水果，慰问医务工作者，果园基地对购买量在3000千克以上（含3000千克）的有两种销售方案，甲方案：每千克9元，由基地送货上门。乙方案：每千克8元，由顾客自己租车运回，已知该公司租车从基地到公司的运输费为5000元。

（1）分别写出该公司两种购买方案的付款y（元）和所购买的水果质量x（千克）之间的函数关系式，并写出自变量x的取值范围。

（2）依据购买量判断，选择哪种购买方案付款最少？并说明理由。

8、某房地产开发公司计划建 A、B 两种户型的住房共 80 套，该公司所筹资金不少于 2090 万元，但不超过 2096 万元，且所筹资金全部用于建房，两种户型的建房成本和售价如下表：

	A	B
成本（万元/套）	25	28
售价（万元/套）	30	34

注：利润=售价－成本

（1）该公司对这两种户型住房有哪几种建房方案？

（2）该公司如何建房获得利润最大？

（3）根据市场调查，每套 B 型住房的售价不会改变，每套 A 型住房的售价将会提高 a 万元（a>0），且所建的两种住房可全部售出，该公司又将如何建房获得利润最大？

八　一次函数和方案设计问题

一次函数是最基本的函数，它和一次方程、一次不等式有密切联系，在实际生活中有广泛的应用。例如，利用一次函数等有关知识可以在某些经济活动中作出具体的方案决策。近几年来一些省市的中考或竞赛试题中出现了这方面的应用题，这些试题

新颖灵活，具有较强的时代气息和很强的选拔功能。

1．生产方案的设计

例 1　某工厂现有甲种原料 360 千克，乙种原料 290 千克，计划利用这两种原料生产 A、B 两种产品，共 50 件。已知生产一件 A 种产品需用甲种原料 9 千克、乙种原料 3 千克，可获利润 700 元；生产一件 B 种产品，需用甲种原料 4 千克、乙种原料 10 千克，可获利润 1200 元。

(1)要求安排 A、B 两种产品的生产件数，有哪几种方案?请你设计出来；

(2)生产 A、B 两种产品获总利润是 y(元)，其中一种的生产件数是 x，试写出 y 和 x 之间的函数关系式，并利用函数的性质说明(1)中的哪种生产方案获总利润最大?最大利润是多少?

2.调运方案设计

例 2　北京某厂和上海某厂同时制成电子计算机若干台，北京厂可支援外地 10 台，上海厂可支援外地 4 台，现在决定给重庆 8 台，汉口 6 台。如果从北京运往汉口、重庆的运费分别是 4 百元/台、8 百元/台，从上海运往汉口、重庆的运费分别是 3 百元/台、5 百元/台。求：

(1)若总运费为 8400 元，上海运往汉口应是多少台?

(2)若要求总运费不超过 8200 元，共有几种调运方案?

(3)求出总运费最低的调运方案，最低总运费是多少元?

例 3　某新建商场设有百货部、服装部和家电部三个经营部，共有 190 名售货员，计划全商场日营业额(指每日卖出商品所收到的总金额)为 60 万元。由于营业性质不同，分配到三个部的售货员的人数也就不等，根据经验，各类商品每 1 万元营业额所需售货员人数如表 1，每 1 万元营业额所得利润情况如表 2。

表 1

商品	每 1 万元营业额所需人数
百货类	5

表 2

商品	每 1 万元营业额所得利润
百货类	0．3 万元

服装类 4	服装类 0．5 万元
家电类 2	家电类 0．2 万元

商场将计划日营业额分配给三个经营部，设分配给百货部、服装部和家电部的营业额分别为 x(万元)、y(万元)、z(万元)(都是整数)。

(1) 请用含 x 的代数式分别表示 y 和 z；

(2) 若商场预计每日的总利润为 C(万元)，且 C 满足 19≤C≤19.7，问这个商场应怎样分配日营业额给三个经营部?各部应分别安排多少名售货员?

3．优惠方案的设计

例 4　某校校长暑假将带领该校市级“三好生”去北京旅游。甲旅行社说：“如果校长买全票一张，则其余学生可享受半价优待。”乙旅行社说：“包括校长在内，全部按全票价的 6 折(即按全票价的 60%收费)优惠。”若全票价为 240 元。

(1)设学生数为 x，甲旅行社收费为 y 甲，乙旅行社收费为 y 乙，分别计算两家旅行社的收费(建立表达式)；

(2)当学生数是多少时，两家旅行社的收费一样；

(3)就学生数 x 讨论哪家旅行社更优惠。

练习

1．某童装厂现有甲种布料 38 米，乙种布料 26 米，现计划用这两种布料生产 L、M 两种型号的童装共 50 套，已知做一套 L 型号的童装需用甲种布料 0.5 米，乙种布料 1 米，可获利 45 元；做一套 M 型号的童装需用甲种布料 0.9 米，乙种布料 0.2 米，可获利润 30 元。设生产 L 型号的童装套数为 x，用这批布料生产这两种型号的童装所获利润为 y(元)。

(1)写出 y(元)关于 x(套)的函数解析式；并求出自变量 x 的取值范围；

(2)该厂在生产这批童装中，当 L 型号的童装为多少套时，能使该厂所获的利润最大?最大利润为多少？

2．A 城有化肥 200 吨，B 城有化肥 300 吨，现要把化肥运往 C、D 两农村，如果从 A 城运往 C、D 两地运费分别是 20 元/吨和 25 元/吨，从 B 城运往 C、D 两地运费分别是 15 元/吨和 22 元/吨，现已知 C 地需要 220 吨，D 地需要 280 吨，如果个体户承包了这项运输任务，请帮他算一算，怎样调运花钱最小？

3．下表所示为装运甲、乙、丙三种蔬菜的重量及利润。某汽车运输公司计划装运

甲、乙、丙三种蔬菜到外地销售(每辆汽车按规定满载，并且每辆汽车只装一种蔬菜)

	甲	乙	丙
每辆汽车能装的吨数	2	1	1．5
每吨蔬菜可获利润（百元）	5	7	4

(1)若用 8 辆汽车装运乙、丙两种蔬菜 11 吨到 A 地销售，问装运乙、丙两种蔬菜的汽车各多少辆？

(2)公司计划用 20 辆汽车装运甲、乙、丙三种蔬菜 36 吨到 B 地销售(每种蔬菜不少于一车)，如何安排装运，可使公司获得最大利润?最大利润是多少?

4．有批货物，若年初出售可获利 2000 元，然后将本利一起存入银行。银行利息为 10%，若年末出售，可获利 2620 元，但要支付 120 元仓库保管费，问这批货物是年初还是年末出售为好?

八　一次函数和方案设计问题

答案 1 解　(1)设安排生产 A 种产品 x 件，则生产 B 种产品是(50)件。由题意得

(1)

(2)

解不等式组得　　　　　30≤x≤32。

因为 x 是整数，所以 x 只取 30、31、32，相应的(50)的值是 20、19、18。

所以，生产的方案有三种，即第一种生产方案：生产 A 种产品 30 件，B 种产品 20 件；第二种生产方案：生产 A 种产品 31 件，B 种产品 19 件；第三种生产方案：生产 A 种产品 32 件，B 种产品 18 件。

(2)设生产 A 种产品的件数是 x，则生产 B 种产品的件数是 50。由题意得

7001200(50)5006000。(其中 x 只能取 30，31，32。)

因为-500<0,　　所以此一次函数 y 随 x 的增大而减小，

所以当 30 时，y 的值最大。

因此，按第一种生产方案安排生产，获总利润最大，最大利润是：-500 • 3+6000=4500(元)。

本题是利用不等式组的知识，得到几种生产方案的设计，再利用一次函数性质得出最佳设计方案问题。

2 解　设上海厂运往汉口 x 台，那么上海运往重庆有(4)台，北京厂运往汉口(6)台，北京厂运往重庆(4)台，则总运费 W 关于 x 的一次函数关系式：

34(6)+5(4)+8(4)=76+2x。

(1) 当 84(百元)时，则有 76+284,解得 4。

若总运费为 8400 元，上海厂应运往汉口 4 台。

(2) 当 W≤82(元)，则

解得 0≤x≤3，因为 x 只能取整数，所以 x 只有四种可的能值：0、1、2、3。

答：若要求总运费不超过 8200 元，共有 4 种调运方案。

(3) 因为一次函数 76+2x 随着 x 的增大而增大，又因为 0≤x≤3，所以当 0 时，函数 76+2x 有最小值，最小值是 76(百元)，即最低总运费是 7600 元。

此时的调运方案是：上海厂的 4 台全部运往重庆；北京厂运往汉口 6 台，运往重庆 4 台。

本题运用了函数思想得出了总运费 W 和变量 x 的一般关系，再根据要求运用方程思想、不等式等知识解决了调运方案的设计问题。并求出了最低运费价。

例 3　解　(1)由题意得，解得

(2)　0.30.50.20.3522.5。

因为　19≤C≤19.7，　所以　9≤-0.3522.5≤19.7，解得　8≤x≤10。

因为　是正整，且 x 为偶数，所以　8 或 10。

当 8 时，2329，售货员分别为 40 人，92 人，58 人；

当 10 时，2030，售货员分别为 50 人，80 人，60 人。

本题是运用方程组的知识，求出了用 x 的代数式表示 y、z，再运用不等式和一次函数等知识解决经营调配方案设计问题。

3.销方案的设计

解 (1)y 甲=120240， y 乙=240·60%(1)=144144。

(2)根据题意，得 120240=144144， 解得 4。

答：当学生人数为 4 人时，两家旅行社的收费一样多。

(3)当 y 甲>y 乙，120240>144144， 解得 x<4。

当 y 甲<y 乙,120240<144144， 解得 x>4。

答：当学生人数少于 4 人时，乙旅行社更优惠；当学生人数多于 4 人时，甲旅行社更优惠；本题运用了一次函数、方程、不等式等知识，解决了优惠方案的设计问题。

综上所述，利用一次函数的图象、性质及不等式的整数解和方程的有关知识解决了实际生活中许多的方案设计问题，如果学生能切实理解和掌握这方面的知识和应用，对解决方案问题的数学题是很有效的。

练习答案：

1. (1) 151500；自变量 x 的取值范围是 18、19、20。

(2) 当 20 时，y 的最大值是 1800 元。

2. 设 A 城化肥运往 C 地 x 吨，总运费为 y 元，则 210060 (0≤x≤200)，

当 0 时，y 的最小值为 10060 元。

3. (1) 应安排 2 辆汽车装运乙种蔬菜，6 辆汽车装运丙种蔬菜。

(2) 设安排 y 辆汽车装运甲种蔬菜，z 辆汽车装运乙种蔬菜，则用［20-()］辆汽车装运丙种蔬菜。

得 21.5［20-()］=36，化简，得 12，所以 12=32-2y。

因为 y≥1， z≥1， 20-()≥1，所以 y≥1， 12≥1， 32-2y≥1，

所以 13≤y≤15.5。

设获利润 S 百元，则 5108，

当 15 时，S 的最大值是 183，12=3， 20-()=2。

4. (1) 当成本大于 3000 元时，年初出售好；

(2) 当成本等于 3000 元时，年初、年末出售都一样；

(3) 当成本小于 3000 元时，年末出售好。

一次函数专题训练

一、选择题

1．已知一次函数 $y=kx-k$，若 y 随着 x 的增大而减小，则该函数图象经过（　　）

（A）第一、二、三象限　　　　　　　　　（B）第一、二、四象限
（C）第二、三、四象限　　　　　　　　　（D）第一、三、四象限

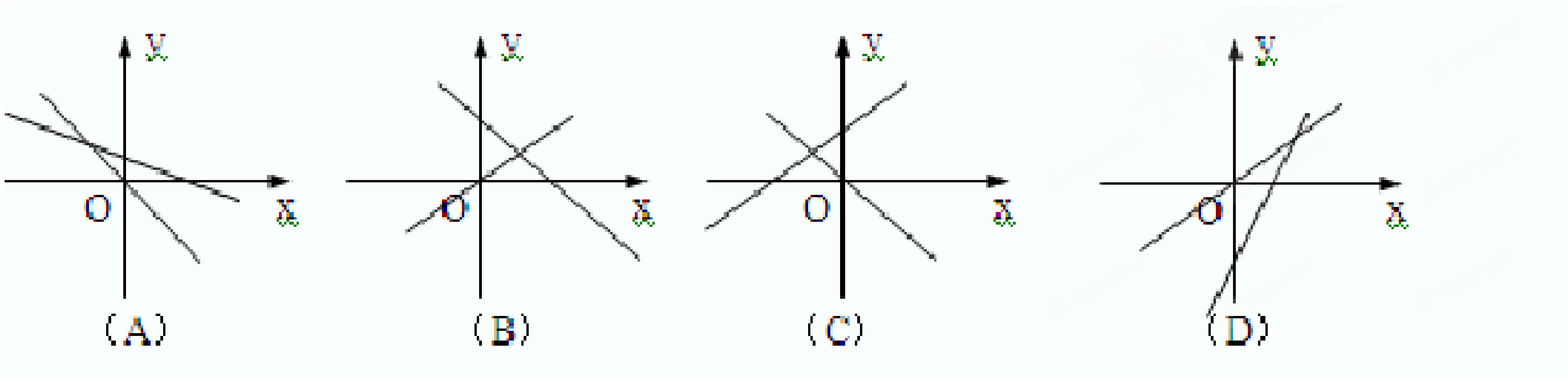
2．若正比例函数的图象经过点（1，2），则 k 的值为

A．$-\frac{1}{2}$ B．－2　　C．$\frac{1}{2}$ D．2

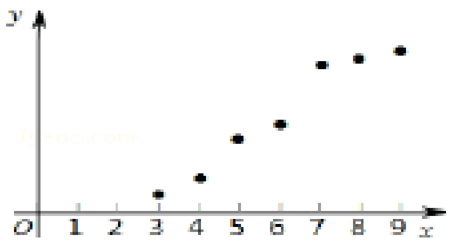
3．点 P_1（x_1，y_1），点 P_2（x_2，y_2）是一次函数 $y=-4x+3$ 图象上的两个点，且 $x_1<x_2$，则 y_1 和 y_2 的大小关系是（　　）

（A）$y_1>y_2$　　（B）$y_1>y_2>0$　　（C）$y_1<y_2$　　（D）$y_1=y_2$

4．下列图形中，表示一次函数 $y\ mx\ n$ 和正比例函数 $y=mnx$（m、n 为常数，且 $mn\neq0$）的图象的是（　　）



5．某棵果树前 x 年的总产量 y 和 x 之间的关系如图所示，从目前记录的结果看，前 x 年的年平均产量最高，则 x 的值为（　　）



A．3　　B．5 C．7　　D．9

6．根据下表中一次函数的自变量 x 和函数 y 的对应值，可得 p 的值为（　　）

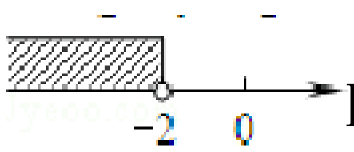
x	－2	0	1
y	3	p	0

A．1　　B．－1 C．3　　D．－ 3

7．如果一个正比例函数的图象经过不同象限的两点 A（2，m），B（n，3），那么一定有（　　）A．m>0，n>0　B．m>0，n<0 C．m<0，n>0　　D．m<0，n<0

8．已知一次函数 - 2，当函数值 y＞0 时，自变量 x 的取值范围在数轴上表示正确的是（　　）

A．　　　B．

C．D．

9．体育课上，20 人一组进行足球比赛，每人射点球 5 次，已知某一组的进球总数为 49 个，进球情况记录如下表，其中进 2 个球的有 x 人，进 3 个球的有 y 人，若（x，y）恰好是两条直线的交点坐标，则这两条直线的解析式是（　　）

进球数	0	1	2	3	4	5
人数	1	5	x	y	3	2

A．9 和 B．－9 和

C．－9 和 D．9 和

10．P_1（x_1，y_1），P_2（x_2，y_2）是正比例函数图象上的两点，下列判断中，正确的是（　　）

A．$y_1>y_2$ B．$y_1<y_2$

C．当 $x_1<x_2$ 时，$y_1<y_2$ D．当 $x_1<x_2$ 时，$y_1>y_2$

11．对于函数﹣31，下列结论正确的是（　　）

A．它的图象必经过点（﹣1，3）B．它的图象经过第一、二、三象限

C．当 x＞1 时，y＜0D．y 的值随 x 值的增大而增大

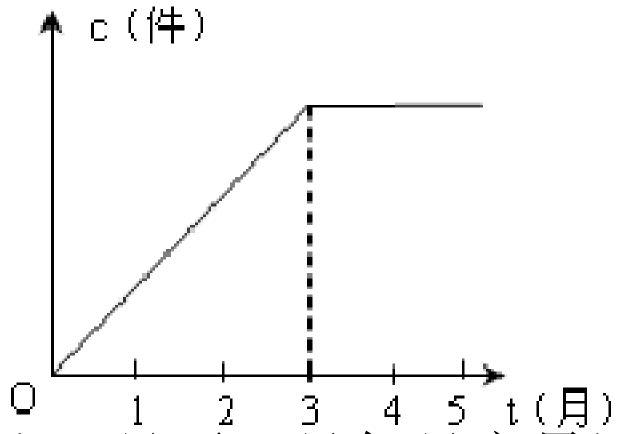
12．假期到了，17 名女教师去外地培训，住宿时有 2 人间和 3 人间可供租住，每个房间都要住满，她们有几种租住方案（　　）

A．5 种 B．4 种 C．3 种 D．2 种

13．函数 3x﹣4 和函数 23 的交点的坐标是（　　）

A．　（5，6）B．　（7，﹣7） C．　（﹣7，﹣17） D．　（7，17）

14．如图表示某加工厂今年前 5 个月每月生产某种产品的产量 c（件）和时间 t（月）之间的关系，则对这种产品来说，该厂（　　）



A.1 月至 3 月每月产量逐月增加，4、5 两月产量逐月减小

B.1 月至 3 月每月产量逐月增加，4、5 两月产量和 3 月持平

C.1 月至 3 月每月产量逐月增加，4、5 两月产量均停止生产

D.1 月至 3 月每月产量不变，　　4、5 两月均停止生产

15．若反比例函数的图象过点（﹣2，1），则一次函数﹣k 的图象过（　　）

A．第一、二、四象限　　B．第一、三、四象限

C．第二、三、四象限　　D．第一、二、三象限

16．方程 $x^2+3x-1=0$ 的根可视为函数 $y=x+3$ 的图象和函数的图象交点的横坐标，则方程 $x^3+2x-1=0$ 的实根 x_0 所在的范围是（　　）

A．　　B．　　C．　　D．

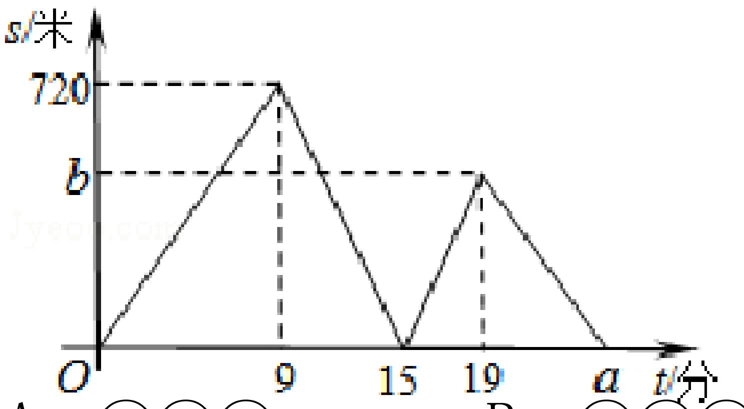
17．今年校团委举办了“中国梦，我的梦”歌咏比赛，张老师为鼓励同学们，带了 50 元钱取购买甲、乙两种笔记本作为奖品．已知甲种笔记本每本 7 元，乙种笔记本每本 5 元，每种笔记本至少买 3 本，则张老师购买笔记本的方案共有（　　）

A．3 种 B．4 种 C．5 种 D．6 种

18．已知正比例函数 $y=kx(k\neq0)$ 的图象经过点（1，－2），则正比例函数的解析式为（　　）

A．$y=2x$ B．$y=-2x$ C．　　D．

19．小文、小亮从学校出发到青少年宫参加书法比赛，小文步行一段时间后，小亮骑自行车沿相同路线行进，两人均匀速前行．他们的路程差 s（米）和小文出发时间 t（分）之间的函数关系如图所示．下列说法：①小亮先到达青少年宫；②小亮的速度是小文速度的 2.5 倍；③24；④480．其中正确的是（　　）



A. ①②③　　　B. ①②④　　　C. ①③④　　　D. ①②③④

20．对于点 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），定义一种运算：$A\oplus B=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)$．例如，A（—5，4），B（2，﹣3），$A\oplus B=(-5+2)+(4-3)=-2$．若互不重合的四点 C，D，E，F，满足$C\oplus D=D\oplus E=E\oplus F=F\oplus D$，则 C，D，E，F 四点（　　）

A. 在同一条直线上　　　B. 在同一条抛物线上

C. 在同一反比例函数图象上　　　D. 是同一个正方形的四个顶点

二、填空题

21．函数$y=kx$的图象经过点P(3，—1)，则k的值为.

22．请写出一个图形经过一、三象限的正比例函数的解析式.

23．写出一个过点（0，3），且函数值 y 随自变量 x 的增大而减小的一次函数关系式：.(填上一个答案即可)

24．已知点 P(x，一 3)在一次函数y=2x+9 的图象上，则x=.

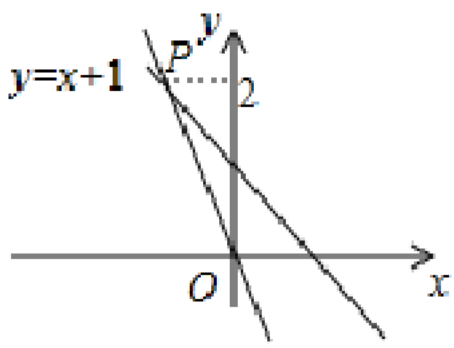
25．如果直线$y=2x+m$不经过第二象限，那么实数m的取值范围是.

26．已知，函数 3x 的图象经过点 A(﹣1，y_1)，点 B(﹣2，y_2)，则 $y_1$$y_2$(填“＞”“＜”或“=”)

27．已知点（3，5）在直线（a，b 为常数，且 a≠0）上，则$\frac{a}{b-5}$的值为.

28．已知一次函数（k、b 为常数且 k≠0）的图象经过点 A（0，﹣2）和点 B（1，0），则，.

29．如图，一个正比例函数图像和一次函数$y=-x+1$的图像相交于点 P，则这个正比例函数的表达式是.

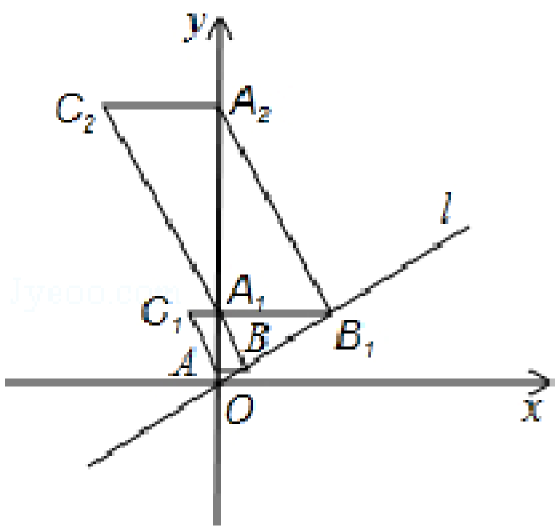


30．把直线 2x﹣1 向上平移 2 个单位，所得直线的解析式是.

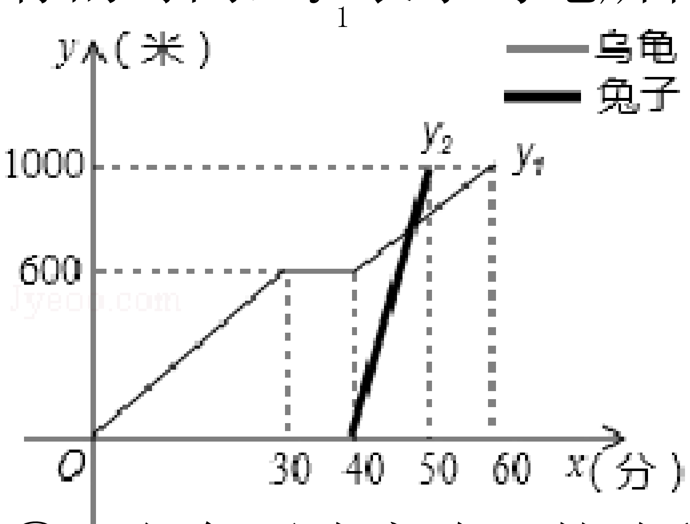
31．直线$y=2x-1$沿y轴平移 3 个单位，则平移后直线和y轴的交点坐标为.

32．某书定价 25 元，如果一次购买 20 本以上，超过 20 本的部分打八折，试写出付款金额 y（单位：元）和购书数量 x（单位：本）之间的函数关系.

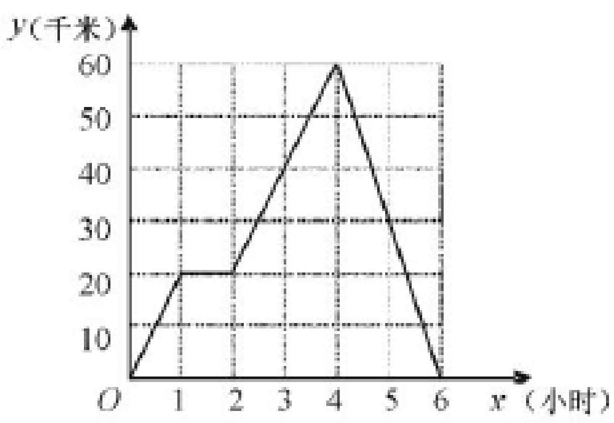
33．如图，在平面直角坐标中，直线 l 经过原点，且和 y 轴正半轴所夹的锐角为 60°，过点 A（0，1）作 y 轴的垂线 l 于点 B，过点 B 作作直线 l 的垂线交 y 轴于点 A_1，以 AB．为邻边作▱C_1；过点 A_1 作 y 轴的垂线交直线 l 于点 B_1，过点 B_1 作直线 l 的垂线交 y 轴于点 A_2，以 A_2B_1．B_1A_1 为邻边作▱$A_1B_1A_2C_2$；…；按此作法继续下去，则的坐标是.



34．“龟兔首次赛跑”之后，输了比赛的兔子没有气馁，总结反思后，和乌龟约定再赛一场．图中的函数图象刻画了“龟兔再次赛跑”的故事（x 表示乌龟从起点出发所行的时间，y_1 表示乌龟所行的路程，y_2 表示兔子所行的路程）．有下列说法：



①“龟兔再次赛跑”的路程为 1000 米；
②兔子和乌龟同时从起点出发；
③乌龟在途中休息了 10 分钟；
④兔子在途中 750 米处追上乌龟.
其中正确的说法是.（把你认为正确说法的序号都填上）
35．已知直线（n 为正整数）和坐标轴围成的三角形的面积为，则 $S_{123}+\cdots_{2012}=$.
三、计算题
36．小张骑车往返于甲、乙两地，距甲地的路程 y（千米）和时间 x（小时）的函数图象如图所示.

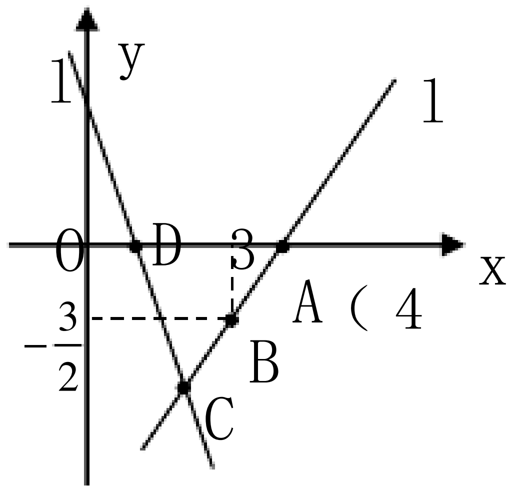


（1）小张在路上停留小时，他从乙地返回时骑车的速度为千米 / 时.
（2）小王和小张同时出发，按相同路线前往乙地，距甲地的路程 y（千米）和时间 x（小时）的函数关系式为 $y=12x+10$．小王和小张在途中共相遇几次？请你计算第一次相遇的时间.
37. 已知一次函数 $y=kx+k$ 的图象和反比例函数图象交于点 P（4，n）。
（1）求 P 点坐标
（2）求一次函数的解析式
（3）若点 A（a，b），B（c，d）在上述一次函数的图象上，且 $a>c$，试比较 b、d 的

大小，并说明理由。

38．如图，直线l_1的解析式为$y=-3x+3$，且l_1和x轴交于点D，直线l_2经过点A、B，直线l_1、l_2交于点C．

（1）求点D的坐标；
（2）求直线l_2的解析表达式；
（3）求$\triangle ADC$的面积；
（4）在直线l_2上存在异于点C的另一点P，使得$\triangle ADP$和$\triangle ADC$的面积相等，请直接写出点P的坐标.

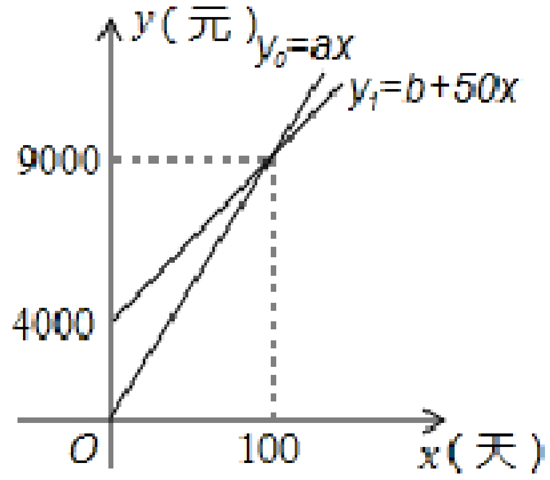


39．已知：$\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}=k$，试判断直线$y=kx+k$一定经过哪些象限，并说明理由。

40．已知直线$y=-3x$和双曲线交于点P(-1，n)．
（1）求m的值；
（2）若点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$在双曲线上．且$x_1<x_2<0$，试比较y_1、y_2的大小．

四、解答题

41．国家推行“节能减排，低碳经济”的政策后，某企业推出一种叫“”的改烧汽油为天然气的装置，每辆车改装费为 b 元. 据市场调查知：每辆车改装前、后的燃料费（含改装费）y_0 、y_1（单位：元）和正常运营时间 x（单位：天）之间分别满足关系式：$y_0=ax$、$y_1=b+50x$，如图所示.



试根据图像解决下列问题：

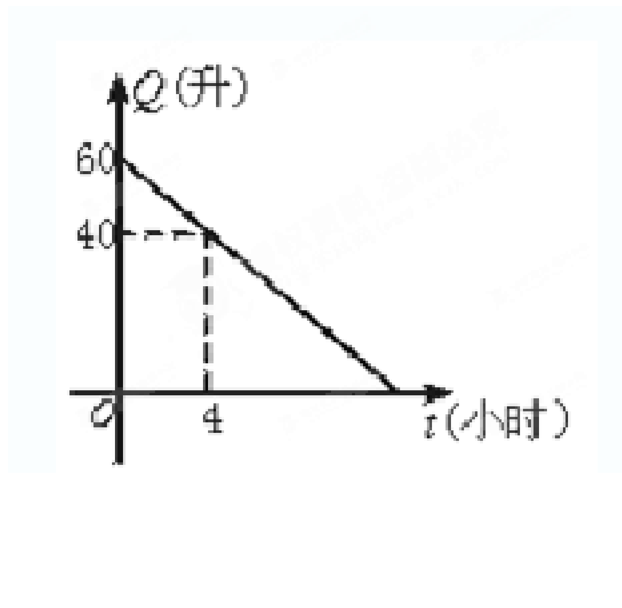
（1）每辆车改装前每天的燃料费 a=元，每辆车的改装费元. 正常运营天后，就可以从节省燃料费中收回改装成本.

（2）某出租汽车公司一次性改装了 100 辆车，因而，正常运营多少天后共节省燃料费 40 万元？

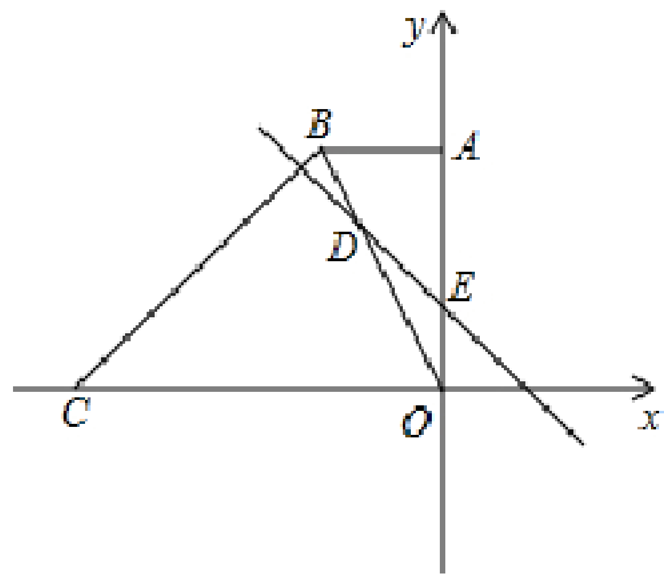
42．(12 分)汽车油箱中的余油量 Q(升)是它行驶的时间 t（小时)的一次函数．某天该汽车外出时，油箱中余油量和行驶时间的变化关系如图：

（1）根据图象，求油箱中的余油 Q 和行驶时间 t 的函数关系．(7 分)

（2）从开始算起，如果汽车每小时行驶 40 千米，当油箱中余油 20 升时，该汽车行驶了多少千米？(5 分)



43．如图，在平面直角坐标中，直角梯形的边、分别在 x 轴、y 轴上，∥，∠90⁰，∠45⁰，$12\sqrt{2}$，点 C 的坐标为（－18，0）.



（1）求点 B 的坐标；

（2）若直线交梯形对角线于点 D，交 y 轴于点 E，且 4，2，求直线的解析式.

44．某地区为了进一步缓解交通拥堵问题，决定修建一条长为 6 千米的公路．如果平均每天的修建费 y（万元）和修建天数 x（天）之间在 30≤x≤120，具有一次函数的关系，如下表所示.

x	50	60	90	120
y	40	38	32	26

（1）求 y 关于 x 的函数解析式；

（2）后来在修建的过程中计划发生改变，政府决定多修 2 千米，因此在没有增减建设力量的情况下，修完这条路比计划晚了 15 天，求原计划每天的修建费.

45．某商场销售甲、乙两种品牌的智能手机，这两种手机的进价和售价如下表所示：

	甲	乙
进价（元/部）	4000	2500
售价（元/部）	4300	3000

该商场计划购进两种手机若干部，共需 15.5 万元，预计全部销售后可获毛利润共 2.1 万元．

（毛利润=（售价 - 进价）×销售量）

（1）该商场计划购进甲、乙两种手机各多少部？

（2）通过市场调研，该商场决定在原计划的基础上，减少甲种手机的购进数量，增加乙种手机的购进数量．已知乙种手机增加的数量是甲种手机减少的数量的 2 倍，而且用于购进这两种手机的总资金不超过 16 万元，该商场怎样进货，使全部销售后获得的毛利润最大？并求出最大毛利润．

46．我国是一个严重缺水的国家．为了加强公民的节水意识，某市制定了如下用水收费标准：每户每月的用水不超过 6 吨时，水价为每吨 2 元，超过 6 吨时，超过的部分按每吨 3 元收费．该市某户居民 5 月份用水 x 吨，应交水费 y 元．

(1)若 $0<x\leqslant 6$，请写出 y 和 x 的函数关系式．(3 分)

(2)若 $x>6$，请写出 y 和 x 的函数关系式．(3 分)

(3)在同一坐标系下，画出以上两个函数的图象．(4 分)

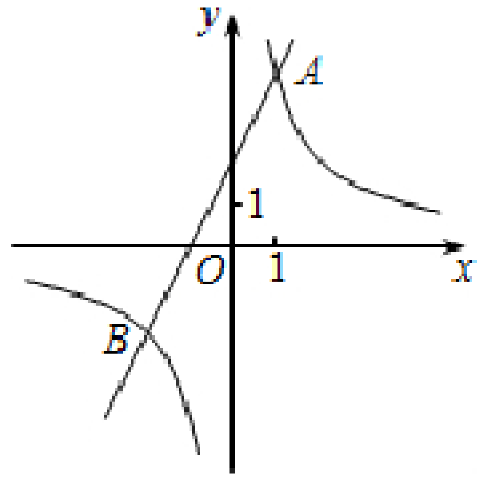
(4)如果该户居民这个月交水费 27 元，那么这个月该户用了多少吨水？(4 分)

47.已知反比例函数的图象和一次函数$y_2 = ax + b$的图象交于点 A(1，4）和点 B（m，-2）.

（1）求这两个函数的表达式;

（2）观察图象，当x>0 时，直接写出y > y_2时自变量x的取值范围;

（3）如果点 C 和点 A 关于x轴对称，求△的面积.



48. （2013 年四川攀枝花 12 分）如图，在平面直角坐标系中，四边形是梯形，∥，点 B（10，0），C（7，4）. 直线 l 经过 A，D 两点，且∠$\frac{\sqrt{2}}{2}$. 动点 P 在线段上从点 A 出发以每秒 2 个单位的速度向点 B 运动，同时动点 Q 从点 B 出发以每秒 5 个单位的速度沿 B→C→D 的方向向点 D 运动，过点 P 作垂直于 x 轴，和折线 A→D→C 相交于点 M，当 P，Q 两点中有一点到达终点时，另一点也随之停止运动. 设点 P，Q 运动的时间为 t 秒（t＞0），△的面积为 S.