专题34 两条直线的位置关系

【考点预测】

知识点一：两直线平行与垂直的判定

两条直线平行与垂直的判定以表格形式出现，如表所示.

两直线方程	平行	垂直
$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$	$A_1B_2-A_2B_1=0$且 $B_1C_2-B_2C_1\neq 0$	$A_1A_2+B_1B_2=0$
$l_1: y=k_1x+b_1$ $l_2: y=k_2x+b_2$（斜率存在） $l_1: x=x_1$, $l_2: x=x_2$（斜率不存在）	$k_1=k_2,b_1\neq b_2$或 $x=x_1,x=x_2,x_1\neq x_2$	$k_1 g k_2=-1$或k_1与k_2中有一个为0，另一个不存在.

知识点二：三种距离

1．两点间的距离

平面上两点$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$的距离公式为$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

特别地，原点O（0，0）与任一点P（x，y）的距离$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$.

2．点到直线的距离

点$P_0(x_0,y_0)$到直线$l: Ax+By+C=0$的距离$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

特别地，若直线为l：$x=m$，则点$P_0(x_0,y_0)$到l的距离$d=|m-x_0|$；若直线为l：$y=n$，则点$P_0(x_0,y_0)$到l的距离$d=|n-y_0|$

3．两条平行线间的距离

已知l_1,l_2是两条平行线，求l_1,l_2间距离的方法：

（1）转化为其中一条直线上的特殊点到另一条直线的距离.

（2）设$l_1: Ax+By+C_1=0,l_2: Ax+By+C_2=0$，则$l_1$与$l_2$之间的距离$d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

注：两平行直线方程中，x，y前面对应系数要相等.

4．双根式

双根式$f(x)=\sqrt{a_1x^2+b_1x+c_1}\pm\sqrt{a_2x^2+b_2x+c_2}$型函数求解，首先想到两点间的距离，或者利用单调性求解.

【方法技巧与总结】

1．点关于点对称

点关于点对称的本质是中点坐标公式：设点$P(x_1，y_1)$关于点$Q(x_0，y_0)$的对称点为$P'(x_2，y_2)$

，则根据中点坐标公式，有$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y_0 = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$

可得对称点$P'(x_2，y_2)$的坐标为$(2x_0 - x_1，2y_0 - y_1)$

2．点关于直线对称

点$P(x_1，y_1)$关于直线$l: Ax + By + C = 0$对称的点为$P'(x_2，y_2)$，连接PP'，交l于M点，则l垂直平分PP'，所以$PP' \perp l$，且M为PP'中点，又因为M在直线l上，故可得$\begin{cases} k_l \cdot k_{PP'} = -1 \\ A\dfrac{x_1 + x_2}{2} + B\dfrac{y_1 + y_2}{2} + C = 0 \end{cases}$，解出$(x_2，y_2)$即可．

3．直线关于点对称

法一：在已知直线上取两点，利用中点坐标公式求出它们关于已知点对称的两点坐标，再由两点式求出直线方程；

法二：求出一个对称点，再利用两对称直线平行，由点斜式得到所求直线方程．

4．直线关于直线对称

求直线$l_1: ax + by + c = 0$，关于直线$l_2: dx + ey + f = 0$（两直线不平行）的对称直线l_3

第一步：联立l_1，l_2算出交点$P(x_0，y_0)$

第二步：在l_1上任找一点（非交点）$Q(x_1，y_1)$，利用点关于直线对称的秒杀公式算出对称点$Q'(x_2，y_2)$

第三步：利用两点式写出l_3方程

5．常见的一些特殊的对称

点$(x，y)$关于x轴的对称点为$(x，-y)$，关于y轴的对称点为$(-x，y)$．

点$(x，y)$关于直线$y = x$的对称点为$(y，x)$，关于直线$y = -x$的对称点为$(-y，-x)$．

点$(x，y)$关于直线$x = a$的对称点为$(2a - x，y)$，关于直线$y = b$的对称点为$(x，2b - y)$．

点$(x，y)$关于点$(a，b)$的对称点为$(2a - x，2b - y)$．

点$(x，y)$关于直线$x + y = k$的对称点为$(k - y，k - x)$，关于直线$x - y = k$的对称点为$(k + y，x - k)$．

6．过定点直线系

过已知点$P(x_0，y_0)$的直线系方程$y - y_0 = k(x - x_0)$（k为参数）．

7．斜率为定值直线系

斜率为k的直线系方程$y = kx + b$（b是参数）．

8．平行直线系

与已知直线$Ax + By + C = 0$平行的直线系方程$Ax + By + \lambda = 0$（λ为参数）．

9．**垂直直线系**

与已知直线 $Ax+By+C=0$ 垂直的直线系方程 $Bx-Ay+\lambda=0$（λ 为参数）.

10．**过两直线交点的直线系**

过直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点的直线系方程：

$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$（$\lambda$ 为参数）.

【题型归纳目录】

题型一：两直线位置关系的判定

题型二：有关距离的计算

题型三：有关距离的最值问题

题型四：点点对称

题型五：点线对称

题型六：线点对称

题型七：线线对称

题型八：直线系方程

【典例例题】

题型一：两直线位置关系的判定

例 1．（2023·全国·高三专题练习（文））已知直线 l_1：$x+ay-1=0$，l_2：$(a+2)x+3y-3a=0$，则“$a=-3$”是“$l_1//l_2$”的（　　）

A．充分不必要条件　　*B*．必要不充分条件

C．充分必要条件　　*D*．既不充分也不必要条件

例 2．（2023·全国·高三专题练习（文））已知 $a^2-3a+2=0$，则直线 l_1：$ax+(3-a)y-a=0$ 和直线 l_2：$(6-2a)x+(3a-5)y-4+a=0$ 的位置关系为（　　）

A．垂直或平行　　*B*．垂直或相交

C．平行或相交　　*D*．垂直或重合

例 3．（2023·全国·高三专题练习）已知 $l_1:3x+2ay-5=0$，$l_2:(3a-1)x-ay-2=0$，则满足 $l_1 // l_2$ 的 a 的值是（　　）

A．$-\frac{1}{6}$　　*B*．0　　*C*．$-\frac{1}{6}$ 或 0　　*D*．$\frac{1}{6}$ 或 0

例 4．（2023·重庆巴蜀中学高三阶段练习）已知直线 $ax+2y+6=0$ 与直线 $x+(a-1)y+a^2-1=0$ 互相平行，则实数 a 的值为（　　）

A．-2　　　　B．2 或 -1　　　　C．2　　　　D．-1

例 5．（多选题）（2023·全国·高三专题练习）瑞士数学家欧拉（*Euler*）在 1765 年在其所著作的《三角形的几何学》一书中提出：三角形的外心（中垂线的交点）、重心（中线的交点）、垂心（高的交点）在同一条直线上，后来，人们把这条直线称为欧拉线．若$\triangle ABC$的顶点 A（－4，0），B（0，4），其欧拉线方程为 $x-y+2=0$，则下列说法正确的是（　　）

A．$\triangle ABC$的外心为（－1，1）　　　　B．$\triangle ABC$的顶点 C 的坐标可能为（－2，0）

C．$\triangle ABC$的垂心坐标可能为（－2，0）　D．$\triangle ABC$的重心坐标可能为$\left(-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$

例 6．（2023·全国·高三专题练习（理））直线 $x+my-2=0$ 和直线 $mx-(2m-1)y=0$ 垂直，则实数 $m=$ __________．

例 7．（2023·全国·高三专题练习）“$m=2$”是“直线 $2x+\left(m+1\right)y+4=0$ 与直线 $3x-my-2=0$ 垂直”的（　　）

A．充分必要条件　　　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　　　D．既不充分也不必要条件

例 8．（2023·全国·高三专题练习）直线 $2ax+y-2=0$ 与直线 $x-(a^2-3)y+2=0$ 互相垂直，且两直线交点位于第三象限，则实数 a 的值为（　　）

A．1　　　　B．3　　　　C．－1　　　　D．－3

【方法技巧与总结】

判断两直线的位置关系可以从斜率是否存在分类判断，也可以按照以下方法判断：一般地，设 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$（A_1,B_1 不全为 0），$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$（A_2,B_2 不全为 0），则：

当 $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$ 时，直线 l_1,l_2 相交；

当 $A_1B_2=A_2B_1$ 时，l_1,l_2 直线平行或重合，代回检验；

当 $A_1A_2-B_1B_2=0$ 时，l_1,l_2 直线垂直，与向量的平行与垂直类比记忆．

题型二：有关距离的计算

例 9．（2023·全国·高三专题练习）在平面直角坐标系中，原点 $\left(0,0\right)$ 到直线 $x+y-2=0$ 的距离等于（　　）

A．1　　　　B．$\sqrt{2}$　　　　C．$\sqrt{3}$　　　　D．3

例 10．（2023·吉林市教育学院模拟预测（理））已知 $A(-2,0),B(4,a)$ 两点到直线 $l:3x-4y+1=0$

的距离相等，则$a=$（　　）

A．2　　B．$\frac{9}{2}$　　C．2或-8　　D．2或$\frac{9}{2}$

例11．（2023·福建·晋江市第一中学高二阶段练习）直线l过点$P(1,2)$，且$A(2,3)$、$B(4,-5)$到l的距离相等，则直线l的方程是（　　）

A．$4x+y-6=0$　　B．$x+4y-6=0$

C．$3x+2y-7=0$或$4x+y-6=0$　　D．$3x+2y-7=0$或$x+4y-6=0$

例12．（2023·全国·高二课时练习）已知$\triangle ABC$的三个顶点坐标是$A(1,-1)$，$B(-1,3)$，$C(3,0)$．则$\triangle ABC$的形状为______；$\triangle ABC$的面积为______．

例13．（2023·全国·高二专题练习）已知$\triangle ABC$的顶点为$A(2,1),B(-2,3),C(0,-1)$，则AC边上的中线长为____．

例14．（2016·天津市红桥区教师发展中心高二期中（文））已知点$A(-1,3)$，$B(2,6)$，若在x轴上存在一点P满足$|PA|=|PB|$，则点P的坐标为__________．

例15．（2023·全国·高三专题练习）已知直线$3x+y-3=0$和$6x+my+1=0$互相平行，则它们之间的距离是（　　）

A．4　　B．$\frac{\sqrt{10}}{20}$　　C．$\frac{\sqrt{10}}{4}$　　D．$\frac{7\sqrt{10}}{20}$

例16．（2023·江苏·高二）若两条平行线$3x-4y+m=0$与$3x-4y+1=0$之间的距离是2，则m的值为（　　）

A．-9或11　　B．-8或10

C．-7或12　　D．-8或11

【方法技巧与总结】

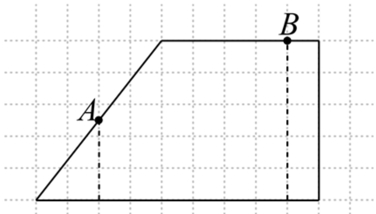
两点间的距离，点到直线的距离以及两平行直线间的距离的计算，特别注意点到直线距离公式的结构．

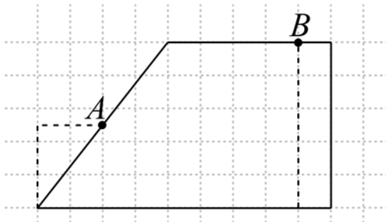
题型三：有关距离的最值问题

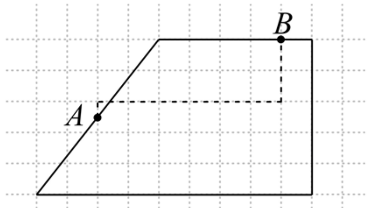
例17．（2023·全国·高三专题练习）已知直线l_1：$x-y+2=0$，l_2：$x-y-2=0$，直线l_3垂直于l_1，l_2，且垂足分别为A，B，若$C(-4,0)$，$D(4,0)$，则$|CA|+|AB|+|BD|$的最小值为（　　）

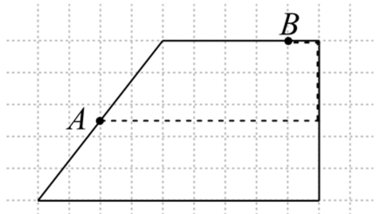
A．$\sqrt{10}+2\sqrt{2}$　　B．$8+\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{10}+2\sqrt{2}$　　D．8

例 18．（2023·全国·高三专题练习）“曼哈顿距离”也叫“出租车距离”，是19世纪德国犹太人数学家赫尔曼·闵可夫斯基首先提出来的名词，用来表示两个点在标准坐标系上的绝对轴距总和，即在直角坐标平面内，若$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，则A，B两点的“曼哈顿距离”为$\left|x_2-x_1\right|+\left|y_2-y_1\right|$，下列直角梯形中的虚线可以作为A，$B$两点的“曼哈顿距离”是（　　）

A．

B．

C．

D．

例 19．（2023·广东潮州·二模）唐代诗人李颀的诗《古从军行》开头两句说：“白日登山望烽火，黄昏饮马傍交河．”诗中隐含着一个有趣的数学问题——“将军饮马”问题，即将军在观望烽火之后从山脚下某处出发，先到河边饮马后再回到军营，怎样走才能使总路程最短？在平面直角坐标系中，设军营所在位置为$B\left(3,4\right)$，若将军从点$A\left(-2,0\right)$处出发，河岸线所在直线方程为$y=x$，则“将军饮马”的最短总路程为（　　）．

A．5　　　　*B*．$3\sqrt{5}$　　　　*C*．45　　　　*D*．$5\sqrt{3}$

例 20．（2023·上海虹口·高二期末）已知点$M(a,b)$在直线$5x-12y+26=0$上，则$\sqrt{a^2+b^2}$的最小值为________.

例 21．（2023·全国·高三专题练习）记$Z=(x-y)^2+(\frac{2}{x}+\frac{y}{2})^2(x\neq 0$，$x$，$y\in R)$，则$Z$的最小值是___________.

例 22．（2023·全国·高三专题练习）求函数$y=\sqrt{x^2-8x+17}+\sqrt{x^2+4}$的最小值为___________.

例 23．（2023·全国·高三专题练习（文））已知点$A\left(5,0\right)$，$B\left(0,4\right)$，动点P，Q分别在直线$y=x+2$和$y=x$上，且PQ与两直线垂直，则$\left|AQ\right|+\left|QP\right|+\left|PB\right|$的最小值为___________.

例 24．（2023·上海·复旦附中青浦分校高三开学考试）已知二元函数

$f\left(x,y\right)=\sqrt{x^{2}+y^{2}}+\sqrt{x^{2}+\left(y-a\right)^{2}}+\sqrt{\left(x-a\right)^{2}+y^{2}}\left(a>0\right)$的最小值为$\sqrt{2}+\sqrt{6}$，则正实数$a$的值为

________________．

例 25．（2023·全国·高三专题练习）唐代诗人李颀的诗《古从军行》开头两句诗说："百日登山望烽火，黄昏饮马傍交河．"诗中隐含着一个有趣的数学问题——"将军饮马"问题．即将军在观望烽火之后从山脚下某处出发，先到河边饮马后再回到军营，怎样走才能使总路程最短？在平面直角坐标系中，设军营所在区域为$x^{2}+y^{2}\leq 1$．若将军从点$A(2,0)$处出发，河岸线所在直线方程为$x+y=3$，并假定将军只要到达军营所在区域即回到军营，则"将军饮马"的最短路程为________．

例 26．（2023·河北石家庄·高三阶段练习）在平面直角坐标系中，已知点$A(2,1)$，点P,Q分别为直线$y=x$和$y=0$上动点，则$\triangle APQ$周长的最小值为_________．

例 27．（2023·全国·高三专题练习）已知点$A(1,2)$和点$B(2,4)$，P是直线$x-y=0$上的一点，则$|PA|+|PB|$的最小值是__________．

例 28．（2023·浙江·高三专题练习）已知圆$C_{1}:\left(x-1\right)^{2}+\left(y+1\right)^{2}=1$，圆$C_{2}:\left(x-4\right)^{2}+\left(y-5\right)^{2}=9$，点$M$、$N$分别是圆$C_{1}$、圆$C_{2}$上的动点，点$P$为$x$轴上的动点，则$|PN|-|PM|$的最大值是（　　）

A．$3\sqrt{5}+4$　　*B*．9　　*C*．7　　*D*．$3\sqrt{5}+2$

例 29．（2023·全国·高三专题练习）数学家华罗庚曾说："数缺形时少直观，形少数时难入微．"事实上，很多代数问题可以转化为几何问题加以解决．例如，与$\sqrt{(x-a)^{2}+(y-b)^{2}}$相关的代数问题，可以转化为点$A\left(x,y\right)$与点$B\left(a,b\right)$之间的距离的几何问题．结合上述观点，对于函数

$f\left(x\right)=\sqrt{x^{2}+2x+2}+\sqrt{x^{2}-2x+2}$，$f\left(x\right)$的最小值为（　　）

A．$2\sqrt{2}$　　*B*．$2\sqrt{3}$　　*C*．$2\sqrt{5}$　　*D*．2

例 30．（2023·浙江省杭州学军中学高二期末）原点到直线$l:\left(3+2\lambda\right)x+\left(4+\lambda\right)y+2\lambda-2=0$的距离的最大值为（　　）

A．$\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$　　*B*．$\dfrac{2}{5}$　　*C*．$2\sqrt{2}$　　*D*．$\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$

例 31．（2023·全国·高二）设$m\in R$，过定点A的动直线$x+my-1=0$和过定点B的动直线

$mx-y-2m+3=0$ 交于点 $P(x,y)$，则 $|PA|+|PB|$ 的最大值为（　　）

A．$2\sqrt{5}$　　　*B*．6　　　*C*．3　　　*D*．$3\sqrt{2}$

例 32．（多选题）（2023·重庆·模拟预测）“出租车几何”或“曼哈顿距离”（*ManhattanDistance*）是由十九世纪的赫尔曼·闵可夫斯基所创词汇，是种被使用在几何度量空间的几何学用语．在平面直角坐标系 xOy 内，对于任意两点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，定义它们之间的“欧几里得距离” $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，“曼哈顿距离”为 $\|AB\|=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$，则下列说法正确的是（　　）

A．若点 P 为线段 $x+y=3(x,y\geq 0)$ 上任意一点，则 $\|OP\|$ 为定值

B．对于平面上任意一点 P，若 $\|OP\|=2$，则动点 P 的轨迹长度为 4π

C．对于平面上任意三点 A、B、C，都有 $\|AB\|\leq\|AC\|+\|BC\|$

D．若 A、B 为椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上的两个动点，则 $\|AB\|$ 最大值为 $2\sqrt{3}$

例 33．（2023·全国·高三专题练习）已知直线 *l*：3*x*－*y*－1＝0 及点 *A*（4，1），*B*（0，4），*C*（2，0）．

（1）试在 *l* 上求一点 *P*，使|*AP*|＋|*CP*|最小；

（2）试在 *l* 上求一点 *Q*，使|*AQ*|－|*BQ*|最大．

例 34．（多选题）（2023·湖北·十堰市教育科学研究院高三期末）“曼哈顿距离”是由赫尔曼·闵可夫斯基所创的词汇，是一种使用在几何度量空间的几何学用语．在平面直角坐标系中，点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 的曼哈顿距离为 $L_{PQ}=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$．若点 $P(-2,1)$，Q 是圆 $M:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上任意一点，则 L_{PQ} 的取值可能为（　　）

A．4　　　*B*．3　　　*C*．2　　　*D*．1

例 35．（多选题）（2023·全国·高三专题练习）已知圆 C_1：$(x+6)^2+(y-5)^2=4$，圆 C_2：$(x-2)^2+(y-1)^2=1$，*M*，*N* 分别为圆 C_1 和 C_2 上的动点，*P* 为 *x* 轴上的动点，则|*PM*|＋|*PN*|的值可以是（　　）

A．6　　　*B*．7　　　*C*．10　　　*D*．15

【方法技巧与总结】

数学结合，利用距离的几何意义进行转化．

题型四：点点对称

例 36．（2023·全国·高二）过点 $P(-1,2)$ 的直线 l 与 x 轴、y 轴分别交于 A,B 两点，且 P 恰好是 AB 的中点，则 AB 的斜率为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　　　B．$-\frac{1}{2}$　　　　C．-2　　　　D．2

例37．（2023·全国·高二课时练习）已知$A\left(a,6\right)$，$B\left(-2,b\right)$，点$P\left(2,3\right)$是线段AB的中点，则$a+b=$______．

例38．（2023·内蒙古包头·高一期末）直线l被直线$l_1:2x+y-1=0$和$l_2:x+2y+5=0$所截得的线段中点恰为坐标原点，则直线l的方程为______．

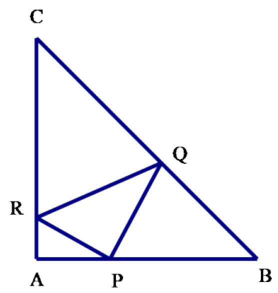
例39．（2023·海南·高二期末）已知点$P(a,2)$，$Q(-3,b)$，其中$a,b\in\mathbf{R}$，若线段PQ的中点坐标为$(2,0)$，则直线PQ的方程为________．

【方法技巧与总结】

求点$P(x_1,y_1)$关于点$M(x_0,y_0)$中心对称的点$P'(x_2,y_2)$，由中点坐标公式得$\begin{cases}x_2=2x_0-x_1\\y_2=2y_0-y_1\end{cases}$

题型五：点线对称

例40．（2023·江西省峡江中学高二期中（理））在等腰直角三角形ABC中，点P是边AB异于A、B的一点．光线从点P出发，经过BC、CA反射后又回到点P（如图）．若光线QR经过ΔABC的重心，且$AB=AC=4$, 则$AP=$_________



例41．（2023·全国·高三专题练习）在平面直角坐标系xOy中，点（0，4）关于直线$x-y+1=0$的对称点为（　　）

A．（－1，2）　　B．（2，－1）　　C．（1，3）　　D．（3，1）

例42．（2023·全国·高三专题练习）已知A（4，－3）关于直线l的对称点为B（－2，5），则直线l的方程是（　　）

A．$3x+4y-7=0$　　　　B．$3x-4y+1=0$

C．$4x+3y-7=0$　　　　D．$3x+4y-1=0$

例 43．（2023·全国·高三专题练习）已知直线 l：$kx-y+1+2k=0(k\in R)$，一条光线经直线的定点 T 射入，先后被 x 轴、$x+y=0$ 反射回 T 点，求光线在这个过程中走过的路程．

例 44．（2023·全国·高三专题练习）已知直线 l：$2x-3y+1=0$，点 A（-1，-2），求点 A 关于直线 l 的对称点 A'的坐标．

【方法技巧与总结】

求点 $P(x_1,y_1)$ 关于直线 l_0 对称的点 $P'(x_2,y_2)$

方法一：（一中一垂），即线段 PP' 的中点 M 在对称轴 l_0 上，若直线 PP' 的斜率存在，则直线 PP' 的斜率与对称轴 l_0 的斜率之积为-1，两个条件建立方程组解得点 $P'(x_2,y_2)$

方法二：先求经过点 $P(x_1,y_1)$ 且垂直于对称轴 l_0 的直线（法线）l_0'，然后由 $l_0\cap l_0'=M$ 得线段 PP' 的中点 $M(x_0,y_0)$，从而得 $\begin{cases}x_2=2x_0-x_1\\y_2=2y_0-y_1\end{cases}$

题型六：线点对称

例 45．（2023·全国·高三专题练习）直线 $3x-2y=0$ 关于点 $\left(\frac{1}{3},0\right)$ 对称的直线方程（　　）

A．$2x-3y=0$　　　　*B*．$3x-2y-2=0$

C．$x-y=0$　　　　*D*．$2x-3y-2=0$

例 46．（2023·全国·高三专题练习）点 $P(1,2)$ 在直线 l 上，直线 l_1 与 l 关于点 $(0,1)$ 对称，则一定在直线 l_1 上的点为（ ）

A．$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$　　*B*．$\left(-1,\frac{3}{2}\right)$　　*C*．$(-1,0)$　　*D*．$\left(\frac{1}{2},0\right)$

例 47．（2023·全国·高三专题练习）直线 $ax+y+3a-1=0$ 恒过定点 M，则直线 $2x+3y-6=0$ 关于 M 点对称的直线方程为_________．

例 48．（2023·全国·高三专题练习）直线 $2x+3y-6=0$ 关于点 $(-1,2)$ 对称的直线方程是（　　）

A．$3x-2y-10=0$　　　　*B*．$3x-2y-23=0$

C．$2x+3y-4=0$　　　　*D*．$2x+3y-2=0$

【方法技巧与总结】

求直线 l 关于点 $M(x_0,y_0)$ 中心对称的直线 l'

求解方法是：在已知直线 l 上取一点 $P(x_1,y_1)$ 关于点 $M(x_0,y_0)$ 中心对称得 $P'(x_2,y_2)$，再利用 $l//l'$

，由点斜式方程求得直线l'的方程（或者由$l//l'$，且点$M(x_0,y_0)$到直线l及l'的距离相等来求解）．

题型七：线线对称

例49．（2023·全国·高三专题练习）已知直线$l_1:x-y+3=0$，直线$l:x-y-1=0$，若直线l_1关于直线l的对称直线为l_2，则直线l_2的方程为______________．

例50．（2023·全国·模拟预测）与直线$3x-4y+5=0$关于$y=x+1$对称的直线的方程为__________．

例51．（2023·全国·高三专题练习（文））直线$x-2y+2=0$关于直线$x=1$对称的直线方程是________．

例52．（2023·全国·高三专题练习）与直线$2x-y+1=0$关于x轴对称的直线的方程为（　　）

A．$x-2y+1=0$　B．$2x+y-1=0$　C．$x+2y+1=0$　D．$2x+y+1=0$

例53．（2023·全国·高二课时练习）已知直线$l:x-y-1=0$，$l_1:x-y+3=0$，$l_2:2x-y-1=0$．

（1）求直线l_1关于直线l的对称直线l_1'的方程；

（2）求直线l_2关于直线l的对称直线l_2'的方程．

例54．（2023·全国·高三专题练习）已知直线l：$kx-y+1+2k=0(k\in R)$，P（3，-1），当k为1时，求直线l关于点P的对称直线l'，并求直线l与l'间的距离

例55．（2023·全国·高三专题练习）直线$2x+3y+6=0$关于直线$y=x$对称的直线方程是（　　）

A．$3x+2y+6=0$　B．$2x-3y+6=0$

C．$3x+2y-6=0$　D．$3x-2y-6=0$

例56．（2023·全国·高三专题练习（文））直线l_1：$2x+y-4=0$关于直线l：$x-y+2=0$对称的直线l_2的方程为（　　）

A．$x-3y+14=0$　B．$x+y-2=0$　C．$x+2y-6=0$　D．$2x-y+8=0$

【方法技巧与总结】

求直线l关于直线l_0对称的直线l'

若直线$l//l_0$，则$l//l'$，且对称轴l_0与直线l及l'之间的距离相等．

此时l,l_0,l'分别为$Ax+By+C=0, Ax+By+C_0=0, Ax+By+C'=0(A^2+B^2\neq 0)$，由$\frac{|C-C_0|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|C'-C_0|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，求得$C'$，从而得$l'$．

若直线l与l_0不平行，则$l\cap l_0=Q$．在直线l上取异于Q的一点$P(x_1,y_1)$，然后求得$P(x_1,y_1)$关于直线

l_0 对称的点 $P'(x_2,y_2)$，再由 Q,P' 两点确定直线 l'（其中 $l\cap l_0\cap l'=Q$）.

题型八：直线系方程

例 57．（2023·安徽省六安中学高二期中（理））已知两直线 $a_1x+b_1y-1=0$ 和 $a_2x+b_2y-1=0$ 的交点为 $P(1,2)$，则过 $Q_1(a_1,b_1),Q_2(a_2,b_2)$ 两点的直线方程为_________.

例 58．（2023·全国·高二专题练习）求过两条直线 $y=2x+3$ 与 $3x-y+2=0$ 的交点，且分别满足下列条件的直线方程：

（1）斜率为 $-\frac{1}{2}$；

（2）过点 $P(2,3)$；

（3）平行于直线 $3x+y=1$.

例 59．（2023·江苏·高二）直线 l 经过直线 $l_1:2x+3y+2=0$ 与 $l_2:3x-4y-2=0$ 的交点，且与坐标轴围成的三角形是等腰直角三角形，求直线 l 的方程.

例 60．（2023·全国·高二专题练习）求过直线 $x+y+1=0$ 与 $2x+3y-4=0$ 的交点且斜率为 -2 的直线方程.

例 61．（2023·全国·高一课时练习）求经过直线 $l_1:x+3y-4=0$ 与 $l_2:5x+2y+6=0$ 的交点，且过点 $A(2,3)$ 的直线方程.

【方法技巧与总结】

利用直线系方程求解.

【过关测试】

一、单选题

1．（2023·全国·高三专题练习）过点 $A(2,1)$ 且与直线 $l:2x-4y+3=0$ 垂直的直线的方程是（　　）

A．$x-2y=0$　　　　B．$2x+y-5=0$

C．$2x-y-3=0$　　　　D．$x+2y-4=0$

2．（2023·全国·高三专题练习）已知直线 $l_1:ax+y-2=0,l_2:(3a-2)x+ay-4=0$，则 $a=1$ 是 $l_1\parallel l_2$ 的（　　）

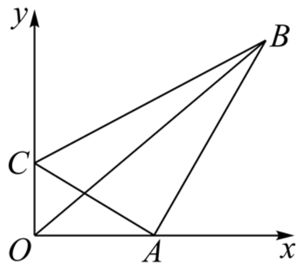
A．充分不必要条件　　　　B．充要条件

C．既不充分也不必要条件　　　　D．必要不充分条件

3．（2023·重庆·三模）已知直线 $l:y=k(x-2)+1(k\in\mathrm{R})$ 上存在一点 P，满足 $|OP|=1$，其中 O 为坐标原点．则实数 k 的取值范围是（　　）

A．$\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　B．$\left[0,\frac{3}{4}\right]$　　C．$\left[0,\frac{4}{3}\right]$　　D．$\left[\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right]$

4．（2023·河北邯郸·模拟预测）如图，在平面直角坐标系xOy中，将三角板ABC的端点A、C分别放在x轴和y轴的正半轴上运动，点B在第一象限，且$\angle ACB=2\angle ABC=60°$，若$BC=2$，则点$O$与点$B$之间的距离（　　）



A．最大值为2　　B．最大值为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

C．最大值为$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$　　D．最大值为$\frac{7+\sqrt{13}}{2}$

5．（2023·全国·高三专题练习）已知$P_1\left(a_1,b_1\right)$与$P_2\left(a_2,b_2\right)$是直线$y=kx+1$（k为常数）上两个不同的点，则关于x和y的方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y=1\\a_2x+b_2y=1\end{cases}$的解的情况是（　　）

A．无论k，P_1，P_2如何，方程组总有解

B．无论k，P_1，P_2如何，方程组总有唯一解

C．存在k，P_1，P_2，方程组无解

D．存在k，P_1，P_2，方程组无穷多解

6．（2017·河南新乡·高三）设a、b、c分别为$\triangle ABC$中$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对边的边长，则$x\sin A+ay+c=0$与$bx-y\sin B+\sin C=0$的位置关系是（　　）

A．相交但不垂直　　B．垂直

C．平行　　D．重合

7．（2023·全国·高三专题练习）数学家华罗曾说：“数缺形时少直观，形少数时难入微，”事实上，很多代数问题可以转化为几何问题加以解决，例如，与$\sqrt{\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2}$相关的代数问题，可以转化为点$A$（$x$，$y$）与点$B$（$a$，$b$）之间的距离的几何问题，结合上述观点，可得方程$\sqrt{x^2+6x+10}-\sqrt{x^2-6x+10}=4$的解是（　　）

A．$\frac{\sqrt{30}}{10}$　　B．$\frac{\sqrt{30}}{5}$　　C．$\frac{2\sqrt{30}}{5}$　　D．$\frac{4\sqrt{30}}{5}$

8．（2023·全国·高三专题练习）已知点A在直线$x+2y-1=0$上，点B在直线$x+2y+3=0$上，线段AB

的中点为$P\left(x_0, y_0\right)$，且满足$y_0 \geq x_0+2$，则$\frac{y_0}{x_0}$的取值范围为（　　）

A．$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{5}\right]$　　B．$\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right)$　　C．$\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right]$　　D．$\left(-\frac{1}{2},0\right)$

二、多选题

9．（2023·全国·高三专题练习）（多选）设点P（-4，2），Q（6，-4），R（12，6），S（2，12），则有（　　）

A．$PQ \parallel SR$　　B．$PQ \perp PS$

C．$PS \parallel QS$　　D．$PR \perp QS$

10．（2023·湖北襄阳·高三阶段练习）已知曲线C的方程为$ax^2+ay^2-2x-2y=0(a \in \mathbf{R})$，则（　　）

A．曲线C可能是直线　　B．当$a=1$时，直线$3x+y=0$与曲线C相切

C．曲线C经过定点　　D．当$a=1$时，直线$x+2y=0$与曲线C相交

11．（2023·重庆一中高三期中）若过点$A(1,0)$，$B(2,0)$，$C(4,0)$，$D(8,0)$作四条直线构成一个正方形，则该正方形的面积可能等于（　　）

A．$\frac{16}{17}$　　B．$\frac{36}{5}$　　C．$\frac{26}{5}$　　D．$\frac{196}{53}$

12．（2023·河北衡水·高三阶段练习）已知$a \in \mathbf{R}$，过定点A的直线为$l_1: ax+y=0$与过定点B的直线$l_2: x-ay-a+1=0$，两条动直线的交点为P，则（　　）

A．定点$A(0,1)$

B．定点$B(-1,-1)$

C．点P的轨迹方程为$x^2+y^2+x+y=0$

D．$\left|\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}\right|$的最大值为8

三、填空题

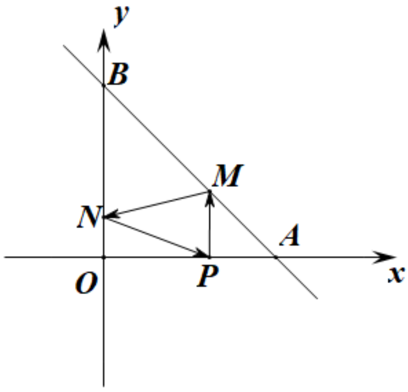
13．（2023·全国·高二专题练习）若l_1与l_2为两条不重合的直线，它们的倾斜角分别为a_1，a_2，斜率分别为k_1，k_2，则下列命题

①若$l_1 // l_2$，则斜率$k_1=k_2$；②若斜率$k_1=k_2$，则$l_1 // l_2$；

③若$l_1 // l_2$，则倾斜角$a_1=a_2$；④若倾斜角$a_1=a_2$，则$l_1 // l_2$；

其中正确命题的个数是______.

14．（2023·全国·高二专题练习）如图已知$A(4,0)$、$B(0,4)$、$O(0,0)$，若光线L从点$P(2,0)$射出，直线AB反射后到直线OB上，在经直线OB反射回原点P，则光线L所在的直线方程为________.



15．（2023·青海·大通回族土族自治县教学研究室二模（理））不等式 $-4<\sqrt{x^2-6x+14}-\sqrt{x^2+6x+14}<4$ 的解集为______.

16．（2023·重庆市第七中学校高二阶段练习）“曼哈顿距离”是由赫尔曼闵可夫斯基所创的词汇，是一种使用在几何度量空间的几何学用语，例如在平面直角坐标系中，点 $P(x_1,\ y_1)$、$Q(x_2,\ y_2)$ 的曼哈顿距离为：$L_{PQ}=\left|x_1-x_2\right|+\left|y_1-y_2\right|$．若点 $P(1,2)$，点 Q 为圆 $C:x^2+y^2=4$ 上一动点，则 L_{PQ} 的最大值为_________.

四、解答题

17．（2023·全国·高三专题练习）已知两条直线 $l_1:mx+8y+n=0$ 和 $l_2:2x+my-1=0$，试分别确定 m,n 的值，使：

（1）l_1 与 l_2 相交于一点 $P(m,1)$；

（2）$l_1//l_2$ 且 l_1 过点 $(3,-1)$；

（3）$l_1\perp l_2$ 且 l_1 在 y 轴上的截距为 -1.

18．（2023·全国·高三专题练习）已知直线 $l_1:ax+y+2=0$

（1）若直线 l_1 在 x 轴上的截距为 -2，求实数 a 的值；

（2）直线 l_1 与直线 $l_2:2x-y+1=0$ 平行，求 l_1 与 l_2 之间的距离.

19．（2023·全国·高三专题练习（理））已知直线 $l:2x-3y+1=0$，点 $A(-1,-2)$．求：

（1）点 A 关于直线 l 的对称点 A' 的坐标；

（2）直线 $m:3x-2y-6=0$ 关于直线 l 对称的直线 m' 的方程；

（3）直线 l 关于点 $A(-1,-2)$ 对称的直线 l' 的方程．

20．（2023·全国·高三专题练习）已知平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点 A、B、C 的坐标分别是（-2，1）、（-1，3）、（3，4）．O 为坐标原点，若线段 OB 交 AD 于 M 点，且 $\overrightarrow{OM}=t\overrightarrow{OB}$，求 t 的值和相应 M 点的坐标．

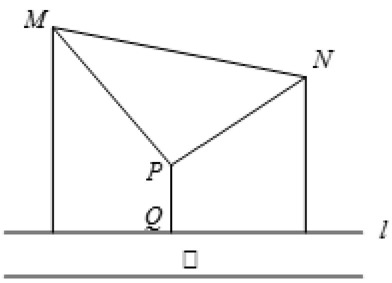
21．（2023·全国·高三专题练习（理））已知平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点坐标为 $A(-2,-1),B(4,1),C(2,3)$.

（1）求平行四边形 $ABCD$ 的顶点 D 的坐标；

（2）求平行四边形 $ABCD$ 的面积；

（3）在 $\triangle ABC$ 中，求外心 M 的坐标．

22．（2016·江苏常州·高三阶段练习）如图，相距 14km 的两个居民小区 M 和 N 位于河岸 l（直线）的同侧，M 和 N 距离河岸分别为 10km 和 8km．现要在河的小区一侧选一地点 P，在 P 处建一个生活污水处理站，从 P 排直线水管 PM，PN 分别到两个小区和垂直于河岸的水管 PQ，使小区污水经处理后排入河道．设 PQ 段长为 tkm（$0<t<8$）．



（1）求污水处理站 P 到两小区的水管的总长最小值（用 t 表示）；

（2）请确定污水处理站 P 的位置，使所排三段水管的总长最小，并求出此时污水处理站分别到两小区水管的长度．

专题34 两条直线的位置关系

【考点预测】

知识点一：两直线平行与垂直的判定

两条直线平行与垂直的判定以表格形式出现，如表所示.

两直线方程	平行	垂直
$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$	$A_1B_2-A_2B_1=0$且 $B_1C_2-B_2C_1\neq 0$	$A_1A_2+B_1B_2=0$
$l_1: y=k_1x+b_1$ $l_2: y=k_2x+b_2$（斜率存在） $l_1: x=x_1$, $l_2: x=x_2$（斜率不存在）	$k_1=k_2, b_1\neq b_2$或 $x=x_1, x=x_2, x_1\neq x_2$	$k_1 \cdot k_2=-1$或k_1与k_2中有一个为0，另一个不存在.

知识点二：三种距离

1．两点间的距离

平面上两点$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$的距离公式为$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

特别地，原点O（0，0）与任一点P（x，y）的距离$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$.

2．点到直线的距离

点$P_0(x_0,y_0)$到直线$l: Ax+By+C=0$的距离$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

特别地，若直线为l：$x=m$，则点$P_0(x_0,y_0)$到l的距离$d=|m-x_0|$；若直线为l：$y=n$，则点$P_0(x_0,y_0)$到l的距离$d=|n-y_0|$

3．两条平行线间的距离

已知l_1,l_2是两条平行线，求l_1,l_2间距离的方法：

（1）转化为其中一条直线上的特殊点到另一条直线的距离.

（2）设$l_1: Ax+By+C_1=0, l_2: Ax+By+C_2=0$，则$l_1$与$l_2$之间的距离$d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

注：两平行直线方程中，x，y前面对应系数要相等.

4．双根式

双根式$f(x)=\sqrt{a_1x^2+b_1x+c_1}\pm\sqrt{a_2x^2+b_2x+c_2}$型函数求解，首先想到两点间的距离，或者利用单调性求解.

【方法技巧与总结】

1．点关于点对称

点关于点对称的本质是中点坐标公式：设点$P(x_1, y_1)$关于点$Q(x_0, y_0)$的对称点为

$P'(x_2, y_2)$，则根据中点坐标公式，有 $\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y_0 = \dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$

可得对称点 $P'(x_2, y_2)$ 的坐标为 $(2x_0-x_1, 2y_0-y_1)$

2．点关于直线对称

点 $P(x_1, y_1)$ 关于直线 $l: Ax+By+C=0$ 对称的点为 $P'(x_2, y_2)$，连接 PP'，交 l 于 M 点，则 l 垂直平分 PP'，所以 $PP' \perp l$，且 M 为 PP' 中点，又因为 M 在直线 l 上，故可得 $\begin{cases} k_l \cdot k_{PP'} = -1 \\ A\dfrac{x_1+x_2}{2} + B\dfrac{y_1+y_2}{2} + C = 0 \end{cases}$，解出 (x_2, y_2) 即可.

3．直线关于点对称

法一：在已知直线上取两点，利用中点坐标公式求出它们关于已知点对称的两点坐标，再由两点式求出直线方程；

法二：求出一个对称点，再利用两对称直线平行，由点斜式得到所求直线方程.

4．直线关于直线对称

求直线 $l_1: ax+by+c=0$，关于直线 $l_2: dx+ey+f=0$（两直线不平行）的对称直线 l_3

第一步：联立 l_1，l_2 算出交点 $P(x_0, y_0)$

第二步：在 l_1 上任找一点（非交点）$Q(x_1, y_1)$，利用点关于直线对称的秒杀公式算出对称点 $Q'(x_2, y_2)$

第三步：利用两点式写出 l_3 方程

5．常见的一些特殊的对称

点 (x, y) 关于 x 轴的对称点为 $(x, -y)$，关于 y 轴的对称点为 $(-x, y)$.

点 (x, y) 关于直线 $y=x$ 的对称点为 (y, x)，关于直线 $y=-x$ 的对称点为 $(-y, -x)$.

点 (x, y) 关于直线 $x=a$ 的对称点为 $(2a-x, y)$，关于直线 $y=b$ 的对称点为 $(x, 2b-y)$.

点 (x, y) 关于点 (a, b) 的对称点为 $(2a-x, 2b-y)$.

点 (x, y) 关于直线 $x+y=k$ 的对称点为 $(k-y, k-x)$，关于直线 $x-y=k$ 的对称点为 $(k+y, x-k)$.

6．过定点直线系

过已知点 $P(x_0, y_0)$ 的直线系方程 $y-y_0=k(x-x_0)$（k 为参数）.

7．斜率为定值直线系

斜率为 k 的直线系方程 $y=kx+b$（b 是参数）.

8．平行直线系

与已知直线 $Ax+By+C=0$ 平行的直线系方程 $Ax+By+\lambda=0$（λ 为参数）.

9．垂直直线系

与已知直线 $Ax+By+C=0$ 垂直的直线系方程 $Bx-Ay+\lambda=0$（λ 为参数）.

10．过两直线交点的直线系

过直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点的直线系方程：$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$（$\lambda$ 为参数）.

【题型归纳目录】

题型一：两直线位置关系的判定

题型二：有关距离的计算

题型三：有关距离的最值问题

题型四：点点对称

题型五：点线对称

题型六：线点对称

题型七：线线对称

题型八：直线系方程

【典例例题】

题型一：两直线位置关系的判定

例 1．（2023·全国·高三专题练习（文））已知直线 l_1： $x+ay-1=0$， l_2： $(a+2)x+3y-3a=0$，则“ $a=-3$ ”是“ $l_1//l_2$ ”的（　　）

A．充分不必要条件　　　　*B*．必要不充分条件

C．充分必要条件　　　　*D*．既不充分也不必要条件

答案：*C*

【解析】当 $a=-3$ 时， l_1： $x-3y-1=0$，即 $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$； l_2： $-x+3y+9=0$，

即 $y=\frac{1}{3}x-3$，两直线的斜率相等，所以 $l_1//l_2$，即“ $a=-3$ ”是“ $l_1//l_2$ ”的充分条件；

当 $l_1//l_2$ 时， $a(a+2)=3$，解得 $a=-3$ 或 1，当 $a=-3$ 时，两直线方程不同，符合题意，

当 $a=1$ 时， l_1： $x+y-1=0$， l_2： $3x+3y-3=0$ 即 $x+y-1=0$，不符合题意，

所以，当 $l_1//l_2$ 时， $a=-3$，即“ $a=-3$ ”是“ $l_1//l_2$ ”的必要条件，

综上所述，“ $a=-3$ ”是“ $l_1//l_2$ ”的充要条件.

故选：*C*.

例 2．（2023·全国·高三专题练习（文））已知$a^2-3a+2=0$，则直线l_1：$ax+(3-a)y-a=0$和直线l_2：$(6-2a)x+(3a-5)y-4+a=0$的位置关系为（　　）

A．垂直或平行　　B．垂直或相交

C．平行或相交　　D．垂直或重合

答案：D

【解析】因为$a^2-3a+2=0$，所以$a=1$或$a=2$．

当$a=1$时，l_1：$x+2y-1=0$，l_2：$4x-2y-3=0$，$k_1=-\frac{1}{2}$，$k_2=2$

所以$k_1\times k_2=-1$，则两直线垂直；

当$a=2$时，l_1：$2x+y-2=0$，l_2：$2x+y-2=0$，则两直线重合．故选：D

例 3．（2023·全国·高三专题练习）已知$l_1:3x+2ay-5=0$，$l_2:(3a-1)x-ay-2=0$，则满足$l_1 /\!/ l_2$的a的值是（　　）

A．$-\frac{1}{6}$　　B．0　　C．$-\frac{1}{6}$或 0　　D．$\frac{1}{6}$或 0

答案：C

【解析】由$l_1 /\!/ l_2$可得$3\cdot(-a)-(3a-1)\cdot 2a=0$，得$a=0$或$a=-\frac{1}{6}$，

当$a=0$时，$l_1:3x-5=0$，$l_2:-x-2=0$，符合题意；

当$a=-\frac{1}{6}$时，$l_1:3x-\frac{1}{3}y-5=0$，$l_2:3x-\frac{1}{3}y+4=0$，符合题意；

故满足$l_1 /\!/ l_2$的a的值为 0 或$-\frac{1}{6}$．

故选：C．

例 4．（2023·重庆巴蜀中学高三阶段练习）已知直线$ax+2y+6=0$与直线$x+(a-1)y+a^2-1=0$互相平行，则实数a的值为（　　）

A．-2　　B．2 或-1　　C．2　　D．-1

答案：D

【解析】直线$ax+2y+6=0$斜率必存在，

故两直线平行，则$-\frac{a}{2}=-\frac{1}{a-1}$，即$a^2-a-2=0$，解得$a=2$或$-1$，

当$a=2$时，两直线重合，$\therefore a=-1$．

故选：D．

例 5．**（多选题）**（2023·全国·高三专题练习）瑞士数学家欧拉（*Euler*）在 1765 年在其所著作的《三角形的几何学》一书中提出：三角形的外心（中垂线的交点）、重心（中线的交点）、垂心（高的交点）在同一条直线上，后来，人们把这条直线称为欧拉线．若$\triangle ABC$

的顶点 A（−4，0），B（0，4），其欧拉线方程为 $x-y+2=0$，则下列说法正确的是（　　）

A．$\triangle ABC$ 的外心为（−1，1）　　B．$\triangle ABC$ 的顶点 C 的坐标可能为（−2，0）

C．$\triangle ABC$ 的垂心坐标可能为（−2，0）　D．$\triangle ABC$ 的重心坐标可能为$\left(-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$

答案：ACD

【解析】由顶点 A（−4，0），B（0，4），可知直线 AB 的垂直分线方程为 $y=-x$，

$\triangle ABC$ 的外心在直线 $x-y+2=0$ 上，

联立$\begin{cases}x-y+2=0\\y=-x\end{cases}$，可得外心坐标为（−1，1），故 A 正确；

设外心为 G，则 G（−1，1），故$|GA|=\sqrt{10}$，

所以外接圆方程为$(x+1)^2+(y-1)^2=10$，

设$C(x,y)$，则$\triangle ABC$ 的重心为$(\frac{x-4}{3},\frac{y+4}{3})$，代入欧拉线方程为 $x-y+2=0$ 中，

得：$x-y-2=0$，和$(x+1)^2+(y-1)^2=10$联立，解得$\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=0\\y=-2\end{cases}$，

即 C 点坐标可以为$(2,0),(0,-2)$，故 B 错误；

由 C 点坐标为$(2,0),(0,-2)$，可知重心可能为$(-\frac{2}{3},\frac{4}{3}),(-\frac{4}{3},\frac{2}{3})$，故 D 正确；

当 C 点坐标为$(2,0)$时，过 C 和 AB 垂直的直线方程为$y=-x+2$，

联立欧拉线方程为 $x-y+2=0$ 可解得垂心坐标为$(0,2)$；

当 C 点坐标为$(0,-2)$时，过 C 和 AB 垂直的直线方程为$y=-x-2$，

联立欧拉线方程为 $x-y+2=0$ 可解得垂心坐标为$(-2,0)$，故 C 正确，

故选：ACD．

例 6．（2023·全国·高三专题练习（理））直线$x+my-2=0$和直线$mx-(2m-1)y=0$垂直，则实数$m=$__________．

答案：0 或 1【解析】因直线$x+my-2=0$和直线$mx-(2m-1)y=0$垂直，

则有$1\cdot m+m[-(2m-1)]=0$，即$2m-2m^2=0$，解得$m=0$或$m=1$，

所以$m=0$或$m=1$．

故答案为：0 或 1

例 7．（2023·全国·高三专题练习）“$m=2$”是“直线$2x+(m+1)y+4=0$与直线$3x-my-2=0$垂直”的（　　）

A．充分必要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

答案：B

【解析】直线 $2x+(m+1)y+4=0$ 与直线 $3x-my-2=0$ 垂直，

则 $2\times3+(m+1)\times(-m)=0$，解得：$m=2$ 或 $m=-3$，

所以“$m=2$”是“直线 $2x+(m+1)y+4=0$ 与直线 $3x-my-2=0$ 垂直”的充分不必要条件.

故选：B.

例 8.（2023·全国·高三专题练习）直线 $2ax+y-2=0$ 与直线 $x-(a^2-3)y+2=0$ 互相垂直，且两直线交点位于第三象限，则实数 a 的值为（　　）

A．1　　　　*B*．3　　　　*C*．－1　　　　*D*．－3

答案：C

【解析】由直线 $2ax+y-2=0$ 与直线 $x-(a^2-3)y+2=0$ 互相垂直，

可得 $2a-(a^2-3)=0$，解得 $a=-1$ 或 3，

当 $a=3$ 时，联立 $\begin{cases}6x+y-2=0\\x-6y+2=0\end{cases}$，解得交点坐标为 $(\frac{10}{37},\frac{14}{37})$，不合题意；

当 $a=-1$ 时，联立 $\begin{cases}-2x+y-2=0\\x+2y+2=0\end{cases}$，解得交点坐标为 $(-\frac{6}{5},-\frac{2}{5})$，合乎题意，

故实数 a 的值为 -1，

故选：C

【方法技巧与总结】

判断两直线的位置关系可以从斜率是否存在分类判断，也可以按照以下方法判断：一般地，设 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$（A_1,B_1 不全为 0），$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$（A_2,B_2 不全为 0），则：

当 $A_1B_2-A_2B_1\neq0$ 时，直线 l_1,l_2 相交；

当 $A_1B_2=A_2B_1$ 时，l_1,l_2 直线平行或重合，代回检验；

当 $A_1A_2-B_1B_2=0$ 时，l_1,l_2 直线垂直，与向量的平行与垂直类比记忆.

题型二：有关距离的计算

例 9.（2023·全国·高三专题练习）在平面直角坐标系中，原点 $(0,0)$ 到直线 $x+y-2=0$ 的距离等于（　　）

A．1　　　　*B*．$\sqrt{2}$　　　　*C*．$\sqrt{3}$　　　　*D*．3

答案：B

【解析】原点 $(0,0)$ 到直线 $x+y-2=0$ 的距离为 $\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$.

故选：B.

例 10.（2023·吉林市教育学院模拟预测（理））已知 $A(-2,0),B(4,a)$ 两点到直线

$l:3x-4y+1=0$ 的距离相等，则 $a=$（　　）

A．2　　B．$\frac{9}{2}$　　C．2 或 -8　　D．2 或 $\frac{9}{2}$

答案：D

【解析】因为 $A(-2,0),B(4,a)$ 两点到直线 $l:3x-4y+1=0$ 的距离相等，

所以有 $\frac{|3\times(-2)+0\times(-4)+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|3\times4-4a+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\Rightarrow|13-4a|=5\Rightarrow a=2$，或 $a=\frac{9}{2}$，

故选：D

例 11．（2023·福建·晋江市第一中学高二阶段练习）直线 l 过点 $P(1,2)$，且 $A(2,3)$、$B(4,-5)$ 到 l 的距离相等，则直线 l 的方程是（　　）

A．$4x+y-6=0$　　B．$x+4y-6=0$

C．$3x+2y-7=0$ 或 $4x+y-6=0$　　D．$3x+2y-7=0$ 或 $x+4y-6=0$

答案：C

【解析】显然直线 l 的斜率存在，故设直线 l 为：$y-2=k(x-1)$，即 $kx-y-k+2=0$，

则 $\frac{|2k-3-k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|4k+5-k+2|}{\sqrt{k^2+1}}\Rightarrow k-1=3k+7$ 或 $k-1+3k+7=0\Rightarrow k=-4$ 或 $k=-\frac{3}{2}$，

$\therefore l$ 方程为：$y-2=-4(x-1)\Rightarrow 4x+y-6=0$，

$y-2=-\frac{3}{2}(x-1)\Rightarrow 3x+2y-7=0$．

故选：C．

例 12．（2023·全国·高二课时练习）已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标是 $A(1,-1)$，$B(-1,3)$，$C(3,0)$．则 $\triangle ABC$ 的形状为______；$\triangle ABC$ 的面积为______．

答案：直角三角形　5

【解析】因为 $|AB|=\sqrt{(-1-1)^2+[3-(-1)]^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$，

$|AC|=\sqrt{(3-1)^2+[0-(-1)]^2}=\sqrt{5}$，$|BC|=\sqrt{[3-(-1)]^2+(0-3)^2}=\sqrt{25}=5$，

所以 $|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$，即 $\triangle ABC$ 是以 A 为直角顶点的直角三角形．

由于 $\triangle ABC$ 是以 A 为直角顶点的直角三角形，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|=5$．

故答案为：直角三角形；5

例 13．（2023·全国·高二专题练习）已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(2,1),B(-2,3),C(0,-1)$，则 AC 边上的中线长为____．

答案：$3\sqrt{2}$

【解析】设 AC 的中点为 D，

因为$\triangle ABC$的顶点$A(2,1)$，$C(0,-1)$，

则$D(1,0)$，又$B(-2,3)$，

所以$BD=\sqrt{(-2-1)^2+(3-0)^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$．

故答案为：$3\sqrt{2}$．

例 14．（2016·天津市红桥区教师发展中心高二期中（文））已知点$A(-1,3)$，$B(2,6)$，若在x轴上存在一点P满足$|PA|=|PB|$，则点P的坐标为____________．

答案：$(5,0)$

【解析】设$P(x,0)$，则$\sqrt{(x+1)^2+9}=\sqrt{(x-2)^2+36}$，解得$x=5$，

$\therefore$点P的坐标为$(5,0)$，

故答案为：$(5,0)$．

例 15．（2023·全国·高三专题练习）已知直线$3x+y-3=0$和$6x+my+1=0$互相平行，则它们之间的距离是（　　）

A．4　　*B*．$\dfrac{\sqrt{10}}{20}$　　*C*．$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$　　*D*．$\dfrac{7\sqrt{10}}{20}$

答案：*D*

【解析】由直线平行可得$3m-6=0$，解得$m=2$，则直线方程为$6x+2y+1=0$，即$3x+y+\dfrac{1}{2}=0$，则距离是$\dfrac{\left|\dfrac{1}{2}+3\right|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{7\sqrt{10}}{20}$．

故选：*D*．

例 16．（2023·江苏·高二）若两条平行线$3x-4y+m=0$与$3x-4y+1=0$之间的距离是2，则m的值为（　　）

A．-9或11　　*B*．-8或10

C．-7或12　　*D*．-8或11

答案：*A*

【解析】因为两条平行线$3x-4y+m=0$与$3x-4y+1=0$之间的距离是2，

所以$\dfrac{|m-1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2\Rightarrow|m-1|=10\Rightarrow m=11$，或$m=-9$，

故选：*A*

【方法技巧与总结】

两点间的距离，点到直线的距离以及两平行直线间的距离的计算，特别注意点到直线距离公式的结构．

题型三：有关距离的最值问题

例 17．（2023·全国·高三专题练习）已知直线l_1：$x-y+2=0$，l_2：$x-y-2=0$，直线l_3垂直于l_1，l_2，且垂足分别为A，B，若$C(-4,0)$，$D(4,0)$，则$|CA|+|AB|+|BD|$的最小值为（　　）

A．$\sqrt{10}+2\sqrt{2}$　　B．$8+\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{10}+2\sqrt{2}$　　D．8

答案：C

【解析】因直线l_3垂直于l_1，l_2，则设直线l_3的方程为：$x+y=2m(m\in\mathrm{R})$，

由$\begin{cases}x+y=2m\\x-y=-2\end{cases}$得点$A(m-1,m+1)$，由$\begin{cases}x+y=2m\\x-y=2\end{cases}$得点$B(m+1,m-1)$，而$C(-4,0)$，$D(4,0)$，

于是得$|CA|+|AB|+|BD|=\sqrt{(m+3)^2+(m+1)^2}+2\sqrt{2}+\sqrt{(m-3)^2+(m-1)^2}$，

而$\sqrt{(m+3)^2+(m+1)^2}+\sqrt{(m-3)^2+(m-1)^2}$表示动点$M(m,m)$到定点$E(-3,-1)$与$F(3,1)$的距离的和，

显然，动点$M(m,m)$在直线$y=x$上，点$E(-3,-1)$与$F(3,1)$在直线$y=x$两侧，因此，$|ME|+|MF|\ge|EF|=2\sqrt{10}$，

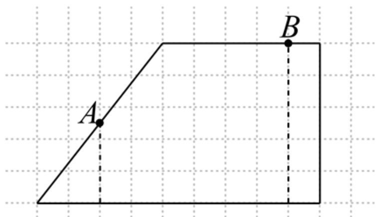
当且仅当点M是直线$y=x$与线段EF：$y=\frac{1}{3}x(-3\le x\le 3)$的交点，即原点时取“=”，此时$m$=0，

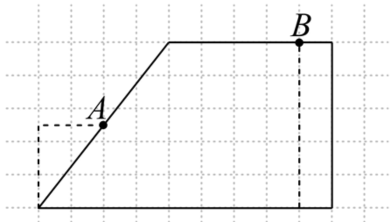
从而得$\sqrt{(m+3)^2+(m+1)^2}+\sqrt{(m-3)^2+(m-1)^2}$取最小值$2\sqrt{10}$，

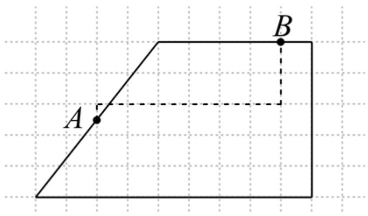
所以，当直线l_3方程为：$x+y=0$时，$|CA|+|AB|+|BD|$取最小值$2\sqrt{10}+2\sqrt{2}$．

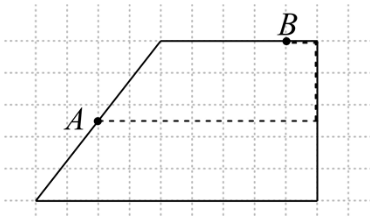
故选：C

例 18．（2023·全国·高三专题练习）“曼哈顿距离”也叫“出租车距离”，是19世纪德国犹太人数学家赫尔曼·闵可夫斯基首先提出来的名词，用来表示两个点在标准坐标系上的绝对轴距总和，即在直角坐标平面内，若$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则A，B两点的“曼哈顿距离”为$|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$，下列直角梯形中的虚线可以作为A，B两点的“曼哈顿距离”是（　　）

A．

B．

C. 

D. 

答案：C

【解析】根据题意：A，B 两点的“曼哈顿距离”为$|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$，再结合四个选项可以判断只有 C 选项符合题意．

故选：C．

例 19．（2023·广东潮州·二模）唐代诗人李颀的诗《古从军行》开头两句说：“白日登山望烽火，黄昏饮马傍交河．”诗中隐含着一个有趣的数学问题——“将军饮马”问题，即将军在观望烽火之后从山脚下某处出发，先到河边饮马后再回到军营，怎样走才能使总路程最短？在平面直角坐标系中，设军营所在位置为$B(3,4)$，若将军从点$A(-2,0)$处出发，河岸线所在直线方程为$y=x$，则“将军饮马”的最短总路程为（　　）．

A．5　　　　B．$3\sqrt{5}$　　　　C．45　　　　D．$5\sqrt{3}$

答案：B

【解析】因为点$A(-2,0)$关于直线$y=x$的对称点为$A'(0,-2)$，

所以$|A'B|$即为“将军饮马”的最短总路程，

则“将军饮马”的最短总路程为$|A'B|=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$．

故选：B．

例 20．（2023·上海虹口·高二期末）已知点$M(a,b)$在直线$5x-12y+26=0$上，则$\sqrt{a^2+b^2}$的最小值为________．

答案：2

【解析】$\sqrt{a^2+b^2}$可以理解为点$(0,0)$到点$M(a,b)$的距离，

又$\because$点$M(a,b)$在直线$5x-12y+26=0$上，

$\therefore\sqrt{a^2+b^2}$的最小值等于点$(0,0)$到直线$5x-12y+26=0$的距离，

且$d=\dfrac{|5\times0-12\times0+26|}{\sqrt{5^2+12^2}}=2$．

故答案为：2．

例 21．（2023·全国·高三专题练习）记$Z=(x-y)^2+(\frac{2}{x}+\frac{y}{2})^2(x\neq0，x，y\in R)$，则$Z$的最小值是____________．

答案：$\dfrac{16}{5}$

【解析】$Z=(x-y)^2+(\frac{2}{x}+\frac{y}{2})^2$ 表示点 $A(x,\frac{2}{x})$，$B(y,-\frac{y}{2})$ 两点之间距离的平方，

点A的轨迹方程是 $y=\frac{2}{x}$，点 B 的轨迹方程是 $y=-\frac{x}{2}$，

设平行于 $y=-\frac{x}{2}$ 且与 $y=\frac{2}{x}$ 相切的直线方程为 $y=-\frac{x}{2}+b$，

联立 $\begin{cases} y=\frac{2}{x} \\ y=-\frac{x}{2}+b \end{cases}$，得 $x^2-2bx+4=0$，

由 $\Delta=(-2b)^2-4\times1\times4=0$，解得：$b=\pm2$，

所以与 $y=\frac{2}{x}$ 相切的直线方程为 $y=-\frac{x}{2}+2$ 或 $y=-\frac{x}{2}-2$，

$\therefore$ $A(x,\frac{2}{x})$，$B(y,-\frac{y}{2})$ 两点之间距离的最小值，

即为两平行直线 $y=-\frac{x}{2}$ 与 $y=-\frac{x}{2}+2$ 间的距离，为 $\frac{|2|}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$，

$\therefore Z$ 的最小值是 $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{16}{5}$.

故答案为：$\frac{16}{5}$.

例 22．（2023·全国·高三专题练习）求函数 $y=\sqrt{x^2-8x+17}+\sqrt{x^2+4}$ 的最小值为____________.

答案：5

【解析】函数

$y=\sqrt{x^2-8x+17}+\sqrt{x^2+4}=\sqrt{(x-4)^2+1}+\sqrt{x^2+4}=\sqrt{(x-4)^2+(0-1)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(0+2)^2}$ 表示 x 轴上动点 $P(x,0)$ 到 $A(4,1)$ 和 $B(0,-2)$ 的距离和，当

P 为 AB 与 x 轴的交点时，函数取最小值 $|AB|=\sqrt{(4-0)^2+(1+2)^2}=5$，

故答案为：5

例 23．（2023·全国·高三专题练习（文））已知点 $A(5,0)$，$B(0,4)$，动点 P，Q 分别在直线 $y=x+2$ 和 $y=x$ 上，且 PQ 与两直线垂直，则 $|AQ|+|QP|+|PB|$ 的最小值为____________.

答案：5+2

【解析】设 $Q(x,x)$，因为 PQ 与两直线垂直且 $|PQ|=\sqrt{2}$，

则 $P(x-1,x+1)$，