

3. 逻辑函数的表格化简法

- 适合于变量较多的逻辑函数化简法——表格化简法。
- (1) 变量的个数不受限制，可以比较多；
- (2) 规律性比较强，适合于计算机逻辑函数化简。
- 其缺点是：对于变量较多的函数，用人工表格法化简就很繁琐。
- 表格法化简的基本思想类似于卡诺图法，即应用公式：与项· A + 与项· \overline{A} = 与项，就可以形成一个新的较简的“与”项。

● 表格法化简的步骤如下：

(1) 把需简化的逻辑函数展开成最小项之和的形式。

(2) 将各最小项 m_i 下角标 i 表示成二进制数，再根据其中各位有“1”的个数由少到多**分组排队**。

重复使用 $AB + \overline{A}B = B$ 公式，在组与组之间进行逐一**搜索**，**寻找相邻两项**（即两个二进制数除一位不同外，其余各位均相同）。若有则合并成一项并把它记下，同时在这相邻两项旁做一记号“√”。

把所有存在于组与组之间的相邻项都找到后便可得到一组含有 $(n-1)$ 个变量的与项（仍以二进制代码表示，“1”表示原变量，“0”表示反变量，“—”表示已消去的变量）。

对得到的 $(n - 1)$ 个变量的与项也采用同样的方法：**分组、搜索相邻项合并成一项**并做以记号“√”，记下新项，便可得到一组含有 $(n-2)$ 个变量的项。

再重复同样的方法，依次类推。我们可以逐步从 $(n-2)$ ， $(n-3)$ ， \dots 个变量项中得到含有 $(n-3)$ ， $(n-4)$ ， \dots 个变量的各项，一直进行到最后的一组以致其中各项已无法相邻合并为止。

这时，在所有各项旁没有记号“√”的项就是我们需要的项，称为**质蕴涵项** (Prime implicant)，亦即不含多余变量的项，也就是它再不能同其它项合并而得到变量更少的项了。

请看下面的例子：

$$F = f(D, C, B, A) = \sum m(0, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 15)$$

$$F = f(D, C, B, A) = \sum m(0, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 15)$$

表1-3-9(a) 最小项分组排队

组号	最小项 编号	变量			
		A	B	C	D
0	0	0	0	0	0
1	4	0	0	1	0
	8	0	0	0	1
2	6	0	1	1	0
	10	0	1	0	1
3	11	1	1	0	1
	13	1	0	1	1
	14	0	1	1	1
4	15	1	1	1	1

先把最小项
分组排队，
如表1-3-9(a)
，

表1-3-9(a) 最小项分组排队

在相邻组之间逐一搜索寻找相邻项，合并成新的“与”项，

组号	最小项 编号	变量				
		<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	
0	0	0	0	0	0	√
1	4	0	0	1	0	√
	8	0	0	0	1	√
2	6	0	1	1	0	√
	10	0	1	0	1	√
3	11	1	1	0	1	√
	13	1	0	1	1	√
	14	0	1	1	1	√
4	15	1	1	1	1	√

得到一组含有3个变量的“与”项，见表1-3-9(b)，

表1-3-9(b) (n-1)个变量的与项

组号	最小项 编号	变量				
		A	B	C	D	
0	0,4	0	0	—	0	P_1
	0,8	0	0	0	—	P_2
1	4,6	0	—	1	0	P_3
	8,10	0	—	0	1	P_4
2	6,14	0	1	1	—	P_5
	10,11	—	1	0	1	√
	10,14	0	1	—	1	√
3	13,15	1	—	1	1	P_6
	14,15	—	1	1	1	√
	11,15	1	1	—	1	√

然后再重复上述过程。值得说明的是：在表1-3-9(b)中寻找相邻项时，相邻项除一位不同外，其余各位均相同的含意也包括两项中在同一位置有“-”，如“-101”与“-111”是相邻项，可合并为“-1-1”。见下表1-3-9(c)。把表1-3-9(b)和表1-3-9(c)中无法再合并的质蕴涵项分别记作 $P_1 \cdots P_7$ 。

表1-3-9(c) (n-2)个变量的与项

组号	最小项 编号	变量				
		A	B	C	D	
2	10,11 14,15	-	1	-	1	P_7

$$P_1 = \overline{A}\overline{B}\overline{D},$$

$$P_2 = \overline{A}\overline{B}\overline{C},$$

$$P_3 = \overline{A}\overline{C}\overline{D},$$

$$P_4 = \overline{A}\overline{C}D,$$

$$P_5 = \overline{A}BC,$$

$$P_6 = A\overline{C}\overline{D},$$

$$P_7 = A\overline{B}D$$

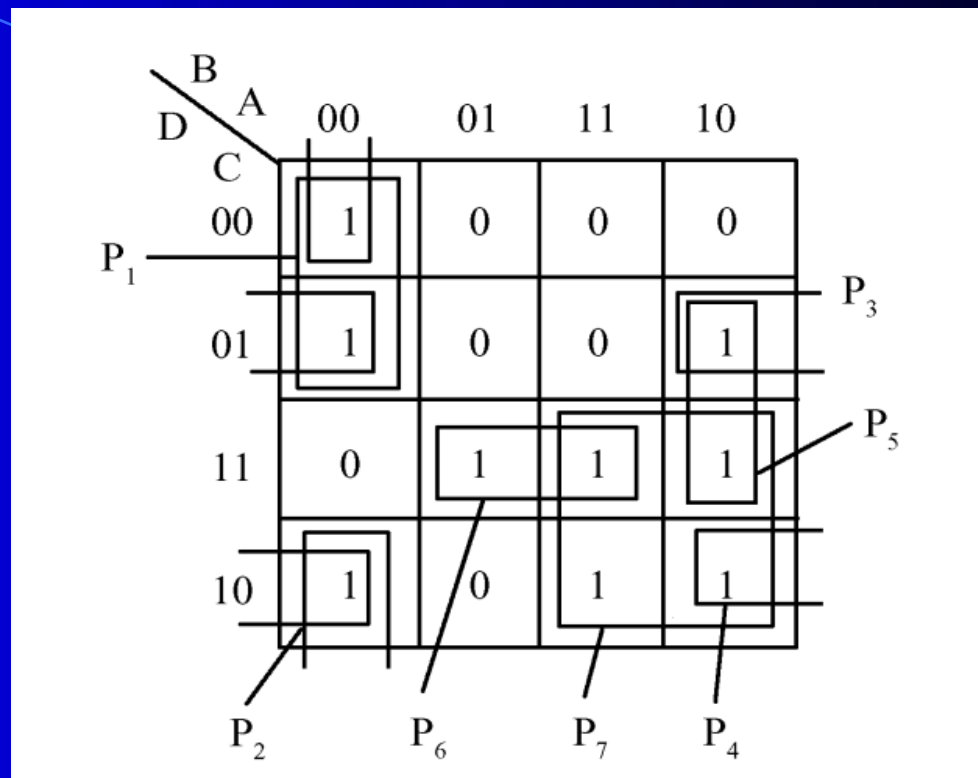


图1-3-19 函数以质蕴涵项表示

函数 F 就是这些质蕴涵项之和，但它不是最简的结果。画出函数 F 的卡诺图，如图1-3-19所示。

从图中看出：各组间搜索的结果，只是把所有的质蕴涵项找出，但有些质蕴涵项是不必要的，或者说是重复的。

例如： P_5 中没有包含新的“1”块。所以，还要从质蕴涵项中找出必要的质蕴涵项。

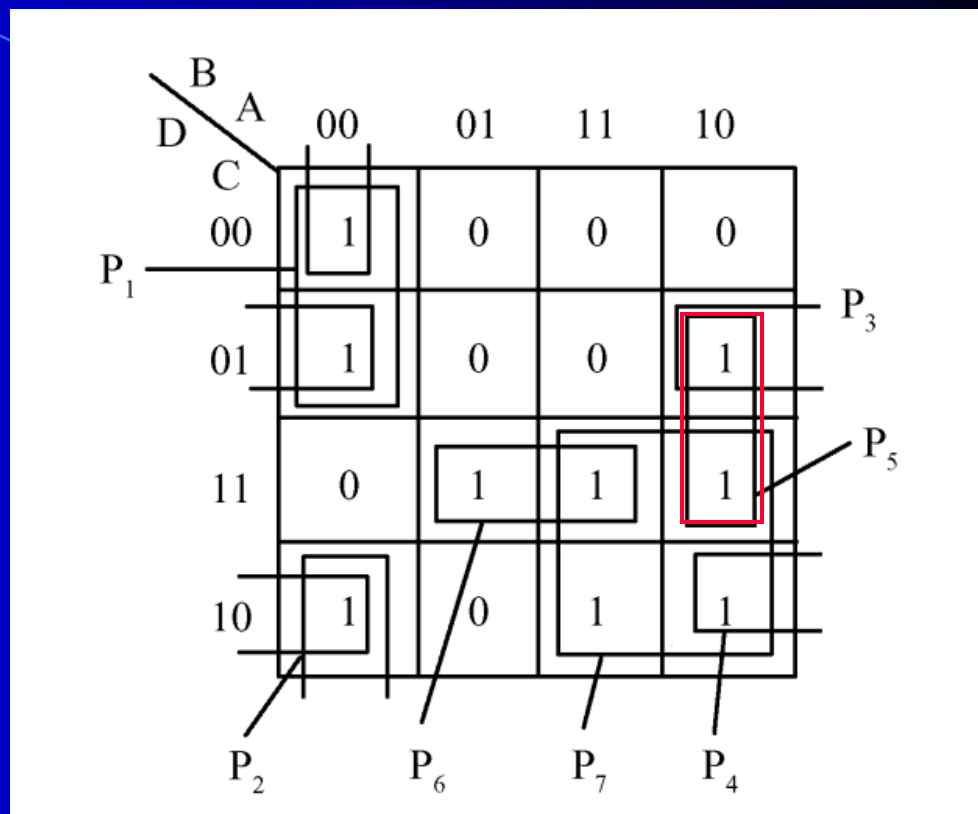


图1-3-19 函数以质蕴涵项表示

(3) 选出必要的质蕴涵项

先把全部质蕴涵项列表如表1-3-10(a)，表的每一行对应一个质蕴涵项，每一列对应一个最小项，把每个质蕴涵项所包含的最小项在表中打“×”，假如， P_4 中包含最小项 m_8 和 m_{10} ，就在 P_4 行的 m_8 ， m_{10} 列打“×”，这张表称为**质蕴涵表**。

表1-3-10(a) 质蕴涵表

$P \backslash m_i$	m_0	m_4	m_6	m_8	m_{10}	m_{11}	m_{13}	m_{14}	m_{15}
P_1	×	×							
P_2	×			×					
P_3		×	×						
P_4				×	×				
P_5			×					×	
P_6							×		×
P_7					×	×		×	×

表1-3-10(a) 质蕴涵表

$P \backslash m_i$	m_0	m_4	m_6	m_8	m_{10}	m_{11}	m_{13}	m_{14}	m_{15}
P_1	×	×							
P_2	×			×					
P_3		×	×						
P_4				×	×				
P_5			×					×	
P_6							×		×
P_7					×	×		×	×

为寻找必要质蕴涵项，先寻找出那些最小项仅仅属于一个质蕴涵项，在表1-3-10(a)中， m_{11} 仅属于 P_7 ， m_{13} 仅属于 P_6 。

如果质蕴涵表的一列中只有一个“×”，那么就表示此最小项仅属于一个质蕴涵项，因此该质蕴涵项就一定是必要的，由于 P_6 ， P_7 已选定为必要质蕴涵项，在选其它必要质蕴涵项时，可把 P_6 ， P_7 从质蕴涵表中删去。

因为 P_6 不仅包含 m_{13} ，还包含 m_{15} ； P_7 不仅包含 m_{11} ，还包含 m_{10} ， m_{14} ， m_{15} ，因此在从表1-3-10(a)中删去 P_6 ， P_7 的同时，可把它们所包含的最小项 m_{10} ， m_{11} ， m_{13} ， m_{14} ， m_{15} 均删去，

表1-3-10(a) 质蕴涵表

$P \backslash m_i$	m_0	m_4	m_6	m_8	m_{10}	m_{11}	m_{13}	m_{14}	m_{15}
P_1	×	×							
P_2	×			×					
P_3		×	×						
P_4				×	×				
P_5			×					×	
P_6							×		×
P_7					×	×		×	×

这样，表1-3-10(a)就可简化为表1-3-10(b)。往后的任务就是要在 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 中选出其余的必要质蕴涵项，使之包含 m_0, m_4, m_6, m_8 。

从简化质蕴涵表中选取必要质蕴涵项有表达式法与行列消去法两个办法。先介绍表达式法。

表1-3-10(b) 简化质蕴涵表

m_i	m_0	m_4	m_6	m_8
P				
P_1	×	×		
P_2	×			×
P_3		×	×	
P_4				×
P_5			×	

表1-3-10(b) 简化质蕴涵表

m_i	m_0	m_4	m_6	m_8
P				
P_1	×	×		
P_2	×			×
P_3		×	×	
P_4				×
P_5			×	

由表1-3-10(b)可知， m_0 包含在 P_1 和 P_2 中，即质蕴涵的组合为 $(P_1 + P_2)$ ， m_8 包含在 P_2 和 P_4 中，即 $(P_2 + P_4)$ 。要同时包含 m_0 ， m_8 的质蕴涵组合为

$$(P_1 + P_2) \cdot (P_2 + P_4) = P_1P_2 + P_1P_4 + P_2 + P_2P_4$$

此式表明要包含 m_0 ， m_8 有四种选取方法：或选取 P_1 “与” P_2 ；或选取 P_1 “与” P_4 ；或选取 P_2 ；或选取 P_2 “与” P_4 。为满足最简“与或”式的要求，应选 P_2 为必要质蕴涵项。

同理，同时包含 m_4 , m_6 的质蕴涵组合为

$$(P_1 + P_3) \cdot (P_3 + P_5) = P_1P_3 + P_1P_5 + P_3 + P_3P_5$$

应选 P_3 为必要质蕴涵项。因此用表格法化简的 F 最简式为

$$F = P_2 + P_3 + P_6 + P_7 = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}C\overline{D} + ACD + BD$$

简化结果与用图1-3-20所示卡诺图简化结果是一致的。

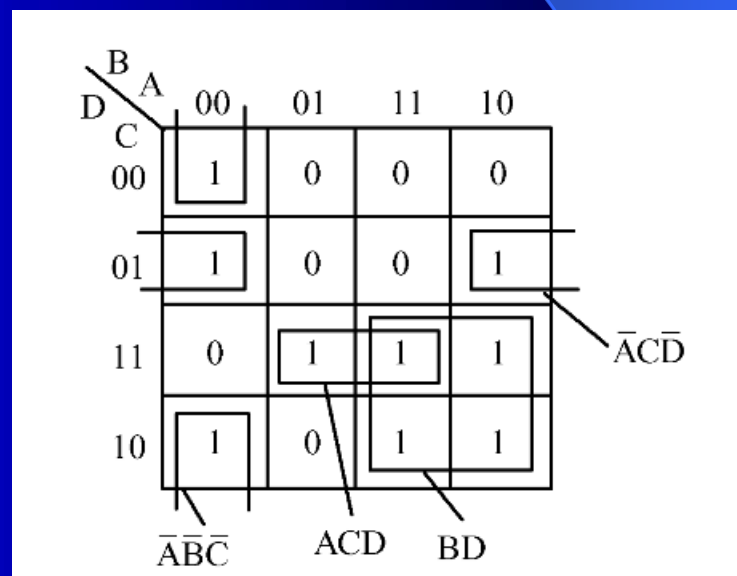


图1-3-20图1-3-19化简结果

行列消去法

- 行列消去法用于简化质蕴涵表中行数 and 列数都比较多的情况。以表1-3-11(a)所示的简化质蕴涵表为例。
- 先进行行消去法。
- 检查表1-3-11(a)可发现， P_5 行所包含的 m_4 也包含在 P_4 之中，而且 P_4 除包含 m_4 外，还包含了 m_6 ，假如选 P_4 也就不必要再考虑 P_5 了，这样 P_5 行就可从表1-3-11(a)中删去。
- 如果有两行（ P_i 和 P_j 行），其中 P_i 行的“×”全部包含在 P_j 行中，那么 P_i 行就可从表中删去。
- 同理， P_6 所包含的 m_{10} 也是 P_3 所包含的。所以 P_6 行也可删去。

表1-3-11(a) 简化质蕴涵表

m_i	m_2	m_4	m_6	m_{10}
P				
P_2	×		×	
P_3	×			×
P_4		×	×	
P_5		×		
P_6				×

表1-3-11(b) 行消去后的简化质蕴涵表

● 这样，行消去后的质蕴涵表如右表1-3-11(b)所示。这就是行消去法。

m_i	m_2	m_4	m_6	m_{10}
P				
P_2	×		×	
P_3	×			×
P_4		×	×	

● 检查表1-3-11(b)发现，在 m_4 列中有“×”的 P_4 行中，在 m_6 列处也有“×”，因此可把 m_6 列删去。同理，在 m_{10} 列中有“×”的 P_3 行中，在 m_2 列处也有“×”，因此可把 m_2 列删去。最后剩下的为 P_3 覆盖 m_{10} ， P_4 覆盖 m_4 ，当然， P_3 ， P_4 也分别覆盖了 m_2 和 m_6 。一般来说，

如果 m_i 列中记有“×”号的各列中，在 m_j 列中也记有“×”号，那么，可将 m_j 删去（注意：删去的是 m_j 列，而不是 m_i 列）。这就是列消去法。

- 经行、列消去后剩下的 P_3 , P_4 就是必要质蕴涵项。
- 对于复杂的质蕴涵表, 行列消去法必须反复进行。必须指出, 行、列消去次序不影响简化结果。
- 通常, 可以将表达式法和行列消去法结合进行。先用行列消去法把质蕴涵项尽量简化, 再用表达式法。行列消去法对未简化的质蕴涵表也是适用的。
- 用表格法化简变量数目较多的逻辑函数, 只要按上述步骤进行, 最终也是可以得到最简函数的。
- 例1-15 用表格法化简逻辑函数

$$F = f(D, C, B, A) = \sum m(0, 1, 3, 6, 7, 9, 11, 12, 13)$$

- (1) 将各最小项按其对应二进制数中“1”的个数由少到多分组排队（表1-3-12(a)）。

表1-3-12(a) 最小项分组排队

组号	最小项 编号	变量				
		<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	
0	0	0	0	0	0	√
1	1	1	0	0	0	√
2	3	1	1	0	0	√
	6	0	1	1	0	√
	9	1	0	0	1	√
	12	0	0	1	1	P_1
3	7	1	1	1	0	√
	11	1	1	0	1	√
4	15	1	1	1	1	√

(2) 求全部质蕴涵项。对表1-3-12(a)进行组间搜索。合并相邻最小项得新的与项记在表1-3-12(b)中，并在相邻最小项右侧打“√”。

表1-3-12(b) (n-1)个变量的与项

组号	最小项 编号	变量				
		A	B	C	D	
0	0,1	—	0	0	0	P_2
1	1,3	1	—	0	0	√
	1,9	1	0	0	—	√
2	3,7	1	1	—	0	√
	3,11	1	1	0	—	√
	6,7	—	1	1	0	P_3
	9,11	1	—	0	1	√
3	7,15	1	1	1	—	√
	11,15	1	1	—	1	√

- 再对表1-3-12(b)进行组间搜索，寻找相邻项，相邻项合并后得新的“与”项记在表1-3-12(c)中，并在相邻项的右侧打“√”。

表1-3-12(c) (n-2)个变量的与项

组号	最小项 编号	变量				
		<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	
1	1,3,9,11	1	—	0	—	P_4
2	3,7,11,15	1	1	—	—	P_5

- (3) 选出必要的质蕴涵项。

- 质蕴涵表如表1-3-13(a)，用行列消去法对表1-3-13(a)进行简化，先进行列消去法， m_0 列的“×”号完全包含在 m_1 列中， m_6 列的“×”号完全包含在 m_7 列中， m_9 列的“×”号完全包含在 m_{11} 列中，可消去 m_0 ， m_6 ， m_9 列，得到表1-3-13(b)，

表1-3-13(a) 质蕴涵表

$P \backslash m_i$	m_0	m_1	m_3	m_6	m_7	m_9	m_{11}	m_{12}	m_{15}
P_1								×	
P_2	×	×							
P_3				×	×				
P_4		×	×			×	×		
P_5			×		×	×			×

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/775102121013012003>