

高等数学练习题(附答案)

高等数学

一、判断题（每题 2 分，共 20 分）

1. $\checkmark$ 2. $\checkmark$ 3. $\times$ 4. $\checkmark$ 5. $\times$ 6. $\checkmark$ 7. $\times$ 8. $\checkmark$ 9. $\checkmark$ 10. $\checkmark$

二、填空题（每题 2 分，共 20 分）

1. $f(x+2)=x+1$ 2. 0 3. $g'(3)=1/6$ 4. $du=ydx+xdy$ 5. $-1/2$ 6. $5/4$ 7. $9/4$
8. 6 9. 2 10. $\pi/2$

三、计算题（每题 5 分，共 40 分）

1. $1/4$ 2. $y'=(\sum_{i=1}^{10} i/(x+i))^2$ 3. $\ln|x-1|+\ln|x|+C$ 4. 2π
5. (2,2) 6. $1-\cos(1)$ 7. $\ln 3/2$ 8. $y=e^x-x-1/2x^2+C$

一、判断题

1. $\checkmark$ 2. $\times$ 3. $\times$ 4. $\times$ 5. $\times$

二、填空题

1. 2 2. 1 3. 1 4. 1 5. 1

三、改写后的文章

2. 根据函数的定义， $f(x)$ 在点 x 处有定义是指该点的函数值存在，而 $f(x)$ 在点 x 处连续是指当 x 在该点附近时，函数值的变化趋势与 x 的变化趋势一致。因此， $f(x)$ 在点 x 处有定义是 $f(x)$ 在点 x 处连续的充分条件，但不是必要条件。

3. 若 $y=f(x)$ 在点 x 不可导，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(x, f(x))$ 处可能有切线，也可能没有切线。因此，该说法是错误的。

4. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积， $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上不可积，则 $f(x)+g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可能可积，也可能不可积。因此，该说法是错误的。

$=0$ 和 $x+y+z=0$ 在空间直角坐标系中分别表示一个坐标轴和一个平面，而不是三个坐标轴和一个点。因此，该说法是错误的。

四、证明题

1. 设 $f(x) = \arctan x - \arcsin(x/(1+x^2)^{1/2})$, 则

$f'(x) = 1/(1+x^2) - x/(1+x^2)(1-x^2/(1+x^2)) = 0$. 化简可得 $x^2 = 1$,

即 $x = \pm 1$. 因此, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 故在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在唯一实根。

2. 由定积分的定义可知, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续。又因为 $F(a) < 0$, 所以在 (a, b) 上存在一点 c , 使得 $F(c) = 0$, 即 $F(x) = 0$ 在 (a, b) 上至少有一个实根。又因为 $F'(x) = f(x) + 1/x > 0$, 所以 $F(x)$ 在 (a, b) 上单调递增, 故在 (a, b) 上只有一个实根。

一、改错题

1. 原文: 在这里, 我想说的是, 人生的价值不在于得到什么, 而在于付出什么。

改正: 在这里, 我想说的是, 人生的价值不在于得到什么, 而在于付出了什么。

2. 原文: 在这个社会中, 我们常常面临着各种各样的选择, 而这些选择可能会影响我们一生的命运。

改正: 在这个社会中, 我们常常面临着各种各样的选择, 而这些选择可能会影响我们一生的命运。

3.原文：人生的路上，我们会遇到很多的坎坷和挫折，但只要我们坚持不懈，就一定能够克服这些困难。

改正：人生的路上，我们会遇到很多的坎坷和挫折，但只要我们坚持不懈，就一定能够克服这些困难。

4.原文：在这个时代，我们需要具备一定的技能和知识，才能够适应社会的发展和变化。

改正：在这个时代，我们需要具备一定的技能和知识，才能够适应社会的发展和变化。

5.原文：成功的人生不是一帆风顺的，而是需要经历各种各样的挑战和困难。

改正：成功的人生不是一帆风顺的，而是需要经历各种各样的挑战和困难。

6.原文：人生中最重要的是不是得到什么，而是学会如何去付出和奉献。

改正：人生中最重要的是不是得到什么，而是学会如何去付出和奉献。

7.原文：在这个竞争激烈的社会中，只有不断地研究和进步，才能够取得成功。

改正：在这个竞争激烈的社会中，只有不断地研究和进步，才能够取得成功。

8.原文：我们应该珍惜自己的时间和机会，不要浪费在无用的事情上。

改正：我们应该珍惜自己的时间和机会，不要浪费在无意义的事情上。

9.原文：在人生的道路上，我们需要坚持自己的信念和理想，不要轻易放弃。

改正：在人生的道路上，我们需要坚持自己的信念和理想，不要轻易放弃。

10.原文：只有经历过失败和挫折，才能够更好地成长和进步。

改正：只有经历过失败和挫折，才能够更好地成长和进步。

二、填空题

1. 设 $f(3x)=\ln(1+2x)$, 当 $f(0)=0$ 时, $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续。

2. 设 $f(x)=2x+1$, $f(a)=5$, 则 $a=2$.

3. 设 $f(x)=\lim_{t \rightarrow \infty} (1+1/t)^{(2xt)}$, 则 $f'(x)=8x^2$.

4. 已知 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $f'(a)=A$, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+2h)-f(a-3h))/h=14A.$$

5. 若 $2f(x)\cos x=\sin(2x)$, 则 $f'(x)=\cos(2x)/(2\cos^2(x)-1)$ 。

6. 若 $f(x), g(x)$ 在点 b 左连续, 且 $f(b)=g(b)$, $f'(x)>g'(x)$
($ag(x)$)。

7. 若 $y=\sin(x)$, 则 $dy/dx=\cos(x)$ 。

8. 设 $f(x)=\int(0,x^2)\ln(t)dt$, 则 $f'(x)=2x\ln(x^2)-2x^2$.

9. 设 $z=ex^2y^2$, $dy/dx=2xye^{x^2y^2}$, $d(x^2)/dx=2x$, 则
 $dz/dx=2xye^{x^2y^2} \cdot 2x=4x^2y^2e^{x^2y^2}$.

10. 累次积分 $\int(0,1)dx \int(0,\sqrt{1-x^2})f(x^2-y^2)dy$, 在极坐标下
转化为 $\int(0,\pi/2)d\theta \int(0,1)f(r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta)rdr$ 。

三、计算题

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)/x=1$, $\int(0,\pi/2)\sin(t)dt=1$.

2. $y=\ln(2x)$ 的导数为 $y'=1/x$ 。

3. $\int_0^{\pi/2} (\sin x - \cos x)/(1 + \sin^2 x) dx = [\ln(1 + \sin x) - \ln(1 + \cos x)]_0^{\pi/2} = \ln(2)$ 。

4. $\int_0^2 (x^2)/(4-x^4) dx = \int_0^{\pi/2} (1/2)/(1-(x/2)^2) dx = \arctan(2)$ 。

5. $\partial z/\partial x = 2y$, $\partial z/\partial y = 2xy$, $\partial^2 z/\partial x \partial y = 2x$ 。

6. $2y-x = 2y\ln(x-y)+y$, $dy/dx = 1/(2-2y\ln(x-y)-y)$ 。

7. $\iint_D (x-y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 (x-y) dy = 1/6$ 。

8. $y \ln y dx + (x - \ln y) dy = 0$, $dy/dx = -y/(x - \ln y)$, $y = e^{x/(1+x)}$ 。

四、证明题

设 $f(x) = x + ax + b$, 则 $f'(x) = 1 + a$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $a = -1$, 代入 $f(x)$ 得 $f(x) = x - x^2 + b$, 由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值-2, 故 $f(1) = 0$, 解得 $b = -1$, 所以 $f(x) = x - x^2 - 1$. $f'(x) = -2 < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值-2, 无极小值。

五、应用题

1.设轮船的速度为 $v(\text{km/h})$ ，则燃料费与速度的立方成正比，即 $6=(v/10)^3$ ，解得 $v=20(\text{km/h})$ ，所以每航行 1km 所消耗的费用为 $(6/100)/20=0.006/\text{km}$ 。

2.曲线 $y=x-2$ 的切线方程为 $y=x-1$ ，与曲线所围成的图形为一个三角形，底边为 1 ，高为 1 ，所以面积为 $1/2$ 。将曲线 $y=x-2$ 绕 y 轴旋转得到的旋转体为一个圆锥，底半径为 1 ，高为 1 ，所以体积为 $1/3 \pi$

给定函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上的二阶导数存在，且 $f(0)=0, f'(x)>0$ 。证明函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,a)$ 上单调递增。

首先考虑 $g(x)$ 的导数：

$$g'(x)=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$$

由于 $f(0)=0$ ，所以

。因

此在 $x=0$ 附近， $g(x)$ 是单调递增的。

接下来考虑 $(0,a)$ 内的情况。注意到 $g(x)$ 的导数可以写成：

$$g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = \frac{xf'(x)}{x^2} - \frac{f(x)}{x^2} = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

因为 $f'(x) > 0$ ，所以对于 $x > 0$ ，我们有 $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ 。等式两边同时乘以 x ，得到 $xf'(x) > f(x)$ 。因此 $g'(x) > 0$ ，即 $g(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增。

因此，我们证明了 $g(x)$ 在 $[0,a)$ 上单调递增。

1.解：设 y 为函数 $f(x)$ 的原函数，则 $y + x = C$ ，其中 C 为常数。代入 $f(1) = 1$ ，得到 $C = 1$ 。因此，特解为 $y = 1 - x$ 。

2. $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值 -2 所以 $x=1$ 必为驻点。由 $f(1) = 1+a+b=-2$, 得到 $a = 3$, $b = -3/2$ 。因此, $f(x) = x-3x^2/2$ 。

3.解: 因为 $f'(x) = 3x^2+2ax+b$, 所以 $f'(x) = 6x$ 。驻点为 $x=0$, $f'(1) = 6 > 0$, $f(1) = -2$ 为极小值点, $f'(-1) = -6 < 0$ $f(-1) = 2$ 为极大值点。

4. (1) 设船速为 x (km/h), 则每航行 1 km 的耗费为 $y = \frac{1}{3}kx^3+96x^3$ 。由 $y' = 0$, 得到 $k = 0.006$ 。令 $y' = \frac{1}{3}0.012(x-8000)^2$, 得到驻点 $x=20$, 为极小值点。因此, 船速为 20 (km/h) 时, 每航行 1 km 的耗费最少, 为 7.2 元。

2) 设切线与抛物线交点为 (x,y) , 则切线的斜率为 $\frac{2y}{x-1}$ 。又因为 $y=x-2$ 上的切线斜率满足 $2yy' = 1$, 在 (x,y) 上即有 $2y\frac{2y}{x-1} = 1$, 解得 $y' = \frac{x-1}{2y}$ 。因此, 切线方程为 $y = \frac{1}{2}(x-1)$ 。所围成图形的面积为

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/768063067005006052>