

6.3 二项式定理

知识呈现

二项式定理

基本内容

- 展开式 — $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n (n \in \mathbb{N}^*)$
- 项数 — 展开项有 $n+1$ 项
- 通项公式 — $(a+b)^n$ 展开式的第 $k+1$ 项叫做二项展开式的通项, 记作 $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.

指定项系数

- ① 对于常数项, 隐含条件是字母的指数为0 (即0次项)
- ② 对于有理项, 先写出通项公式, 求其所有的字母的指数恰好都是整数的项.
- ③ 对于二项展开式中的整式项, 其通项公式中同一字母的指数应是非负整数, 求解方式与求有理项一致

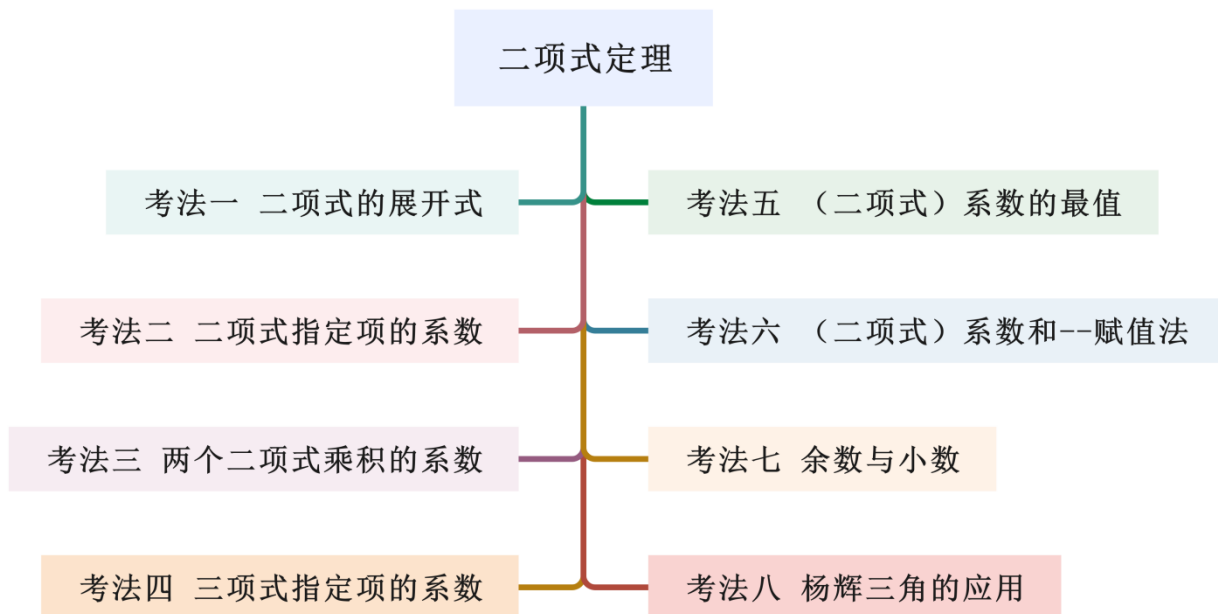
二项式系数

- 定义 — 各项的系数 $C_n^k (k \in \{0, 1, 2, \dots, n\})$ 叫做二项式系数
- 性质
 - 对称性: 与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等
 - 增减性
 - 先增后减
 - ① 当 n 为奇数时, 中间两项的二项式系数最大;
 - ② 当 n 为偶数时, 中间一项的二项式系数最大
 - 二项式系数和
 - ① $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$
 - ② $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$

系数

- 定义 — 指该项中除变量外的常数部分, 它不仅与各项的项数有关, 而且也与 a, b 的值有关
- 系数的最大项 — 一般采用待定系数法. 设展开式中各项系数分别为 $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$, 且第 $k+1$ 项最大, 应用 $\begin{cases} A_k \geq A_{k-1}, \\ A_k \geq A_{k+1}, \end{cases}$ 解出 k , 即得出系数的最大项.
- 系数和 — 赋值法 — 若 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$, 则 $f(x)$ 的展开式中
 - ① 各项系数之和为 $f(1)$
 - ② 奇数项系数之和为 $a_0 + a_2 + a_4 + \dots = \frac{f(1) + f(-1)}{2}$
 - ③ 偶数项系数之和为 $a_1 + a_3 + a_5 + \dots = \frac{f(1) - f(-1)}{2}$

例题剖析



考法一 二项式的展开式

【例 1-1】(2023 上·高二课时练习) 求 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$ 的展开式.

【答案】答案见解析

【解析】 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^4 = C_4^0 \times 1^4 \left(\frac{1}{x}\right)^0 + C_4^1 \times 1^3 \left(\frac{1}{x}\right)^1 + C_4^2 \times 1^2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + C_4^3 \times 1^1 \left(\frac{1}{x}\right)^3 + C_4^4 \times 1^0 \left(\frac{1}{x}\right)^4 = 1 + \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4}.$

【例 1-2】(2023·黑龙江) $1 - 2C_n^1 + 4C_n^2 - 8C_n^3 + \dots + (-2)^n C_n^n = ()$.

A. 1

B. -1

C. $(-1)^n$

D. $3n$

【答案】C

【解析】原式 $= C_n^0 (-2)^0 + C_n^1 (-2)^1 + C_n^2 (-2)^2 + \dots + C_n^n (-2)^n = (1 - 2)^n = (-1)^n$. 故选: C.

【一隅三反】

1. (2023·甘肃) 若对 $\forall x \in \mathbf{R}$, $(ax + b)^5 = (x + 2)^5 - 5(x + 2)^4 + 10(x + 2)^3 - 10(x + 2)^2 + 5(x + 2) - 1$ 恒成立, 其中

$a, b \in \mathbf{R}$, 则 $a + b = ()$

A. -1

B. 0

C. 2

D. 3

【答案】C

【解析】由 $(x+2)^5 - 5(x+2)^4 + 10(x+2)^3 - 10(x+2)^2 + 5(x+2) - 1 = (x+2-1)^5 = (x+1)^5$,

得 $(ax+b)^5 = (x+1)^5$, 所以 $a=b=1$, $a+b=2$. 故选: C.

2. (2023·安徽安庆) 如果 $1+2C_n^1+2^2C_n^2+L+2^nC_n^n=2187$, 则 $C_2^2+C_3^2+L+C_n^2=$ _____.

【答案】56

【解析】依题意, $1+2C_n^1+2^2C_n^2+L+2^nC_n^n=2^0C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+L+2^nC_n^n$

$$=(1+2)^n=3^n=2187, \text{ 解得 } n=7,$$

$$C_2^2+C_3^2+L+C_7^2=C_3^3+C_3^2+L+C_7^2$$

$$=C_4^3+C_4^2+L+C_7^2=C_5^3+C_5^2+C_6^2+C_7^2$$

$$=C_6^3+C_6^2+C_7^2=C_7^3+C_7^2=C_8^3=\frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1}=56.$$

故答案为: 56

3. (2023·高二课时练习) (1) 求 $\left(3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$ 的展开式

(2) 求 $(1-x)^5(1+x+x^2)^5$ 的展开式;

(3) 化简 $(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)$.

【答案】(1) $81x^2-108x+54-\frac{12}{x}+\frac{1}{x^2}$ (2) 答案见解析; (3) x^5-1

【解析】(1) $\left(3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4=\left(\frac{3x-1}{\sqrt{x}}\right)^4=\frac{1}{x^2}(3x-1)^4$

$$=\frac{1}{x^2}\left[C_4^0(3x)^4+C_4^1(3x)^3 \cdot (-1)+C_4^2(3x)^2 \cdot (-1)^2+C_4^3(3x) \cdot (-1)^3+C_4^4(-1)^4\right]$$

$$=\frac{1}{x^2}(81x^4-108x^3+54x^2-12x+1)$$

$$=81x^2-108x+54-\frac{12}{x}+\frac{1}{x^2}.$$

(2) $(1-x)^5(1+x+x^2)^5=\left[(1-x)(1+x+x^2)\right]^5=(1-x^3)^5$

$$=C_5^0 \times 1^5(-x^3)^0+C_5^1 \times 1^4(-x^3)^1+C_5^2 \times 1^3(-x^3)^2+C_5^3 \times 1^2(-x^3)^3+C_5^4 \times 1^1(-x^3)^4+C_5^5 \times 1^0(-x^3)^5$$

$$=1-5x^3+10x^6-10x^9+5x^{12}-x^{15}.$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 原式} &= C_5^0(x-1)^5 + C_5^1(x-1)^4 + C_5^2(x-1)^3 + C_5^3(x-1)^2 + C_5^4(x-1)^1 + C_5^5(x-1)^0 - 1 \\ &= [(x-1)+1]^5 - 1 = x^5 - 1. \end{aligned}$$

考法二 二项式指定项的系数

【例 2-1】(2024·四川绵阳) $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中, x 的系数为 ()

- A. -5 B. -10 C. 5 D. 10

【答案】A

【解析】 $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r \cdot (\sqrt{x})^{5-r} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^r = (-1)^r \cdot C_5^r \cdot x^{\frac{5-3r}{2}}$.

令 $\frac{5-3r}{2} = 1$, 得 $r = 1$. $\therefore x$ 的系数为 $-C_5^1 = -5$. 故选: A.

【例 2-2】(2024·湖南) 二项式 $\left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x^4}\right)^7$ 的展开式中常数项为 ()

- A. -7 B. -21 C. 7 D. 21

【答案】A

【解析】二项式 $\left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x^4}\right)^7$ 的通项公式为 $T_{r+1} = C_7^r \cdot (\sqrt[3]{x^2})^{7-r} \cdot \left(-\frac{1}{x^4}\right)^r = C_7^r \cdot (-1)^r \cdot x^{\frac{14-14r}{3}}$,

令 $\frac{14-14r}{3} = 0 \Rightarrow r = 1$, 所以常数项为 $C_7^1 \cdot (-1) = -7$, 故选: A

【例 2-3】(2024·云南) 写出 $\left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式中的一个有理项为_____.

【答案】 $729x^{12}$ (答案不唯一)

【解析】 $\left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式的通项公式为

所以展开式中的有理项分别为: $r = 0$ 时, $T_1 = 3^6 x^{12} = 729x^{12}$;

$r = 2$ 时, $T_3 = 3^4 C_6^2 x^7 = 1215x^7$; $r = 4$ 时, $T_5 = 3^2 C_6^4 x^2 = 135x^2$; $r = 6$ 时, $T_7 = x^{-3}$.

故答案为: $729x^{12}$ (四个有理项任写其一均可).

【一隅三反】

1. (2024·河南) $(x^2 - \frac{2}{x})^9$ 展开式中的常数项为 ()

- A. 672 B. -672 C. -5376 D. 5376

【答案】D

【解析】二项式 $(x^2 - \frac{2}{x})^9$ 的展开式的通项 $T_{r+1} = C_9^r (x^2)^{9-r} (-\frac{2}{x})^r = (-2)^r C_9^r x^{18-3r}, r \leq 9, r \in \mathbb{N}$,

令 $18-3r=0$, 得 $r=6$, 所以二项展开式中的常数项为 $C_9^6 (-2)^6 = 5376$. 故选: D

2. (2024 安徽) $(x + \frac{a}{x})^9$ 展开式中含 x^3 项的系数为 -84, 则实数 a 的值为 ()

- A. -1 B. -2 C. -3 D. -4

【答案】A

【解析】 $T_{r+1} = C_9^r x^{9-r} \cdot (\frac{a}{x})^r = C_9^r a^r x^{9-2r} (r=0,1,2,\dots,9)$, 令 $9-2r=3$, 得 $r=3$. $\therefore T_4 = C_9^3 a^3 x^3 = 84a^3 x^3$,

依题意 $84a^3 = -84$, $\therefore a = -1$. 故选: A.

3. (2023·全国·模拟预测) $(\sqrt[3]{x} + \frac{3}{\sqrt{x}})^5$ 的展开式中, 有理项是第____项.

【答案】3

【解析】 $(\sqrt[3]{x} + \frac{3}{\sqrt{x}})^5$ 的展开式的通项 $T_{k+1} = C_5^k \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{5-k} \left(3x^{-\frac{1}{2}}\right)^k = C_5^k 3^k x^{\frac{10-5k}{6}}$, 其中 $k=0,1,2,3,4,5$,

当 T_{k+1} 为有理项时, $\frac{10-5k}{6}$ 为整数, 结合 $k=0,1,2,3,4,5$, 所以 $k=2$, 即有理项是展开式中的第 3 项,

故答案为: 3

考法三 两个二项式乘积的系数

【例 3-1】(2024·广东广州) 在 $(x+1)(x-1)^5$ 展开式中 x^3 的系数为 ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

【答案】B

【解析】显然 $(x+1)(x-1)^5 = x(x-1)^5 + (x-1)^5$,

则 $(x-1)^5$ 展开式第 $r+1$ 项 $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r} (-1)^r = C_5^r (-1)^r x^{5-r}, r \in \mathbb{N}, r \leq 5$,

当 $r=3$ 时, $x \cdot C_5^3 (-1)^3 x^2 = -10x^3$, 当 $r=2$ 时, $C_5^2 (-1)^2 x^3 = 10x^3$,

所以展开式中含 x^3 的项为 $-10x^3 + 10x^3 = 0$ ，即展开式中 x^3 的系数为 0.

故选：B

【例 3-2】(2023·全国·模拟预测) $\left(\frac{y}{x} + m\right)(x-y)^7$ 的展开式中 x^3y^4 的系数为 -105，则实数 $m =$ ()

A. 2

B. 1

C. -1

D. -2

【答案】D

【解析】 $(x-y)^7$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1} = (-1)^r C_7^r x^{7-r} y^r$ ，所以 $\frac{y}{x} T_{r+1} = (-1)^r C_7^r x^{6-r} y^{r+1}$.

令 $\begin{cases} 6-r=3 \\ r+1=4 \end{cases}$ ，解得 $r=3$ ，

$m T_{r+1} = m \cdot (-1)^r C_7^r x^{7-r} y^r$. 令 $\begin{cases} 7-r=3 \\ r=4 \end{cases}$ ，解得 $r=4$.

由题意，可知 $(-1)^3 C_7^3 + m \cdot (-1)^4 C_7^4 = -C_7^3 + m C_7^4 = (m-1)C_7^3 = -105$ ，所以 $m = -2$. 故选：D.

【一隅三反】

1. (2023·湖北) 若 $(4x-m)(x-2)^5$ 的展开式中的 x^3 的系数为 -600，则实数 $m =$ ()

A. 8

B. 7

C. 9

D. 10

【答案】B

【解析】由题意知， $(x-2)^5$ 展开式的通项公式为 $C_5^r x^{5-r} (-2)^r$ ，故 x^3 的系数为

$4 \times C_5^3 (-2)^3 - m C_5^2 (-2)^2 = -320 - 40m = -600$ ，解得 $m = 7$. 故选：B.

2. (2024·广东) $(1+x^2) \cdot (1-2x)^4$ 的展开式中 x^3 的系数为_____.

【答案】-40

【解析】 $(1+x^2) \cdot (1-2x)^4$ 的展开式中 x^3 的项为： $1 \times C_4^3 (-2x)^3 + x^2 \times C_4^1 (-2x)^1 = -40x^3$ ，

所以展开式中 x^3 的系数为 -40. 故答案为：-40

3. (2024·山东滨州) $\left(2 + \frac{x}{y}\right)(x-2y)^6$ 的展开式中 x^4y^2 的系数为_____. (用数字作答)

【答案】-40

【解析】 $(x-2y)^6$ 的通项公式为 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} (-2y)^r = C_6^r (-2)^r x^{6-r} y^r$ ，

令 $r=2$ 得， $T_3 = C_6^2 (-2)^2 x^4 y^2 = 60x^4 y^2$ ，此时 $60x^4 y^2 \cdot 2 = 120x^4 y^2$ ，

令 $r=3$ 得， $T_4 = C_6^3 (-2)^3 x^3 y^3 = -160x^3 y^3$ ，此时 $-160x^3 y^3 \cdot \frac{x}{y} = -160x^4 y^2$ ，

故 x^4y^2 的系数为 $120 - 160 = -40$ 故答案为: -40

考法四 三项式指定项的系数

【例 4-1】(2023·全国·校联考模拟预测) 在 $\left(x+1-\frac{2}{x^2}\right)^6$ 的展开式中常数项为 ()

A. 721

B. -61

C. 181

D. -59

【答案】D

【解析】 $\left(x+1-\frac{2}{x^2}\right)^6 = \left[(x+1)-\frac{2}{x^2}\right]^6$ 的展开式的通项公式为

$$T_{r+1} = C_6^r (x+1)^{6-r} \left(-\frac{2}{x^2}\right)^r = C_6^r (-2)^r (x+1)^{6-r} x^{-2r},$$

其中 $(x+1)^{6-r}$ 的展开式的通项公式为 $T_{k+1} = C_{6-r}^k x^{6-r-k}$,

当 $r=0$ 时, $6-r-k=0$, $\therefore k=6$, 常数项为 $C_6^0 C_6^6 (-2)^0$;

当 $r=1$ 时, $6-r-k=2$, $\therefore k=3$, 常数项为 $C_6^1 C_5^3 (-2)$;

当 $r=2$ 时, $6-r-k=4$, $\therefore k=0$, 常数项为 $C_6^2 C_4^0 (-2)^2$;

故常数项为 $C_6^0 C_6^6 (-2)^0 + C_6^1 C_5^3 (-2) + C_6^2 C_4^0 (-2)^2 = -59$.

故选: D

【例 4-2】(2023·广东广州) $(2x^2+x-y)^5$ 的展开式中 x^5y^2 的系数为_____ (用数字作答).

【答案】120

【解析】由于 $x^5y^2 = (x^2)^2 \cdot x \cdot y^2$, 所以 $(2x^2+x-y)^5$ 的展开式中含 x^5y^2 的项为

$C_5^2 (2x^2)^2 \times C_3^1 x^1 \times C_2^2 (-y)^2 = 120x^5y^2$, 所以 $(2x^2+x-y)^5$ 的展开式中 x^5y^2 的系数为 120.

故答案为: 120

【一隅三反】

1 (2023 上·高二课时练习) $(1+2x-3x^2)^5$ 的展开式中 x^5 的系数为_____.

【答案】92

【解析】 $(1+2x-3x^2)^5 = (1-x)^5 (1+3x)^5$,

又 $(1-x)^5$ 展开式的通项 $T_{r+1} = C_5^r 1^{5-r} (-x)^r = C_5^r (-1)^r x^r, r=0,1,2,3,4,5$,

$(1+3x)^5$ 展开式的通项 $S_{k+1} = C_5^k 1^{5-k} (3x)^k = C_5^k 3^k x^k, k=0,1,2,3,4,5$,

所以含 x^5 的项为 $T_1 S_6 + T_2 S_5 + T_3 \cdot S_4 + T_4 \cdot S_3 + T_5 S_2 + T_6 S_1$

则含 x^5 的系数 $C_5^0 (-1)^0 C_5^5 3^5 + C_5^1 (-1)^1 C_5^4 3^4 + C_5^2 (-1)^2 C_5^3 3^3 + C_5^3 (-1)^3 C_5^2 3^2 + C_5^4 (-1)^4 C_5^1 3^1 + C_5^5 (-1)^5 C_5^0 3^0 = 92$.

故答案为: 92.

2. (2024·福建) $\left(x + \frac{1}{x} - 2\right)^4$ 的展开式中, 常数项为 ()

A. -72

B. -70

C. 70

D. 72

【答案】C

【解析】方法一: $\left(x + \frac{1}{x} - 2\right)^4 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ 展开式中,

第 $(r+1)$ 项 $T_{r+1} = C_8^r \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r (\sqrt{x})^{8-r} = (-1)^r C_8^r x^{4-r}$,

所以常数项为 $T_5 = (-1)^4 C_8^4 = 70$,

方法二: $\left(x + \frac{1}{x} - 2\right)^4 = \left[\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\right]^4$ 展开式中,

第 $(r+1)$ 项 $T_{r+1} = C_4^r (-2)^r \left(x + \frac{1}{x}\right)^{4-r}$,

当 $r=0$ 时, $C_4^0 (-2)^0 \left(x + \frac{1}{x}\right)^4$ 展开式中常数项为 $C_4^2 = 6$;

当 $r=2$ 时, $C_4^2 (-2)^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ 展开式中常数项为 $4C_4^2 \times C_2^1 = 48$;

当 $r=4$ 时, $C_4^4 (-2)^4 \left(x + \frac{1}{x}\right)^0 = 16$,

所以 $\left(x + \frac{1}{x} - 2\right)^4$ 的展开式中, 常数项为 70,

故选: C.

3. (2023 上·河北唐山) $(a-2b-3c)^4$ 的展开式中 abc^2 的系数为 ()

A. 208

B. -216

C. 217

D. -218

【解析】 根据二项式定理可得,

所以, $(a-2b-3c)^4$ 的展开式中 abc^2 的系数为 -216 . 故选: B.

【例 5-1】（2023 上·辽宁朝阳·高三建平县实验中学联考阶段练习）在二项式 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2x}\right)^6$ 的展开式中，二项式系数最大的是（ ）

- 【答案】 B**

【例 5-2】(2023·四川雅安) $(1-x)^{10}$ 的展开式中, 系数最小的项是 ()

- 【答案】 C**

又由二项式系数的性质可知, C_{10}^5 是 $\{C_{10}^r\}$ 的最大项,

故选：C.

1. (2022·重庆) (多选) 若 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中第 3 项与第 8 项的系数相等, 则展开式中二项式系数最大的项为 ()

- 【答案】BC

【解析】 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_n^r x^{n-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = C_n^r x^{n-2r}$ ，因为展开式中第 3 项与第 8 项的系数相

等， $\therefore C_n^2 = C_n^7$ ，所以 $n = 9$ ，则 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^9$ 展开式中二项式系数最大的项为第 5 项和第 6 项；故选：BC.

2. (2024·海南) 在 $(x+1)^n$ 的二项展开式中，系数最大的项为 x^3 和 x^4 ，则展开式中含 x 项的系数为_____.

【答案】7

【解析】 $T_{k+1} = C_n^k x^{n-k}$ ($k = 0, 1, \dots, n$)，因为系数最大的项为 x^3 和 x^4 ，所以 n 为奇数，

$n - \left(\frac{n+1}{2} - 1\right) = 4$ ，且 $n - \frac{n+1}{2} = 3$ ，解得 $n = 7$ 。所以含 x 项的系数为 $C_7^6 = 7$ 。故答案为：7

3. (2023·上海嘉定) 已知 $(1+2x)^6$ 的二项展开式中系数最大的项为_____.

【答案】 $240x^4$

【解析】设系数最大的项为 $T_{k+1} = C_6^k (2x)^k$ ，则 $\begin{cases} C_6^k \cdot 2^k \geq C_6^{k+1} \cdot 2^{k+1} \\ C_6^k \cdot 2^k \geq C_6^{k-1} \cdot 2^{k-1} \end{cases}$ ，解得 $\frac{11}{3} \leq k \leq \frac{14}{3}$ ，

因为 $0 \leq k \leq 6$ 且 k 为整数，所以 $k = 4$ ，此时最大的项为 $T_5 = C_6^4 (2x)^4 = 240x^4$ 。故答案为： $240x^4$

4. (2023·上海) 二项式 $(x-1)^7$ 的展开式中，系数最大的项为_____.

【答案】 $35x^3$

【解析】 $(x-1)^7$ 展开式通项公式为 $T_{r+1} = C_7^r x^{7-r} (-1)^r$ ， $0 \leq r \leq 7$ 且 r 为整数。要想系数最大，则 r 为偶数，

其中 $T_1 = C_7^0 x^7 (-1)^0 = x^7$ ， $T_3 = C_7^2 x^5 (-1)^2 = 21x^5$ ， $T_5 = C_7^4 x^3 (-1)^4 = 35x^3$ ， $T_7 = C_7^6 x (-1)^6 = 7x$ ，

显然系数最大项为 $T_5 = 35x^3$ 。故答案为： $35x^3$

考法六 (二项式) 系数和--赋值法

【例 6-1】(2023·广东佛山) (多选) 已知 $(x+2)^{10} + x^8 = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \dots + a_{10}(x+1)^{10}$ ，则下列结论正确的是 ()

A. $a_0 = 2$

B. $a_2 = 17$

C. $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 384$

D. $a_0 + 2a_1 + 3a_2 + \dots + 11a_{10} = 6144$

【答案】ACD

【解析】对于 A，令 $x = -1$ ，则 $a_0 = (-1+2)^{10} + (-1)^8 = 1+1 = 2$ ，故 A 正确；

对于 B, 因为 $(x+2)^{10} + x^8 = [(x+1)+1]^{10} + [(x+1)-1]^8$,

所以 $a_2 = C_{10}^8 + C_8^6 \cdot (-1)^6 = 73$, B 错误;

对于 C, 令 $x=0$, 则 $a_0 + a_1 + \dots + a_{10} = 2^{10} = 1024$,

令 $x=-2$, 则 $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{10} = 2^8 = 256$,

所以 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = \frac{1024-256}{2} = 384$, 故 C 正确;

对于 D, 由选项 B 可知, $a_1 = C_{10}^9 + C_8^7 \times (-1) = 2, a_3 = C_{10}^7 - C_8^5 = 64, a_4 = C_{10}^6 + C_8^4 = 280$,

$a_5 = C_{10}^5 - C_8^3 = 196, a_6 = C_{10}^4 + C_8^2 = 238, a_7 = C_{10}^3 - C_8^1 = 112, a_8 = C_{10}^2 + 1 = 46$,

$a_9 = C_{10}^1 = 10, a_{10} = C_{10}^0 = 1$,

所以 $a_0 + 2a_1 + 3a_2 + \dots + 11a_{10} = 2 + 2 \times 2 + 3 \times 73 + 4 \times 64 + 5 \times 280 + 6 \times 196$

$+ 7 \times 238 + 8 \times 112 + 9 \times 46 + 10 \times 10 + 11 \times 1 = 6144$, 故 D 正确.

故选: ACD.

【例 6-2】(2023·广东佛山)(多选) 若 $x^5 = a_0 + a_1(1-x) + a_2(1-x)^2 + \dots + a_5(1-x)^5$, 其中 $a_i (i=0,1,\dots,5)$ 为实数, 则 ()

A. $a_0 = 1$

B. $a_3 = 10$

C. $a_1 + a_3 + a_5 = -16$

D. $a_1 + a_2 + \dots + a_5 = 1$

【答案】AC

【解析】令 $x=1$ 可得 $a_0 = 1$, A 正确.

$x^5 = (x-1+1)^5$, 其展开式的第三项是 $T_3 = C_5^2 (x-1)^3 = -10(1-x)^3$, 所以 $a_3 = -10$, B 不正确.

令 $x=0$ 可得 $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_5 = 0$, 所以 $a_1 + a_2 + \dots + a_5 = -1$, D 不正确.

令 $x=2$ 可得 $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_5 = 32$, 与 $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_5 = 0$ 相减可得 $a_1 + a_3 + a_5 = -16$, C 正确.

故选: AC

【一隅三反】

1. (2023·河北)(多选) 若 $(3x-2)^{2023} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{2023}x^{2023} (x \in \mathbb{R})$, 则 ()

A. $a_0 = 2^{2023}$

$$\text{B. } a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2022} = \frac{1-5^{2023}}{2}$$

$$\text{C. } a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2023} = \frac{-5^{2023} - 1}{2}$$

$$\text{D. } \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots + \frac{a_{2023}}{3^{2023}} = 2^{2023} - 1$$

【答案】BD

【解析】对于 A，当 $x=0$ 时， $a_0 = (-2)^{2023} = -2^{2023}$ ，A 错误；

对于 B，C，当 $x=1$ 时， $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2023} = 1^{2023} = 1$ ，

当 $x=-1$ 时， $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{2022} - a_{2023} = -5^{2023}$ ，

所以 $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2022} = \frac{1-5^{2023}}{2}$ ， $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2023} = \frac{5^{2023} + 1}{2}$ ，

所以 B 正确，C 错误；

对于 D，当 $x = \frac{1}{3}$ 时， $\left(3 \times \frac{1}{3} - 2\right)^{2023} = a_0 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_{2023}}{3^{2023}}$ ，

所以 $\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots + \frac{a_{2023}}{3^{2023}} = (-1)^{2023} - a_0 = 2^{2023} - 1$ ，D 正确。

故选：BD。

2. (2023·江苏扬州·高二统考期中) (多选) $(1-2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ 的展开式中第3项和第11项的二项式系数相等，则以下判断正确的是 ()

A. 第7项的二项式系数最大

B. 所有奇数项二项式系数的和为 2^{13}

$$\text{C. } \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_{12}}{2^{12}} = -1$$

$$\text{D. } a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 12a_{12} = -12$$

【答案】AC

【解析】由题意，可得 $C_n^2 = C_n^{10}$ ，所以 $n=12$ ，

对于 A 中，根据二项式定理的性质，可得中间项第7项的二项式系数最大，所以 A 正确；

对于 B 中，根据二项式系数的性质，可得所有奇数项二项式系数的和为 2^{11} ，所以 B 错误；

对于 C 中，对于 C 中，令 $x = \frac{1}{2}$ ，可得 $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_{12}}{2^{12}} = (1-1)^{12} = 0$ ，

令 $x=0$ ，可得 $a_0=1$ ，所以 $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_{12}}{2^{12}} = -1$ ，所以 C 正确；

对于 D 中，由 $(1-2x)^{12} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{12}x^{12}$ ，

可得 $\left[(1-2x)^{12}\right]' = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{12}x^{12})'$,

即 $-24(1-2x)^{11} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + 12a_{12}x^{11}$,

令 $x=1$, 可得 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 12a_{12} = -24 \times (1-2)^{11} = 24$, 所以 D 错误.

故选: AC.

3. (2024·黑龙江·高二校联考期末) (多选) 若 $x^8 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_8(x-1)^8$, 其中 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_8$ 为实数, 则 ()

A. $a_0 = 1$

B. $a_6 = 56$

C. $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 128$

D. $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = 128$

【答案】AC

【解析】令 $t = x - 1$, 则原式转化为 $(t+1)^8 = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_8t^8$,

对 A, 令 $t = 0$, 得 $a_0 = 1$, 故 A 正确;

对 B, 由二项式定理得 $a_6 = C_8^2 = 28$, 故 B 错误;

对 CD, 令 $t = 1$, 得 $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_8 = 2^8$, 令 $t = -1$, 得 $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_8 = 0$,

所以 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = 2^7 = 128$,

所以 $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = 127$, 故 C 正确, D 错误.

故选: AC

考法七 余数与小数

【例 7-1】(2023 下·河南郑州·高二校联考期中) 8^{10} 除以 49 所得的余数是_____.

【答案】22

【解析】法一: 由 $8^{10} = (7+1)^{10} = C_{10}^0 7^{10} + C_{10}^1 7^9 + \dots + C_{10}^8 7^2 + C_{10}^9 7 + 1$, 前 9 项可以被 49 整除,

而 $C_{10}^9 7 + 1 = 71 = 49 + 22$, 故余数为 22.

法二: 由 $8^{10} = 64^5 = (49+15)^5 = 49^5 + 5 \times 15 \times 49^4 + 10 \times 15^2 \times 49^3 + 10 \times 15^3 \times 49^2 + 5 \times 15^4 \times 49 + 15^5$,

而 $15^5 = 759375 = 49 \times 15497 + 22$, 故余数为 22. 故答案为: 22

【例 7-2】(2023·高二课时练习) 将 0.991^5 精确到 0.01 的近似值是_____.

【答案】0.96

【解析】因为 $0.991^5 = (1-0.009)^5 = C_5^0 \times 1 - C_5^1 \times 0.009 + C_5^2 \times 0.009^2 - \dots \approx 1 - 0.045 + 0.00081 = 0.95581$,

且将 0.991^5 精确到 0.01, 故近似值为 0.96 故答案为: 0.96

【一隅三反】

1. (2023 安徽) 1.02^8 的近似值是_____.(精确到小数点后三位)

【答案】1.172

【解析】由题意得: $1.02^8 = (1+0.02)^8 \approx C_8^0 + C_8^1 \cdot 0.02 + C_8^2 \cdot 0.02^2 + C_8^3 \cdot 0.02^3 \approx 1.172$.

故答案为: 1.172

2. (2023 上·河北) 98^{10} 除以 1000 的余数是_____.

【答案】24

【解析】因为 $98^{10} = (100-2)^{10} = 100^{10} + C_{10}^1 \times (-2) \times 100^9 + C_{10}^2 \times (-2)^2 \times 100^8 + L + C_{10}^9 \times (-2)^9 \times 100 + C_{10}^{10} \times (-2)^{10}$
 $= [100^{10} + C_{10}^1 \times (-2) \times 100^9 + C_{10}^2 \times (-2)^2 \times 100^8 + L + (-2)^9 \times 1000] + 1024$
 $= [100^{10} + C_{10}^1 \times (-2) \times 100^9 + C_{10}^2 \times (-2)^2 \times 100^8 + L + (-2)^9 \times 1000 + 1000] + 24$,

所以 98^{10} 除以 1000 的余数是: 24.

故答案为: 24

3. (2023 下·江苏淮安·高二江苏省郑梁梅高级中学校考阶段练习) 今天是星期日, 经过 7 天后还是星期日, 那么经过 15^{2023} 天后是 ()

- A. 星期日 B. 星期一 C. 星期三 D. 星期四

【答案】B

【解析】 $15^{2023} = (14+1)^{2023} = 14^{2023} + C_{2023}^1 14^{2022} + L + C_{2023}^{2022} \times 14 + 1$,

因为 $14^{2023} + C_{2023}^1 14^{2022} + L + C_{2023}^{2022} \times 14$ 能被 7 整除, 所以 15^{2023} 除以 7 余 1,

所以经过 15^{2023} 天后是星期一. 故选: B.

4. (2024·甘肃武威) 干支纪年是中国古代的一种纪年法. 分别排出十天干与十二地支如下:

天干: 甲 乙 丙 丁 戊 己 庚 辛 壬 癸

地支: 子 丑 寅 卯 辰 巳 午 未 申 酉 戌 亥

把天干与地支按以下方法依次配对: 把第一个天干“甲”与第一个地支“子”配出“甲子”, 把第二个天干“乙”与第二个地支“丑”配出“乙丑”, L, 若天干用完, 则再从第一个天干开始循环使用. 已知 2023 年是癸卯年, 则 $13^8 + 2$ 年以后是_____年.

【答案】丙午

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/768126122101006133>