

专题 1.9 空间向量的应用-重难点题型精讲

题型先知



知识梳理

1. 空间中点、直线和平面的向量表示

(1)空间中点的位置向量: 如图, 在空间中, 我们取一定点 O 作为基点, 那么空间中任意一点 P 就可以用向量 $\vec{OP}$ 来表示. 我们把向量 $\vec{OP}$ 称为点 P 的位置向量.



(2)空间中直线的向量表示式: 直线 l 的方向向量为 $\mathbf{a}$, 且过点 A . 如图, 取定空间中的任意一点 O , 可以得到点 P 在直线 l 上的充要条件是存在实数 t , 使 $\vec{OP} = \vec{OA} + t\mathbf{a}$ ①, 把 $\vec{AB} = \mathbf{a}$ 代入①式得 $\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{AB}$ ②, ①式和②式都称为空间直线的向量表示式.

2. 空间中直线、平面的平行

(1)线线平行的向量表示: 设 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 分别是直线 l_1, l_2 的方向向量, 则 $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \mathbf{u}_1 \parallel \mathbf{u}_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}$, 使得 $\mathbf{u}_1 = \lambda \mathbf{u}_2$.

(2)线面平行的向量表示: 设 $\mathbf{u}$ 是直线 l 的方向向量, $\mathbf{n}$ 是平面 α 的法向量, $l \not\subset \alpha$, 则 $l \parallel \alpha \Leftrightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{n} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$.

(3)面面平行的向量表示: 设 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ 分别是平面 α, β 的法向量, 则 $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}$, 使得 $\mathbf{n}_1 = \lambda \mathbf{n}_2$.

3. 空间中直线、平面的垂直

(1)线线垂直的向量表示: 设 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 分别是直线 l_1, l_2 的方向向量, 则 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2 \Leftrightarrow \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$.

(2)线面垂直的向量表示: 设 $\mathbf{u}$ 是直线 l 的方向向量, $\mathbf{n}$ 是平面 α 的法向量, $l \not\subset \alpha$, 则 $l \perp \alpha \Leftrightarrow \mathbf{u} \parallel \mathbf{n} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}$, 使得 $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{n}$.

(3)面面垂直的向量表示: 设 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ 分别是平面 α, β 的法向量, 则 $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$.

4. 距离问题

(1)点 P 到直线 l 的距离: 已知直线 l 的单位方向向量为 $\mathbf{u}$, A 是直线 l 上的定点, P 是直线 l 外一点,

设向量 $\overrightarrow{AP}$ 在直线 l 上的投影向量为 $\overrightarrow{AQ}=\mathbf{a}$, 则点 P 到直线 l 的距离为 $\sqrt{a^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}}$ (如图).



(2)点 P 到平面 α 的距离: 设平面 α 的法向量为 $\mathbf{n}$, A 是平面 α 内的定点, P 是平面 α 外一点, 则点 P 到平面 α 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$ (如图).

5. 夹角问题

(1)两个平面的夹角: 平面 α 与平面 β 的夹角: 平面 α 与平面 β 相交, 形成四个二面角, 我们把这四个二面角中不大于 90° 的二面角称为平面 α 与平面 β 的夹角.

(2)空间角的向量法解法

角的分类	向量求法	范围
两条异面直线所成的角	设两异面直线 l_1, l_2 所成的角为 θ , 其方向向量分别为 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, 则 $\cos \theta = \cos \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} }{ \mathbf{u} \mathbf{v} }$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
直线与平面所成的角	设直线 AB 与平面 α 所成的角为 θ , 直线 AB 的方向向量为 $\mathbf{u}$, 平面 α 的法向量为 $\mathbf{n}$, 则 $\sin \theta = \cos \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle = \frac{ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} }{ \mathbf{u} \mathbf{n} }$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
两个平面的夹角	设平面 α 与平面 β 的夹角为 θ , 平面 α, β 的法向量分别为 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$, 则 $\cos \theta = \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{ \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 }{ \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 }$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

【题型 1 求平面的法向量】

【方法点拨】

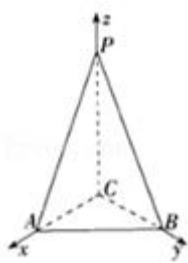
(1)求平面 ABC 的法向量时,要选取平面内两不共线向量,如 $\vec{AC}$, $\vec{AB}$;

(2)设平面的法向量为 $n=(x, y, z)$;

(3)联立方程组 $\begin{cases} n \cdot \vec{AC} = 0, \\ n \cdot \vec{AB} = 0, \end{cases}$ 并求解;

(4)所求出向量中的三个坐标不是具体的值而是比例关系,设定一个坐标为常数(常数不能为 0)便可得到平面的一个法向量.

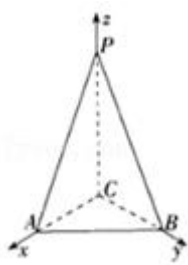
【例 1】(2022 春·连云港期中)在三棱锥 $P-ABC$ 中, CP, CA, CB 两两互相垂直, $AC=CB=1, PC=2$, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则下列向量是平面 PAB 的一个法向量的是 ()



- A. $(1, 1, \frac{1}{2})$ B. $(1, \sqrt{2}, 1)$ C. $(1, 1, 1)$ D. $(2, -2, 1)$

【解题思路】由题意 $P(0, 0, 2)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, 则 $\vec{PA} = (1, 0, -2)$, $\vec{AB} = (-1, 1, 0)$, 由此列方程组, 能求出平面 PAB 的一个法向量.

【解答过程】解: 在三棱锥 $P-ABC$ 中, CP, CA, CB 两两互相垂直, $AC=CB=1, PC=2$, 建立如图所示的空间直角坐标系,



由题意 $P(0, 0, 2)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$,

则 $\vec{PA} = (1, 0, -2)$, $\vec{AB} = (-1, 1, 0)$,

设平面 PAB 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

由 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{PA} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x - 2z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$, 令 $z=1$, 得 $\vec{n} = (2, 2, 1)$,

又 $(1, 1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\vec{n}$,

$\therefore$ 平面 PAB 的一个法向量为 $(1, 1, \frac{1}{2})$.

故选: A .

【变式 1-1】(2022 春·湖北月考) 已知平面 α 内有两点 $M(1, -1, 2)$, $N(a, 3, 3)$, 平面 α 的一个法向量为 $\vec{n} = (6, -3, 6)$, 则 $a =$ ()

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【解题思路】 $\vec{MN} = (a-1, 4, 1)$, 由平面 α 的一个法向量为 $\vec{n} = (6, -3, 6)$, 得 $\vec{n} \perp \vec{MN}$, 由此能求出 a 的值.

【解答过程】解: 平面 α 内有两点 $M(1, -1, 2)$, $N(a, 3, 3)$,

$$\vec{MN} = (a-1, 4, 1),$$

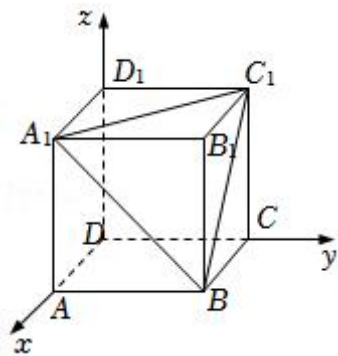
因为平面 α 的一个法向量为 $\vec{n} = (6, -3, 6)$,

所以 $\vec{n} \perp \vec{MN}$, 则 $\vec{n} \cdot \vec{MN} = 6(a-1) - 3 \times 4 + 6 = 0$,

解得 $a=2$,

故选: C .

【变式 1-2】(2021 秋·河北区期末) 如图, 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 以 D 为原点, DA , DC , DD_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系, 则平面 A_1BC_1 的一个法向量为 ()



A. $(1, 1, 1)$

B. $(-1, 1, 1)$

C. $(1, -1, 1)$

D. $(1, 1, -1)$

【解题思路】由题意写出点 B , A_1 和 C_1 的坐标, 利用坐标表示出 $\vec{BA_1}$ 和 $\vec{BC_1}$, 根据平面法向量的定义列方程组求出即可.

【解答过程】解: 由题意可知, $B(1, 1, 0)$, $A_1(1, 0, 1)$, $C_1(0, 1, 1)$,

所以 $\vec{BA_1} = (0, -1, 1)$, $\vec{BC_1} = (-1, 0, 1)$,

设 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{BA_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BC_1} = 0 \end{cases}, \text{ 即} \begin{cases} -y + z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases},$$

令 $z=1$, 得 $x=y=1$,

所以 $\vec{n} = (1, 1, 1)$,

即平面 A_1BC_1 的一个法向量为 $\vec{n} = (1, 1, 1)$.

故选: A .

【变式 1-3】(2021 秋·诸暨市期末) 在空间直角坐标系内, 平面 α 经过三点 $A(1, 0, 2)$, $B(0, 1, 0)$,

$C(-2, 1, 1)$, 向量 $\vec{n} = (1, \lambda, \mu)$ 是平面 α 的一个法向量, 则 $\lambda + \mu =$ ()

A. -7

B. -5

C. 5

D. 7

【解题思路】 求出 $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, 由 $\begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{AC} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$, 可得关于 λ 和 μ 的方程组, 求解即可.

【解答过程】 解: 由 $A(1, 0, 2)$, $B(0, 1, 0)$, $C(-2, 1, 1)$,

则 $\vec{AB} = (-1, 1, -2)$, $\vec{AC} = (-3, 1, -1)$,

因为向量 $\vec{n} = (1, \lambda, \mu)$ 是平面 α 的一个法向量,

$$\text{所以} \begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{AC} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}, \text{ 即} \begin{cases} -1 + \lambda - 2\mu = 0 \\ -3 + \lambda - \mu = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} \lambda = 5 \\ \mu = 2 \end{cases},$$

所以 $\lambda + \mu = 5 + 2 = 7$.

故选: D .

【题型2 空间线面平行关系的判定及应用】

【方法点拨】

利用向量证明线线平行的思路：

证明线线平行只需证明两条直线的方向向量共线即可。

证明线面平行问题的方法：

- (1) 证明直线的方向向量与平面内的某一向量是共线向量且直线不在平面内；
- (2) 证明直线的方向向量可以用平面内两个不共线向量表示且直线不在平面内；
- (3) 证明直线的方向向量与平面的法向量垂直且直线不在平面内。

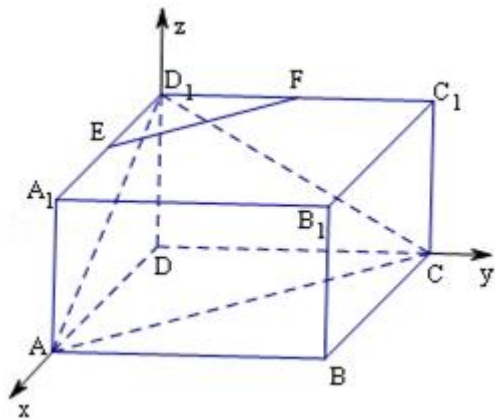
证明面面平行问题的方法：

- (1) 利用空间向量证明面面平行，通常是证明两平面的法向量平行。
- (2) 将面面平行转化为线线平行然后用向量共线进行证明。

【例2】（2021秋·成都期中）如图，在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AD = AA_1 = 2$ ， $AB = 6$ ， E 、 F 分别为 A_1D_1 、 D_1C_1 的中点。分别以 DA 、 DC 、 DD_1 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系 $D - xyz$ 。

①求点 E 、 F 的坐标；

②求证： $EF \parallel$ 平面 ACD_1 。



【解题思路】（1）根据坐标系，利用坐标的定义，可得结论；

（2）求出 $\vec{AC}$ 、 $\vec{EF}$ 的坐标，可得 $\vec{AC} = 2\vec{EF}$ ，从而可得线线平行，即可得到线面平行。

【解答过程】（1）解：由题意， $AD = AA_1 = 2$ ， $AB = 6$ ， E 、 F 分别为 A_1D_1 、 D_1C_1 的中点，

$$\therefore E(1, 0, 2), F(0, 3, 2),$$

（2）证明： $\because A(2, 0, 0), C(0, 6, 0)$ ，

$$\therefore \vec{AC} = (-2, 6, 0),$$

$$\because E(1, 0, 2), F(0, 3, 2),$$

$$\therefore \vec{EF} = (-1, 3, 0),$$

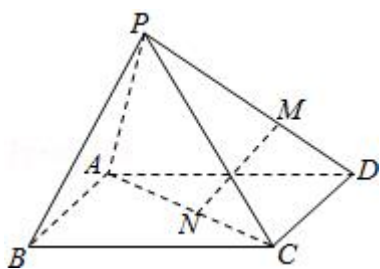
$$\therefore \vec{AC} = 2\vec{EF},$$

$$\therefore AC \parallel EF,$$

$$\because EF \notin \text{平面 } ACD_1, AC \subset \text{平面 } ACD_1,$$

$$\therefore EF \parallel \text{平面 } ACD_1.$$

【变式 2-1】如图，设 P 为长方形 $ABCD$ 所在平面外一点， M 在 PD 上， N 在 AC 上，若 $\frac{DM}{MP} = \frac{CN}{NA}$ ，用向量法证明：直线 $MN \parallel$ 平面 PAB .



【解题思路】建立空间坐标系，设 A, C, P 三点坐标，用此三点的坐标表示出 $\vec{MN}, \vec{BP}, \vec{BA}$ ，然后观察能否用 $\vec{BP}, \vec{BA}$ 表示出 $\vec{MN}$ 即可判断线面是否平行.

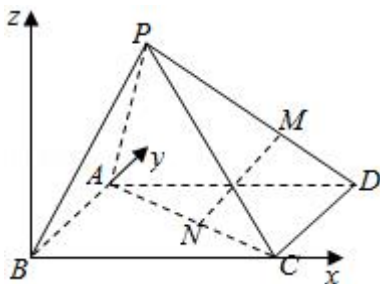
【解答过程】解：建立如图所示的空间坐标系，设 $C(a, 0, 0), A(0, b, 0), P(m, n, p)$ ，则 $D(a, b, 0)$ ，

$$\therefore \vec{BP} = (m, n, p), \vec{BA} = (0, b, 0), \vec{CA} = (-a, b, 0), \vec{DP} = (m-a, n-b, p), \vec{DC} = (0, -b, 0),$$

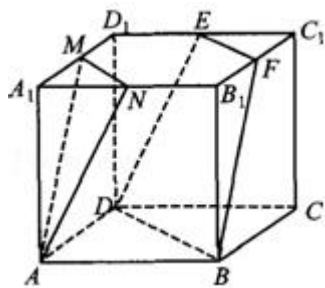
$$\because \frac{DM}{MP} = \frac{CN}{NA}, \therefore \frac{DM}{DP} = \frac{CN}{CA}, \text{ 设 } \frac{DM}{DP} = \frac{CN}{CA} = \lambda, \text{ 则 } \vec{DM} = \lambda \vec{DP} = (m\lambda - a\lambda, n\lambda - b\lambda, p\lambda), \vec{CN} = \lambda \vec{CA} = (-a\lambda, b\lambda, 0).$$

$$\therefore \vec{MN} = -\vec{DM} + \vec{DC} + \vec{CN} = (-m\lambda, 2b\lambda - n\lambda - b, -p\lambda), \therefore \vec{MN} = -\lambda \vec{BP} + (2\lambda - 1) \vec{BA}.$$

$$\because \vec{BP} \subset \text{平面 } PAB, \vec{BA} \subset \text{平面 } PAB, \vec{MN} \notin \text{平面 } PAB, \therefore MN \parallel \text{平面 } PAB.$$



【变式 2-2】（2021 秋·黄陵县校级期末）如图，已知棱长为 4 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， M ， N ， E ， F 分别是棱 A_1D_1 ， A_1B_1 ， D_1C_1 ， B_1C_1 的中点，求证：平面 $AMN \parallel$ 平面 $EFBD$ 。



【解题思路】证法一：正方体的棱长为 4，如图建立空间直角坐标系，利用向量法，可证得： $MN \parallel$ 平面 $EFBD$ ， $AK \parallel$ 平面 $EFBD$ ，进而得到平面 $AMN \parallel$ 平面 $EFBD$ 。

证法二：求出平面 AMN 的法向量和平面 $EFBD$ 的法向量，根据两个法向量平行，可得平面 $AMN \parallel$ 平面 $EFBD$ 。

【解答过程】

证法一：正方体的棱长为 4，如图建立空间直角坐标系，

则 $D(0, 0, 0)$ ， $A(4, 0, 0)$ ， $M(2, 0, 4)$ ，

$N(4, 2, 4)$ ， $B(4, 4, 0)$ ， $E(0, 2, 4)$ ， $F(2, 4, 4)$ 。

取 MN 的中点 K ， EF 的中点 G ， BD 的中点 O ，则 $O(2, 2, 0)$ ， $K(3, 1, 4)$ ， $G(1, 3, 4)$ 。

$\vec{MN} = (2, 2, 0)$ ， $\vec{EF} = (2, 2, 0)$ ， $\vec{AK} = (-1, 1, 4)$ ， $\vec{OG} = (-1, 1, 4)$ ，

$\therefore \vec{MN} \parallel \vec{EF}$ ， $\vec{AK} = \vec{OG}$ ，

$\therefore MN \parallel EF$ ， $AK \parallel OG$ ，

$\therefore MN \parallel$ 平面 $EFBD$ ， $AK \parallel$ 平面 $EFBD$ ，

$\therefore$ 平面 $AMN \parallel$ 平面 $EFBD$ 。

证法二：设平面 AMN 的法向量是 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ，平面 $EFBD$ 的法向量是 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 。

由 $\vec{a} \cdot \vec{AM} = 0$ ， $\vec{a} \cdot \vec{AN} = 0$ ，

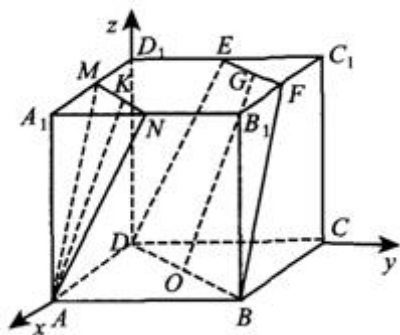
得 $\begin{cases} -2a_1 + 4a_3 = 0 \\ 2a_2 + 4a_3 = 0 \end{cases}$ 取 $a_3 = 1$ ，得 $\vec{a} = (2, -2, 1)$ 。

由 $\vec{b} \cdot \vec{DE} = 0$ ， $\vec{b} \cdot \vec{BF} = 0$ ，

得 $\begin{cases} 2b_2 + 4b_3 = 0 \\ -2b_1 + 4b_3 = 0 \end{cases}$ 取 $b_3 = 1$ ，得 $\vec{b} = (2, -2, 1)$ 。

$\therefore \vec{a} \parallel \vec{b}$ ，

∴平面 $AMN \parallel$ 平面 $EFBD$.



【变式 2-3】已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, E, F 分别是 BB_1, DD_1 的中点, 求证:

(1) $FC_1 \parallel$ 平面 ADE ;

(2) 平面 $ADE \parallel$ 平面 B_1C_1F .

【解题思路】建立空间直角坐标系 $D - xyz$, 求出 D, A, C, C_1, E, F, B_1 的坐标, 求出 $\vec{FC_1}, \vec{DA}, \vec{AE}$.

(1) 利用向量的数量积为 0 求出平面 ADE 的法向量, 通过向量的数量积推出 $\vec{n_1} \perp \vec{FC_1}$, 利用直线与平面平行的判定定理证明 $FC_1 \parallel$ 平面 ADE .

(2) 求出平面 B_1C_1F 的一个法向量. 与平面 ADE 的法向量, 通过向量共线证明, 平面 $ADE \parallel$ 平面 B_1C_1F .

【解答过程】解: 如图所示建立空间直角坐标系 $D - xyz$,

则有 $D(0, 0, 0), A(2, 0, 0), C(0, 2, 0), C_1(0, 2, 2),$

$E(2, 2, 1), F(0, 0, 1), B_1(2, 2, 2),$

所以 $\vec{FC_1} = (0, 2, 1), \vec{DA} = (2, 0, 0), \vec{AE} = (0, 2, 1).$

(1) 设 $\vec{n_1} = (x_1, y_1, z_1)$ 是平面 ADE 的法向量, 则 $\vec{n_1} \perp \vec{DA}, \vec{n_1} \perp \vec{AE},$

$$\text{即} \begin{cases} \vec{n_1} \cdot \vec{DA} = 2x_1 \\ \vec{n_1} \cdot \vec{AE} = 2y_1 + z_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ z_1 = -2y_1 \end{cases}, \text{令 } z_1 = 2 \Rightarrow y_1 = -1,$$

所以 $\vec{n_1} = (0, -1, 2)$ 因为 $\vec{n_1} \cdot \vec{FC_1} = -2 + 2 = 0$, 所以 $\vec{n_1} \perp \vec{FC_1},$

又因为 $FC_1 \notin$ 平面 $ADE,$

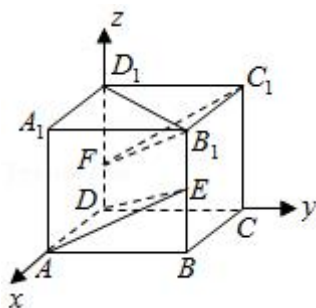
即 $FC_1 \parallel$ 平面 ADE .

(2) 因为 $\vec{C_1B_1} = (2, 0, 0)$, 设 $\vec{n_2} = (x_2, y_2, z_2)$ 是平面 B_1C_1F 的一个法向量.

$$\text{由 } \vec{n_2} \perp \vec{FC_1}, \vec{n_2} \perp \vec{C_1B_1}, \text{ 得 } \begin{cases} \vec{n_2} \cdot \vec{FC_1} = 2y_2 + z_2 = 0 \\ \vec{n_2} \cdot \vec{C_1B_1} = 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ z_2 = -2y_2 \end{cases}.$$

令 $z_2=2 \Rightarrow y_2=-1$, 所以 $\vec{n}_2 = (0, -1, 2)$,

所以 $\vec{n}_1 = \vec{n}_2$, 所以平面 $ADE \parallel$ 平面 B_1C_1F .



【题型 3 空间线面垂直关系的判定及应用】

【方法点拨】

证明两直线垂直的基本步骤:

建立空间直角坐标系 $\rightarrow$ 写出点的坐标 $\rightarrow$ 求直线的方向向量 $\rightarrow$ 证明向量垂直 $\rightarrow$ 得到两直线垂直.

用坐标法证明线面垂直的方法及步骤:

(1) 利用线线垂直: ①将直线的方向向量用坐标表示; ②找出平面内两条相交直线, 并用坐标表示它们的方向向量; ③判断直线的方向向量与平面内两条直线的方向向量垂直.

(2) 利用平面的法向量: ①将直线的方向向量用坐标表示; ②求出平面的法向量; ③判断直线的方向向量与平面的法向量平行.

证明面面垂直的两种方法:

(1) 常规法: 利用面面垂直的判定定理转化为线面垂直、线线垂直去证明.

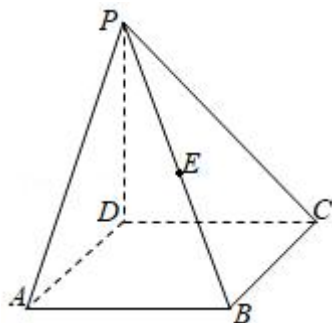
(2) 法向量法: 证明两个平面的法向量互相垂直.

【例 3】(2021·常熟市校级模拟) 如图, PD 垂直正方形 $ABCD$ 所在平面, $AB=2$, E 是 PB 的中点, $\cos \langle \vec{DP},$

$$\vec{AE} \rangle = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(1) 建立适当的空间坐标系, 写出点 E 的坐标;

(2) 在平面 PAD 内求一点 F , 使 $EF \perp$ 平面 PCB .



【解题思路】（1）以 DA 、 DC 、 DP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间坐标系，求出 $\vec{AE}$ 和 $\vec{DP}$ 的坐标，代入两个向量的夹角公式，解方程求得点 E 坐标。

（2）由 $F \in$ 平面 PAD ，可设 $F(x, 0, z)$ ，则 $\vec{EF} \cdot \vec{BC} = 0$ ，且 $\vec{EF} \cdot \vec{PC} = 0$ ，解方程组求得 F 的坐标。

【解答过程】解：（1）以 DA 、 DC 、 DP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间坐标系，则 $A(2, 0, 0)$ ， $B(2, 2, 0)$ ， $C(0, 2, 0)$ 。

设 $P(0, 0, 2m)$ ，则 $E(1, 1, m)$ 。

$$\therefore \vec{AE} = (-1, 1, m), \vec{DP} = (0, 0, 2m),$$

$$\therefore \cos \langle \vec{DP}, \vec{AE} \rangle = \frac{2m^2}{\sqrt{1+1+m^2} \cdot 2m} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 解得 } m=1.$$

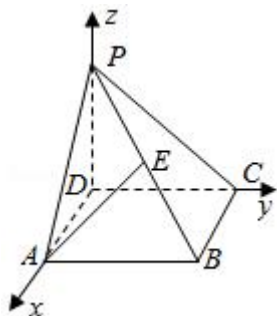
$\therefore$ 点 E 坐标是 $(1, 1, 1)$ 。

（2） $\because F \in$ 平面 PAD ， $\therefore$ 可设 $F(x, 0, z) \Rightarrow \vec{EF} = (x-1, -1, z-1)$ 。

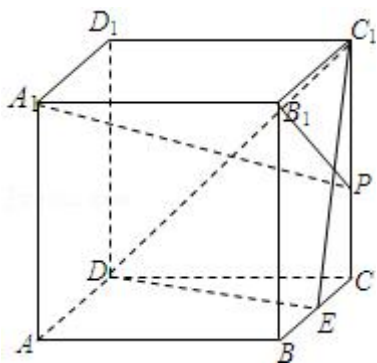
$\because EF \perp$ 平面 PCB ， $\therefore \vec{EF} \perp \vec{CB} \Rightarrow (x-1, -1, z-1) \cdot (2, 0, 0) = 0 \Rightarrow x=1$ 。

$\because \vec{EF} \perp \vec{PC}$ ， $\therefore (x-1, -1, z-1) \cdot (0, 2, -2) = 0 \Rightarrow z=0$ 。

$\therefore$ 点 F 的坐标是 $(1, 0, 0)$ ，即点 F 是 AD 的中点。



【变式 3-1】（2022 春·青羊区校级期末）如图所示的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 是 BC 的中点，在 CC_1 上求一点 P ，使面 $A_1B_1P \perp$ 面 C_1DE 。



【解题思路】以 D 为原点， DA 为 x 轴， DC 为 y 轴， DD_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，设正方体棱长为 2，且 $P(0, 2, a)$ ，分别求出面 A_1B_1P 与面 C_1DE 的法向量，然后根据面 $A_1B_1P \perp$ 面 C_1DE ，则两法向量垂直建立等式，从而求出所求。

【解答过程】解：以 D 为原点， DA 为 x 轴， DC 为 y 轴， DD_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

设正方体棱长为 2，且 $P(0, 2, a)$ ，则 $\vec{DE} = (1, 2, 0)$ ， $\vec{DC_1} = (0, 2, 2)$ ，

设 $\vec{n_1} = (x_1, y_1, z_1)$ 且 $\vec{n_1} \perp$ 平面 DEC_1 ，则 $\begin{cases} x_1 + 2y_1 = 0 \\ y_1 + z_1 = 0 \end{cases}$ ，取 $\vec{n_1} = (2, -1, 1)$ 。

又 $\vec{A_1P} = (-2, 2, a-2)$ ， $\vec{A_1B_1} = (0, 2, 0)$ ，

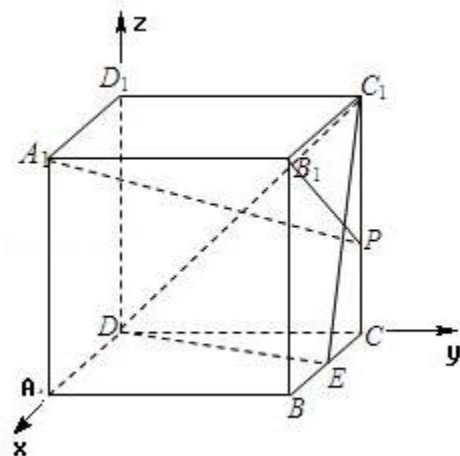
设 $\vec{n_2} = (x_2, y_2, z_2)$ 且 $\vec{n_2} \perp$ 平面 A_1B_1P ，则 $\begin{cases} -2x_2 + 2y_2 + (a-2)z_2 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$ ，

取 $\vec{n_2} = (a-2, 0, 2)$ 。

由面 $A_1B_1P \perp$ 面 C_1DE ，得 $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$

即 $2(a-2) + 2 = 0$ 解得 $a = 1$ 。

故 P 为 CC_1 的中点。



【变式 3-2】（2021·浦东新区校级模拟）四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形， $\vec{AB} = (-1, 2, 1)$ ，

$\vec{AD} = (0, -2, 3)$ ， $\vec{AP} = (8, 3, 2)$ ，

(1) 求证： $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ；

(2) 求 PC 的长。

【解题思路】(1) 由已知中向量 $\vec{AB} = (-1, 2, 1)$ ， $\vec{AD} = (0, -2, 3)$ ， $\vec{AP} = (8, 3, 2)$ ，根据两个向量的数量积为 0，两个向量垂直，我们可以判断出 $AP \perp AB$ 且 $AP \perp AD$ ，进而根据线面垂直的判定定理得到 $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ；

(2) 由已知中向量 $\vec{AB} = (-1, 2, 1)$, $\vec{AD} = (0, -2, 3)$, $\vec{AP} = (8, 3, 2)$, 根据向量加法的三角形法则, 可以求出向量 PC 的坐标, 进而代入向量模的计算公式, 得到答案.

【解答过程】证明: (1) $\because \vec{AB} = (-1, 2, 1)$, $\vec{AD} = (0, -2, 3)$, $\vec{AP} = (8, 3, 2)$,

$$\therefore \vec{AP} \cdot \vec{AB} = 0, \vec{AP} \cdot \vec{AD} = 0,$$

$$\therefore \vec{AP} \perp \vec{AB}, \vec{AP} \perp \vec{AD},$$

即 $AP \perp AB$ 且 $AP \perp AD$,

又 $\because AB \cap AD = A$

$\therefore AP \perp$ 平面 $ABCD$;

$$(2) \because \vec{AB} = (-1, 2, 1), \vec{AD} = (0, -2, 3), \vec{AP} = (8, 3, 2),$$

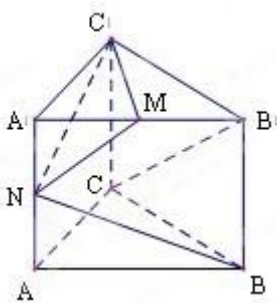
$$\therefore \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = (-1, 0, 4), \vec{PC} = \vec{AP} - \vec{AC} = (9, 3, -2),$$

$$\therefore |PC| = \sqrt{94}.$$

【变式 3-3】(2021 秋·吉林期末) 如图, 直棱柱 (侧棱垂直于底面的棱柱) $ABC - A_1B_1C_1$, 在底面 ABC 中, $CA = CB = 1$, $\angle BCA = 90^\circ$, 棱 $AA_1 = 2$, M, N 分别为 A_1B_1, A_1A 的中点.

(1) 求 $\cos \langle \vec{BA_1}, \vec{CB_1} \rangle$ 的值;

(2) 求证: $BN \perp$ 平面 C_1MN .



【解题思路】(1) 以 C 为原点, CA, CB, CC_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立如图所示的坐标系 $C - xyz$, 求得 $A_1(1, 0, 2)$, $C(0, 0, 0)$, $B_1(0, 1, 2)$, $B(0, 1, 0)$, 从而可求得 $\vec{BA_1} = (1, -1, 2)$, $\vec{CB_1} = (0, 1, 2)$, $\vec{BA_1} \cdot \vec{CB_1} = 3$, $|\vec{BA_1}| = \sqrt{6}$, $|\vec{CB_1}| = \sqrt{5}$, 于是可求得 $\cos \langle \vec{BA_1}, \vec{CB_1} \rangle$ 的值.

(2) 利用向量的坐标运算可求得 $\vec{C_1M} \cdot \vec{BN} = 0$, $\vec{C_1N} \cdot \vec{BN} = 0$, $C_1M \cap C_1N = C_1$, 由线面垂直的判定定理即

可证得结论.

【解答过程】解：以 C 为原点， CA ， CB ， CC_1 所在直线分别为 x 轴， y 轴， z 轴，建立如图所示的坐标系 $C - xyz$

(1) 依题意， $A_1(1, 0, 2)$ ， $C(0, 0, 0)$ ， $B_1(0, 1, 2)$ ， $B(0, 1, 0)$ ，

$$\therefore \vec{BA_1} = (1, -1, 2), \vec{CB_1} = (0, 1, 2),$$

$$\therefore \vec{BA_1} \cdot \vec{CB_1} = 1 \times 0 + (-1) \times 1 + 2 \times 2 = 3,$$

$$\text{又 } |\vec{BA_1}| = \sqrt{6}, |\vec{CB_1}| = \sqrt{5},$$

$$\therefore \cos \langle \vec{BA_1}, \vec{CB_1} \rangle = \frac{\vec{BA_1} \cdot \vec{CB_1}}{|\vec{BA_1}| \cdot |\vec{CB_1}|} = \frac{3}{\sqrt{30}},$$

证明：(2) $A_1(1, 0, 2)$ ， $C_1(0, 0, 2)$ ， $B_1(0, 1, 2)$ ， $N(1, 0, 1)$ ，

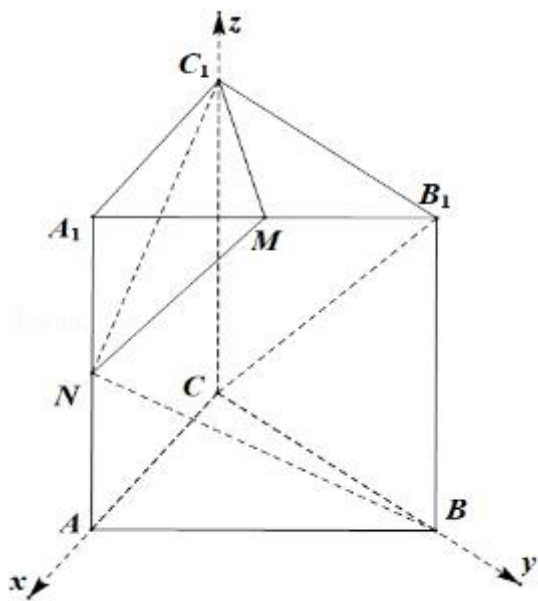
$$\therefore M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right), \therefore \vec{C_1M} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \vec{C_1N} = (1, 0, -1), \vec{BN} = (1, -1, 1),$$

$$\therefore \vec{C_1M} \cdot \vec{BN} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times (-1) + 0 \times 1 = 0,$$

同理可求 $\vec{C_1N} \cdot \vec{BN} = 0$,

$$\therefore \vec{C_1M} \perp \vec{BN}, \vec{C_1N} \perp \vec{BN}, C_1M \cap C_1N = C_1,$$

$\therefore BN \perp$ 平面 C_1MN .



【题型4 利用空间向量研究距离问题】

【方法点拨】

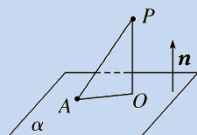
用向量法求点到直线的距离的一般步骤：

- (1) 求直线的方向向量.
- (2) 计算所求点与直线上某一点所构成的向量在直线的方向向量上的投影向量的长度.
- (3) 利用勾股定理求解. 另外, 要注意平行直线间的距离与点到直线的距离之间的转化.

用向量法求点面距的步骤:

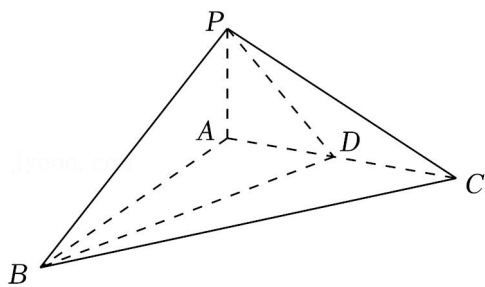
- (1) 建系: 建立恰当的空间直角坐标系.
- (2) 求点坐标: 写出(求出)相关点的坐标.
- (3) 求向量: 求出相关向量的坐标($\vec{AP}$, α 内两不共线向量, 平面 α 的法向量 n).

- (4) 求距离 $d = \frac{|\vec{AP} \cdot n|}{|n|}$.



【例4】(2022春·南通期末) 如图, 在四面体 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp AC$, $AB=AC=2PA=2$, 点 D 在线段 AC 上.

- (1) 当 D 是线段 AC 中点时, 求 A 到平面 PBD 的距离;
- (2) 若二面角 $A-PD-B$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 求 $\frac{AD}{AC}$ 的值.



【解题思路】(1) 以点 A 为坐标原点, AB 、 AC 、 AP 所在直线分别为 x 、 y 、 z 轴建立空间直角坐标系, 利用向量法可求得 A 到平面 PBD 的距离;

- (2) 设点 $D(0, t, 0)$, 其中 $0 \leq t \leq 2$, 利用向量法可得出关于 t 的方程, 解出 t 的值, 即可得解.

【解答过程】解: (1) 因为 $PA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp AC$,

以点 A 为坐标原点, AB 、 AC 、 AP 所在直线分别为 x 、 y 、 z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系,

因为 D 为 AC 的中点, 则 $A(0, 0, 0)$ 、 $B(2, 0, 0)$ 、 $D(0, 1, 0)$ 、 $P(0, 0, 1)$,

设平面 PBD 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$, $\vec{BP} = (-2, 0, 1)$, $\vec{BD} = (-2, 1, 0)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{BP} = -2x + z = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{BD} = -2x + y = 0 \end{cases}, \text{取 } x=1, \text{ 可得 } \vec{m} = (1, 2, 2), \vec{AB} = (2, 0, 0),$$

所以点 A 到平面 PBD 的距离为 $\frac{|\vec{AB} \cdot \vec{m}|}{|\vec{m}|} = \frac{2}{3}$;

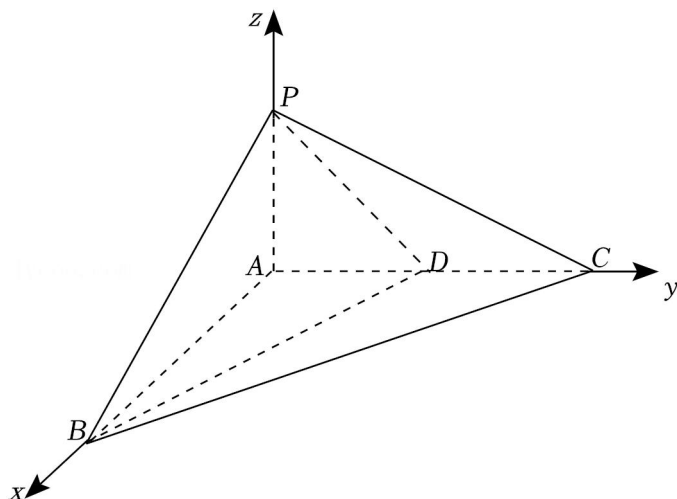
(2) 设点 $D(0, t, 0)$, 其中 $0 \leq t \leq 2$, $\vec{BP} = (-2, 0, 1)$, $\vec{BD} = (-2, t, 0)$,

$$\text{设平面 } PBD \text{ 的法向量为 } \vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1), \text{ 则} \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{BP} = -2x_1 + z_1 = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{BD} = -2x_1 + ty_1 = 0 \end{cases},$$

取 $x_1=t$, 可得 $\vec{n}_1 = (t, 2, 2t)$, 易知平面 PAD 的一个法向量为 $\vec{n}_2 = (1, 0, 0)$,

$$\text{由已知可得 } |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{t}{\sqrt{5t^2+4}} = \frac{1}{3}, \text{ 解得 } t=1,$$

此时点 D 为 AC 的中点, 故 $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$.

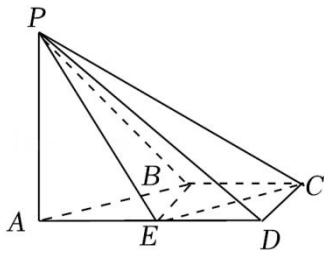


【变式 4-1】(2022 春·岳麓区校级期末) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ADC = \angle PAB = 90^\circ$,

$BC = CD = \frac{1}{2}AD = 1$. E 为棱 AD 的中点, 异面直线 PA 与 CD 所成的角为 90° .

(1) 在平面 PAB 内是否存在一点 M , 使得直线 $CM \parallel$ 平面 PBE , 如果存在, 请确定点 M 的位置, 如果不存在, 请说明理由;

(2) 若二面角 $P-CD-A$ 的大小为 45° , 求 P 到直线 CE 的距离.



【解题思路】（1）先判断存在符合题意的点，再通过作辅助线找到该点，证明 $CM \parallel$ 平面 PBE 即可；

（2）建立空间直角坐标系，通过已知的二面角度数，找到线段之间关系，从而确定相关点的坐标，然后利用向量的运算求得答案．

【解答过程】解：（1）延长 AB 交直线 CD 于点 M ，

$$\because \text{点 } E \text{ 为 } AD \text{ 的中点}, \therefore AE = ED = \frac{1}{2}AD,$$

$$\because BC = CD = \frac{1}{2}AD, \therefore ED = BC,$$

$$\because AD \parallel BC, \text{ 即 } ED \parallel BC,$$

$$\therefore \text{四边形 } BCDE \text{ 为平行四边形, 即 } EB \parallel CD,$$

$$\because AB \cap CD = M, \therefore M \in CD, \therefore CM \parallel BE,$$

$$\because BE \subset \text{平面 } PBE, CM \subset \text{平面 } PBE,$$

$$\therefore CM \parallel \text{平面 } PBE,$$

$$\because M \in AB, AB \subset \text{平面 } PAB,$$

$$\therefore M \in \text{平面 } PAB,$$

故在平面 PAB 内可以找到一点 M ($M = AB \cap CD$)，使得直线 $CM \parallel$ 平面 PBE ．

（2）如图所示， $\because \angle ADC = \angle PAB = 90^\circ$ ，即 $PA \perp AB$ ，

且异面直线 PA 与 CD 所成的角为 90° ，即 $PA \perp CD$ ，

又 $AB \cap CD = M$ ， $AB, CD \subset \text{平面 } ABCD$ ， $\therefore AP \perp \text{平面 } ABCD$ ，

$$\because AD \subset \text{平面 } ABCD, \therefore PA \perp AD,$$

又 $AD \perp CD$ ， $PA \perp CD$ ， $AD \cap PA = A$ ， $AD, PA \subset \text{平面 } PAD$ ，

$$\therefore CD \perp \text{平面 } PAD,$$

$$\because PD \subset \text{平面 } PAD, \therefore CD \perp PD,$$

因此 $\angle PDA$ 是二面角 $P - CD - A$ 的平面角，大小为 45° ，

$$\therefore PA = AD,$$

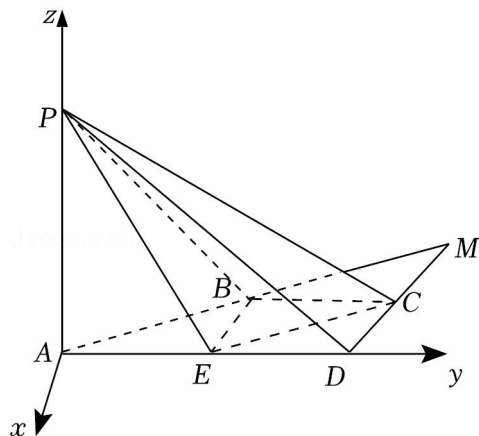
不妨设 $AD = 2$ ，则 $BC = CD = \frac{1}{2}AD = 1$ ，

以 A 为坐标原点，平行于 CD 的直线为 x 轴， AD 为 y 轴， AP 为 z 轴建立空间直角坐标系 $A-xyz$ ，

$\therefore P(0, 0, 2)$ ， $E(0, 1, 0)$ ， $C(-1, 2, 0)$ ，

$\therefore \vec{EC} = (-1, 1, 0)$ ， $\vec{EP} = (0, -1, 2)$ ， $\vec{EC}$ 方向上的单位向量坐标为 $\vec{u} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ，

所以 P 到直线 CE 的距离为 $\sqrt{|\vec{EP}|^2 - (\vec{EP} \cdot \vec{u})^2} = \sqrt{5 - \frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

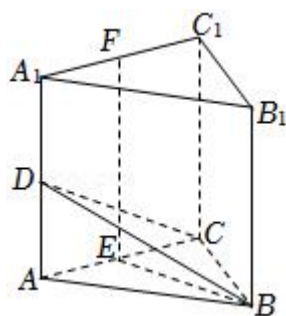


【变式 4-2】（2022 春·九龙坡区校级月考）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $CC_1 \perp$ 平面 ABC ， D ， E ， F 分别为 AA_1 ， AC ， A_1C_1 的中点， $AB = BC = \sqrt{5}$ ， $AC = AA_1 = 2$.

(1) 求证： $AC \perp$ 平面 BEF ；

(2) 求点 D 与平面 BEC_1 的距离；

(3) 求二面角 $B-CD-C_1$ 的正弦值.



【解题思路】(1) 通过证明 $AC \perp BE$ ， $AC \perp EF$ 来证得 $AC \perp$ 平面 BEF .

(2) 建立空间直角坐标系，利用向量法求得 D 到平面 BEC_1 的距离.

(3) 利用向量法求得二面角 $B-CD-C_1$ 的余弦值，进而转化为正弦值.

【解答过程】(1) 证明：由于 $AB = BC$ ， E 是 AC 的中点，所以 $AC \perp BE$ ，

由于 E ， F 分别是 AC ， A_1C_1 的中点，所以 $EF \parallel CC_1$ ，

所以 $EF \perp$ 平面 ABC ，所以 $EF \perp AC$ ，

由于 $BE \cap EF = E$ ，所以 $AC \perp$ 平面 BEF .

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/768067065062006125>