

四川省成都市重点中学 2023 年高中毕业生五月供题训练（二）数学试题

注意事项：

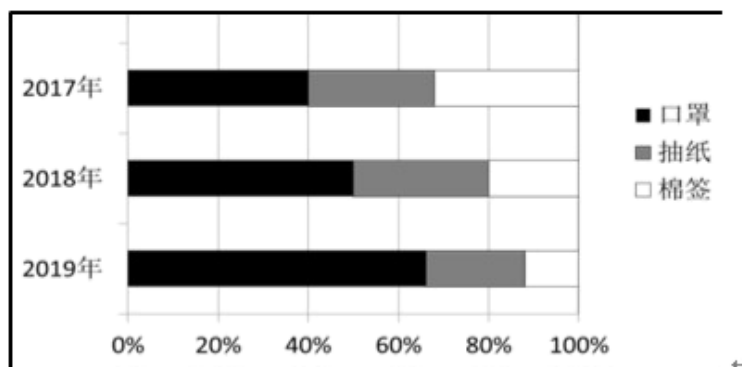
1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $\frac{1-i}{2-i}$ 的共轭复数对应的点位于（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 某工厂只生产口罩、抽纸和棉签，如图是该工厂 2017 年至 2019 年各产量的百分比堆积图（例如 2017 年该工厂口罩、抽纸、棉签产量分别占 40%、27%、33%），根据该图，以下结论一定正确的是（ ）



- A. 2019 年该工厂的棉签产量最少
B. 这三年中每年抽纸的产量相差不明显
C. 三年累计下来产量最多的是口罩
D. 口罩的产量逐年增加

3. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，若点 F_2 关于双曲线渐近线的对称点 A 满足

$\angle F_1AO = \angle AOF_1$ (O 为坐标原点)，则双曲线的渐近线方程为（ ）

- A. $y = \pm 2x$ B. $y = \pm \sqrt{3}x$ C. $y = \pm \sqrt{2}x$ D. $y = \pm x$

4. 已知集合 $A = \{1, 3, \sqrt{m}\}$, $B = \{1, m\}$, 若 $A \cup B = A$, 则 $m =$ ()

- A. 0 或 $\sqrt{3}$ B. 0 或 3 C. 1 或 $\sqrt{3}$ D. 1 或 3

5. 从 5 名学生中选出 4 名分别参加数学，物理，化学，生物四科竞赛，其中甲不能参加生物竞赛，则不同的参赛方案种数为

- A. 48 B. 72 C. 90 D. 96

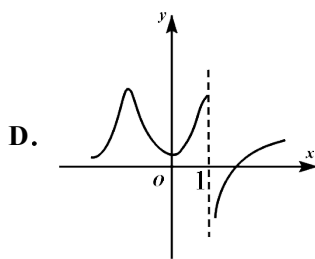
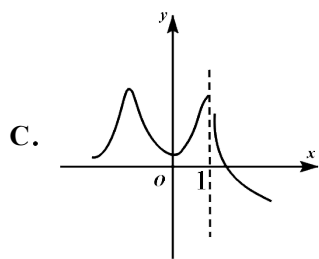
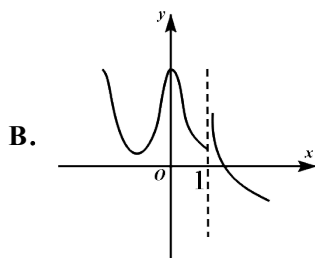
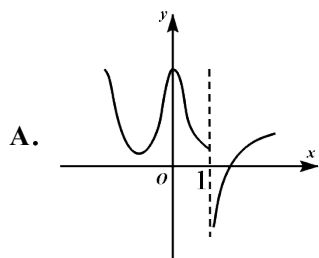
6. 将函数 $y = 2\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) - 1$ 的图像向左平移 $m (m > 0)$ 个单位长度后, 得到的图像关于坐标原点对称, 则 m 的最小值为 ()

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. π

7. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_{13} = 0$, $a_3 + a_4 = 21$, 则 S_7 的值为 ().

- A. 21 B. 63 C. 13 D. 84

8. 函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(x - \frac{1}{x}), & x > 1, \\ e^{\cos \pi x}, & x \leq 1 \end{cases}$ 的图象大致是 ()



9. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \phi) (\omega > 0, 0 < \phi < \frac{\pi}{3})$ 满足 $f(x + \pi) = f(x)$, $f(\frac{\pi}{12}) = 1$, 则 $f(-\frac{\pi}{12})$ 等于 ()

- A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

10. 设 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点, O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 交于 P 、

Q 两点. 若 $|PQ| = |OF|$, 则 C 的离心率为

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$
C. 2 D. $\sqrt{5}$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, $AB = 3$, $AC = 4$, 点 M 满足 $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MC}$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ 等于 ()

- A. 10 B. 9 C. 8 D. 7

12. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, A, B 是 C 的左、右顶点, 点 P 在过 F_1 且斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

的直线上, $\triangle PAB$ 为等腰三角形, $\angle ABP = 120^\circ$, 则 C 的渐近线方程为 ()

- A. $y = \pm \frac{1}{2}x$ B. $y = \pm 2x$ C. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ D. $y = \pm \sqrt{3}x$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 将含有甲、乙、丙的 6 人平均分成两组参加“文明交通”志愿者活动, 其中一组指挥交通, 一组分发宣传资料, 则甲、乙至少一人参加指挥交通且甲、丙不在同一个组的概率为_____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=3$, $b=2\sqrt{6}$, $B=2A$, 则 $\cos A =$ _____.

15. 在正奇数非减数列 $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, \dots\}$ 中, 每个正奇数 k 出现 k 次. 已知存在整数 b, c, d , 对所有的整数 n 满足 $a_n = b \left[\sqrt{n+c} \right] + d$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 则 $b+c+d$ 等于_____.

16. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过点 F 且斜率为 1 的直线 l 交抛物线 C 于 M, N 两点, $b = \frac{|MF| + |NF|}{2}$,

若线段 MN 的垂直平分线与 x 轴交点的横坐标为 a , 则 $a-b$ 的值为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - ae^x - 2a^2x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

18. (12 分) 某机构组织的家庭教育活动上有一个游戏, 每次由一个小孩与其一位家长参与, 测试家长对小孩饮食习惯的了解程度. 在每一轮游戏中, 主持人给出 A, B, C, D 四种食物, 要求小孩根据自己的喜爱程度对其排序, 然后由家长猜测小孩的排序结果. 设小孩对四种食物排除的序号依次为 $x_A x_B x_C x_D$, 家长猜测的序号依次为 $y_A y_B y_C y_D$, 其中 $x_A x_B x_C x_D$ 和 $y_A y_B y_C y_D$ 都是 1, 2, 3, 4 四个数字的一种排列. 定义随机变量 $X = (x_A - y_A)^2 + (x_B - y_B)^2 + (x_C - y_C)^2 + (x_D - y_D)^2$, 用 X 来衡量家长对小孩饮食习惯的了解程度.

(1) 若参与游戏的家长对小孩的饮食习惯完全不了解.

(i) 求他们在一轮游戏中, 对四种食物排出的序号完全不同的概率;

(ii) 求 X 的分布列 (简要说明方法, 不用写出详细计算过程);

(2) 若有一组小孩和家长进行来三轮游戏, 三轮的结果都满足 $X < 4$, 请判断这位家长对小孩饮食习惯是否了解, 说明理由.

19. (12 分) 在 $\triangle ABC$, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $\cos B + (\cos A - 2\sin A)\cos C = 0$.

(1) 求 $\cos C$ 的值;

(2) 若 $a = \sqrt{5}$, AC 边上的中线 $BM = \frac{\sqrt{17}}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln x$.

(1) 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, 求函数 $g(x)$ 的单调区间, 并证明函数 $g(x)$ 有唯一零点.

(2) 若函数 $h(x) = e^x - af(x-1)$ 在区间 $(1, 1+e^{-a})$ 上不单调, 证明: $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} > a$.

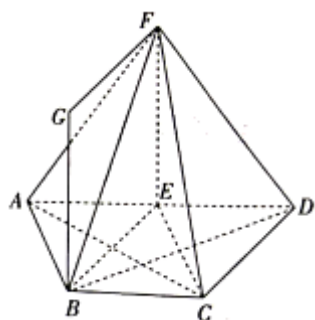
21. (12 分) 已知函数 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = \frac{-x^2 + ax - 3}{2}$,

(1) 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 对任意 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \geq g(x)$ 都有恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(3) 证明: 对一切 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $\ln x > \frac{1}{e^x} - \frac{2}{ex}$ 成立.

22. (10 分) 如图, 底面 $ABCD$ 是等腰梯形, $AD \parallel BC$, $AD = 2AB = 2BC = 4$, 点 E 为 AD 的中点, 以 BE 为边作正方形 $BEFG$, 且平面 $BEFG \perp$ 平面 $ABCD$.



(1) 证明: 平面 $ACF \perp$ 平面 $BEFG$.

(2) 求二面角 $A-BF-D$ 的正弦值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、A

【解析】

试题分析：由题意可得： $\frac{1-i}{2-i} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$. 共轭复数为 $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$ ，故选 A.

考点：1.复数的除法运算;2.以及复平面上的点与复数的关系

2、C

【解析】

根据该厂每年产量未知可判断 A、B、D 选项的正误，根据每年口罩在该厂的产量中所占的比重最大可判断 C 选项的正误.综合可得出结论.

【详解】

由于该工厂 2017 年至 2019 年的产量未知，所以，从 2017 年至 2019 年棉签产量、抽纸产量以及口罩产量的变化无法比较，故 A、B、D 选项错误；

由堆积图可知，从 2017 年至 2019 年，该工厂生产的口罩占该工厂的总产量的比重是最大的，则三年累计下来产量最多的是口罩，C 选项正确.

故选：C.

【点睛】

本题考查堆积图的应用，考查数据处理能力，属于基础题.

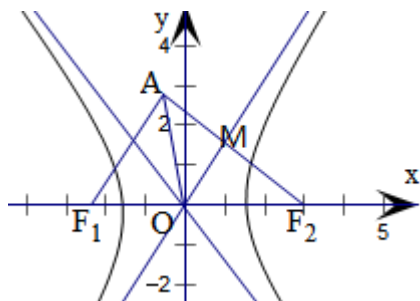
3、B

【解析】

先利用对称得 $AF_2 \perp OM$ ，根据 $\angle F_1AO = \angle AOF_1$ 可得 $AF_1 = c$ ，由几何性质可得 $\angle AF_1O = 60^\circ$ ，即 $\angle MOF_2 = 60^\circ$ ，从而解得渐近线方程.

【详解】

如图所示：



由对称性可得： M 为 AF_2 的中点，且 $AF_2 \perp OM$ ，

所以 $F_1A \perp AF_2$ ，

因为 $\angle F_1AO = \angle AOF_1$ ，所以 $AF_1 = F_1O = c$ ，

故而由几何性质可得 $\angle AF_1O = 60^\circ$ ，即 $\angle MOF_2 = 60^\circ$ ，

故渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$,

故选 B.

【点睛】

本题考查了点关于直线对称点的知识,考查了双曲线渐近线方程,由题意得出 $\angle MOF_2 = 60^\circ$ 是解题的关键,属于中档题.

4、B

【解析】

因为 $A \cup B = A$, 所以 $B \subseteq A$, 所以 $m = 3$ 或 $m = \sqrt{m}$.

若 $m = 3$, 则 $A = \{1, 3, \sqrt{3}\}$, $B = \{1, 3\}$, 满足 $A \cup B = A$.

若 $m = \sqrt{m}$, 解得 $m = 0$ 或 $m = 1$. 若 $m = 0$, 则 $A = \{1, 3, 0\}$, $B = \{1, 3, 0\}$, 满足 $A \cup B = A$. 若 $m = 1$,

$A = \{1, 3, 1\}$, $B = \{1, 1\}$ 显然不成立, 综上 $m = 0$ 或 $m = 3$, 选 B.

5、D

【解析】

因甲不参加生物竞赛, 则安排甲参加另外 3 场比赛或甲学生不参加任何比赛

①当甲参加另外 3 场比赛时, 共有 $C_3^1 \cdot A_4^3 = 72$ 种选择方案; ②当甲学生不参加任何比赛时, 共有 $A_4^4 = 24$ 种选择方

案. 综上所述, 所有参赛方案有 $72 + 24 = 96$ 种

故答案为: 96

点睛: 本题以选择学生参加比赛为载体, 考查了分类计数原理、排列数与组合数公式等知识, 属于基础题.

6、B

【解析】

由余弦的二倍角公式化简函数为 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, 要想在括号内构造 $\frac{\pi}{2}$ 变为正弦函数, 至少需要向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位

长度, 即为答案.

【详解】

由题可知, $y = 2\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) - 1 = \cos\left[2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right] = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 对其向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后,

$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, 其图像关于坐标原点对称

故 m 的最小值为 $\frac{\pi}{4}$

故选：B

【点睛】

本题考查三角函数图象性质与平移变换，还考查了余弦的二倍角公式逆运用，属于简单题.

7、B

【解析】

由已知结合等差数列的通项公式及求和公式可求 d ， a_1 ，然后结合等差数列的求和公式即可求解.

【详解】

解：因为 $S_{13} = 0$ ， $a_3 + a_4 = 21$ ，

所以 $\begin{cases} 13a_1 + 13 \times 6d = 0 \\ 2a_1 + 5d = 21 \end{cases}$ ，解可得， $d = -3$ ， $a_1 = 18$ ，

则 $S_7 = 7 \times 18 + \frac{1}{2} \times 7 \times 6 \times (-3) = 63$.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查等差数列的通项公式及求和公式的简单应用，属于基础题.

8、A

【解析】

根据复合函数的单调性，同增异减以及采用排除法，可得结果.

【详解】

当 $x > 1$ 时， $f(x) = \ln(x - \frac{1}{x})$ ，

由 $y = -\frac{1}{x}$ ， $y = x$ 在 $(1, +\infty)$ 递增，

所以 $t = x - \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 递增

又 $y = \ln t$ 是增函数，

所以 $f(x) = \ln(x - \frac{1}{x})$ 在 $(1, +\infty)$ 递增，故排除 B、C

当 $x \leq 1$ 时 $f(x) = e^{\cos \pi x}$ ，若 $x \in (0, 1)$ ，则 $\pi x \in (0, \pi)$

所以 $t = \cos \pi x$ 在 $(0, 1)$ 递减，而 $y = e^t$ 是增函数

所以 $f(x) = e^{\cos \pi x}$ 在 $(0,1)$ 递减, 所以 A 正确, D 错误

故选: A

【点睛】

本题考查具体函数的大致图象的判断, 关键在于对复合函数单调性的理解, 记住常用的结论: 增+增=增, 增-减=增, 减+减=减, 复合函数单调性同增异减, 属中档题.

9、C

【解析】

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 可得 $nT = \pi, n \in \mathbf{N}^*$, 则 $\omega = 2n, n \in \mathbf{N}^*$, 再根据 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1$ 得

$\phi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - n \cdot \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}^*$, 又 $0 < \phi < \frac{\pi}{3}$, 则可求出 $n - 12k = 2$, 进而可得 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)$.

【详解】

解: 设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 因为 $f(x + \pi) = f(x)$,

所以 $nT = \pi, n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $T = \frac{\pi}{n} = \frac{2\pi}{\omega}, n \in \mathbf{N}^*$,

所以 $\omega = 2n, n \in \mathbf{N}^*$,

又 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1$, 所以当 $x = \frac{\pi}{12}$ 时, $\omega x + \phi = n \cdot \frac{\pi}{6} + \phi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

$\therefore \phi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - n \cdot \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}^*$, 因为 $0 < \phi < \frac{\pi}{3}$

$\therefore 0 < \frac{\pi}{2} + 2k\pi - n \cdot \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}$,

整理得 $1 < n - 12k < 3$, 因为 $n - 12k \in \mathbf{Z}$,

$\therefore n - 12k = 2$,

$\therefore \phi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - (2 + 12k) \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, 则 $n \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\therefore \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

所以 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left[2n \cdot \left(-\frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \sin\left(-\frac{n\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)$
 $= \sin\left(-\frac{\pi}{3} - 2k\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

故选: C.

【点睛】

本题考查三角形函数的周期性和对称性，考查学生分析能力和计算能力，是一道难度较大的题目。

10、A

【解析】

准确画图，由图形对称性得出 P 点坐标，代入圆的方程得到 c 与 a 关系，可求双曲线的离心率。

【详解】

设 PQ 与 x 轴交于点 A，由对称性可知 $PQ \perp x$ 轴，

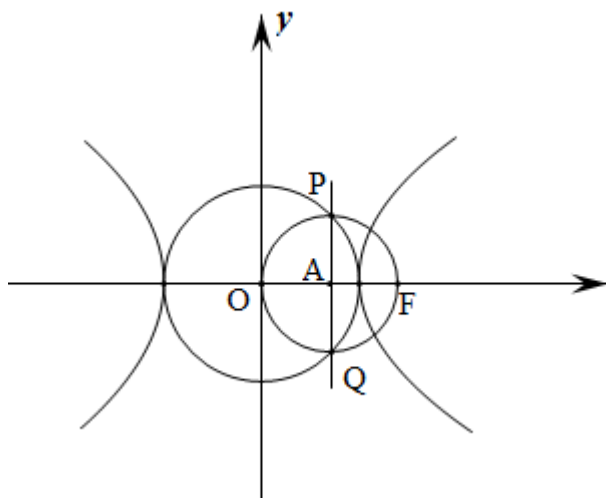
又 $Q|PQ| = |OF| = c$ ， $\therefore |PA| = \frac{c}{2}$ ， $\therefore PA$ 为以 OF 为直径的圆的半径，

$\therefore A$ 为圆心 $|OA| = \frac{c}{2}$ 。

$\therefore P\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right)$ ，又 P 点在圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 上，

$\therefore \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4} = a^2$ ，即 $\frac{c^2}{2} = a^2$ ， $\therefore e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 2$ 。

$\therefore e = \sqrt{2}$ ，故选 A。



【点睛】

本题为圆锥曲线离心率的求解，难度适中，审题时注意半径还是直径，优先考虑几何法，避免代数法从头至尾，运算繁琐，准确率大大降低，双曲线离心率问题是圆锥曲线中的重点问题，需强化练习，才能在解决此类问题时事半功倍，信手拈来。

11、D

【解析】

利用已知条件，表示出向量 $\overrightarrow{AM}$ ，然后求解向量的数量积。

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/775012341203011131>