

第10练 利用导数解决实际问题

【基础练】

1. (2004·安徽·高考真题) 某商场从生产厂家以每件 20 元购进一批商品, 若该商品零售价为 p 元, 销量 Q (单位: 件) 与零售价 p (单位: 元) 有如下关系: $Q = 8300 - 170p - p^2$, 求该商品零售价定为多少元时利润 y 最大, 并求出利润 y 的最大值.

2. (2022 秋·上海普陀·高三曹杨二中校考期中) 已知一企业生产某产品的年固定成本为 10 万元, 每生产千件需另投入 2.7 万元, 设该企业年内共生产此种产品 x 千件, 并且全

部销售完, 每千件的销售收入为 $f(x)$ 万元, 且 $f(x) = \begin{cases} 10.8 - \frac{1}{30}x^2, & 0 < x \leq 10 \\ \frac{108}{x} - \frac{1000}{3x^2}, & x > 10 \end{cases}$

(1) 写出年利润 w (万元) 关于年产品 x (千件) 的函数解析式;

(2) 年产量为多少千件时, 该企业生产此产品所获年利润最大? (注: 年利润 = 年销售收入 - 一年总成本)

3. (2007·重庆·高考真题) 用长为 18m 的钢条围成一个长方体形状的框架, 要求长方体的长与宽之比为 2:1, 问该长方体的长、宽、高各为多少时, 其体积最大? 最大体积是多少?

4. (2022 秋·江西宜春·高二江西省宜丰中学校考期中) 如图, 点 C 为某沿海城市的高速公路出入口, 直线 BD 为海岸线, $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$, $BD \perp AB$, $\overset{\frown}{BC}$ 是以 A 为圆心, 半径为 1km 的圆弧型小路. 该市拟修建一条从 C 通往海岸的观光专线, 其中 P 为 $\overset{\frown}{BC}$ 上异于 B, C 的一点, PQ 与 AB 平行, 设 $\angle PAB = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{4} \right)$.

(1) 证明: 观光专线的总长度随 θ 的增大而减小;

(2) 已知新建道路 PQ 的单位成本是翻新道路 $\overset{\frown}{CP}$ 的单位成本的 2 倍. 当 θ 取何值时, 观光专线的修建总成本最低? 请说明理由.

5. (2019·浙江·高三专题练习) 如图所示, 现有一张边长为 10cm 的正三角形纸片 ABC , 在三角形的三个角沿图中虚线剪去三个全等的四边形 ADA_1F_1 , BD_1B_1E , CE_1C_1F (剪去的四边形均有一组对角为直角), 然后把三个矩形 $A_1B_1D_1D$, $B_1C_1E_1E$, $A_1C_1F_1F$ 折起, 构成一个以 $A_1B_1C_1$ 为底面的无盖正三棱柱.

(1) 若所折成的正三棱柱的底面边长与高之比为 3, 求该三棱柱的高;

(2) 求所折成的正三棱柱的体积的最大值.

6. (2004·重庆·高考真题) 某工厂生产一种产品, 已知该产品的月产量 x

吨与每吨产品的价格 P (元) 之间的关系为 $P = 24200 - \frac{1}{5}x^2$, 且生产 x 吨的成本为 $R = 50000 + 200x$ (元). 问该厂每月生产多少吨产品才能使利润达到最大? 最大利润是多少? (利润 = 收入 - 成本)

7. (2021·重庆沙坪坝·重庆一中校考模拟预测) 某种水箱用的“浮球”是由两个相同半球和一个圆柱筒组成, 它的轴截面如图所示, 已知半球的直径是 12cm , 圆柱筒高 6cm , 为增强该“浮球”的牢固性, 给“浮球”内置一“双蝶形”防压卡, 防压卡由金属材料杆 $AC, BD, O_1C, O_1D, O_2A, O_2B$ 及 O_1O_2 焊接而成, 其中 O_1, O_2 分别是圆柱上下底面的圆心, A, B, C, D 均在“浮球”的内壁上, AC, BD 通过“浮球”中心 O , 且 AD, BC 均与圆柱的底面垂直.

(1) 设 O_1C 与圆柱底面所成的角为 θ , 试用 θ 表示出防压卡中四边形 O_1O_2BC 的面积 $f(\theta)$, 并写出 θ 的取值范围;

(2) 研究表明, 四边形 O_1O_2BC 的面积越大, “浮球”防压性越强, 求四边形 O_1O_2BC 面积取最大值时, 点 C 到圆柱上底面的距离 d .

8. (2020·江苏苏州·校联考三模) 植物园拟建一个多边形苗圃, 苗圃的一边紧靠着长度大于 30m 的围墙. 现有两种方案:

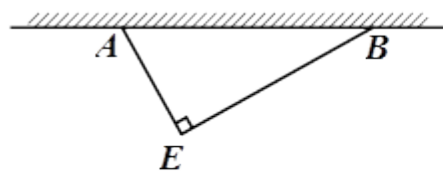


图1

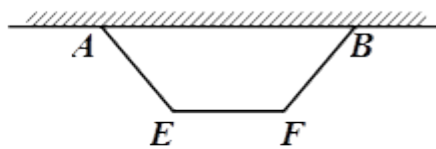


图2

方案① 多边形为直角三角形 AEB ($\angle AEB = 90^\circ$), 如图 1 所示, 其中 $AE + EB = 30\text{m}$;

方案② 多边形为等腰梯形 $AEFB$ ($AB > EF$), 如图 2 所示, 其中

$$AE = EF = BF = 10\text{m}.$$

请你分别求出两种方案中苗圃的最大面积, 并从中确定使苗圃面积最大的方案.

9. (2017 秋·湖南邵阳·高三洞口县第一中学校阶段练习) 已知函数

$$f(x) = \ln x - a(x+1) (a \in \mathbb{R}).$$

(1) 若 $a = 2$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点处的切线 l 的方程;

(2) 若不等式 $f(x) + 2a < 0$ 对任意 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

10. (2023·重庆酉阳·重庆市酉阳第一中学校校考一模) 某公司决定采用增加广告投入和技术改造投入两项措施来获得更大的收益. 通过对市场的预测, 当对两项投入都不大于

3(百万元)时,每投入 x (百万元)广告费,增加的销售额可近似的用函数 $y_1 = -2x^2 + 14x$ (百万元)来计算;每投入 x (百万元)技术改造费用,增加的销售额可近似的用函数

$y_2 = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x$ (百万元)来计算. 现该公司准备共投入 3(百万元), 分别用于广告投入和技术改造投入, 请设计一种资金分配方案, 使得该公司的销售额最大. (参考数据 $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{3} \approx 1.73$)

【提升练】

11. (2016·黑龙江大庆·统考一模) 已知函数 $f(x) = a \ln x + 1 (a > 0)$.

- (1) 当 $a = 1$ 且 $x > 1$ 时, 证明: $f(x) > 3 - \frac{4}{x+1}$;
- (2) 若对 $\forall x \in (1, e)$, $f(x) > x$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;
- (3) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 证明: .

12. (2015·江苏南通·统考一模) 某商场为促销要准备一些正三棱锥形状的装饰品, 用半径为 10cm 的圆形包装纸包装. 要求如下: 正三棱锥的底面中心与包装纸的圆心重合, 包装纸不能裁剪, 沿底边向上翻折, 其边缘恰好达到三棱锥的顶点, 如图所示. 设正三棱锥的底面边长为 x cm, 体积为 V cm³.

- (1) 求 V 关于 x 的函数关系式;
- (2) 在所有能用这种包装纸包装的正三棱锥装饰品中, V 的最大值是多少? 并求此时 x 的值.

13. (2023·全国·高三专题练习) 蜂房是自然界最神奇的“建筑”之一, 如图 1 所示. 蜂房结构是由正六棱柱截去三个相等的三棱锥 $H-ABC$, $J-CDE$, $K-EFA$, 再分别以 AC , CE , EA 为轴将 $\triangle VACH$, $\triangle VCEJ$, $\triangle VEAK$ 分别向上翻转 180° , 使 H , J , K 三点重合为点 S 所围成的曲顶多面体 (下底面开口), 如图 2 所示. 蜂房曲顶空间的弯曲度可用曲率来刻画, 定义其度量值等于蜂房顶端三个菱形的各个顶点的曲率之和, 而每一顶点的曲率规定等于 2π 减去蜂房多面体在该点的各个面角之和 (多面体的面角是多面体的面的内角, 用弧度制表示). 例如: 正四面体在每个顶点有 3 个面角, 每个面角是 $\frac{\pi}{3}$, 所以正四面体在各顶点的曲率为 $2\pi - 3 \times \frac{\pi}{3} = \pi$.

- (1) 求蜂房曲顶空间的弯曲度;
- (2) 若正六棱柱底面边长为 1, 侧棱长为 2, 设 $BH = x$
 - (i) 用 x 表示蜂房 (图 2 右侧多面体) 的表面积 $S(x)$;

(ii) 当蜂房表面积最小时, 求其顶点 S 的曲率的余弦值.

14. (2023·广东·高三专题练习) 某医疗用品生产商用新旧两台设备生产防护口罩, 产品成箱包装, 每箱 500 个.

(1) 若从新旧两台设备生产的产品中分别随机抽取 100 箱作为样本, 其中新设备生产的 100 箱样本中有 10 箱存在不合格品, 旧设备生产的 100 箱样本中有 25 箱存在不合格品, 由样本数据, 填写完成 2×2 列联表, 并依据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 能否认为有“不合格品”与“设备”有关联?

单位: 箱

是否有不合格品 设备	无不合格品	有不合格品	合计
新			
旧			
合计			

(2) 若每箱口罩在出厂前都要做检验, 如检验出不合格品, 则更换为合格品. 检验时, 先从这箱口罩中任取 20 个做检验, 再根据检验结果决定是否对余下的所有口罩做检验. 设每个口罩为不合格品的概率都为 p , 且各口罩是否为不合格品相互独立. 记 20 个口罩中恰有 3 件不合格品的概率为 $f(p)$, 求 $f(p)$ 最大时 p 的值 p_0 .

(3) 现对一箱产品检验了 20 个, 结果恰有 3 个不合格品, 以 (2) 中确定的 p_0 作为 p 的值. 已知每个口罩的检验费用为 0.2 元, 若有不合格品进入用户手中, 则生产商要为每个不合格品支付 5 元的赔偿费用. 以检验费用与赔偿费用之和的期望为决策依据, 是否要对这箱产品余下的 480 个口罩做检验?

附表:

α	0.100	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$.

15. (2023·河北衡水·河北衡水中学校考模拟预测) 某公司准备投产一种新产品, 经测算, 已知每年生产万件的该种产品所需要的总成本 $C(x) = \frac{x^3}{9} - \frac{23}{10}x^2 + 16x + 30$ (万元), 依据产品尺寸, 产品的品质可能出现优、中、差三种情况, 随机抽取了 1000

件产品测量尺寸，尺寸分别在,,,,,（单位：mm）中，经统计得到的频率分布直方图如图所示.

产品的品质情况和相应的价格 m （元/件）与年产量 x 之间的函数关系如下表所示.

产品品质	立品尺寸的范围	价格 m 与产量 x 的函数关系式
优		$m = -x + 34$
中		$m = -\frac{3}{5}x + 25$
差	$[25.46, 25.54]$	$m = -\frac{3}{5}x + 20$

以频率作为概率解决如下问题：

- （1）求实数 a 的值；
- （2）当产量 x 确定时，设不同品质的产品价格为随机变量 ξ ，求随机变量 ξ 的分布列；
- （3）估计当年产量 x 为何值时，该公司年利润最大，并求出最大值.

16.（2022 春·江苏苏州·高二苏州中学校考期末）某企业为确定下一年投入某种产品的研发费用，需了解年研发费用 x （单位：千万元）对年销售量 y （单位：千万件）的影响，统计了近 10 年投入的年研发费用 x_i 与年销售量 y_i （ $i=1,2,\cdots,10$ ）的数据，得到散点图如图所示：

（1）利用散点图判断， $y = a + bx$ 和 $y = c \cdot x^d$ （其中 c, d 为大于 0 的常数）哪一个更适合作为年研发费用 x 和年销售量 y 的回归方程类型（只要给出判断即可，不必说明理由）.

（2）对数据作出如下处理：令 $u_i = \ln x_i$ ，，得到相关统计量的值如下表：

$\sum_{i=1}^{10} u_i v_i$	$\sum_{i=1}^{10} u_i$	$\sum_{i=1}^{10} v_i$	$\sum_{i=1}^{10} u_i^2$
30.5	15	15	46.5

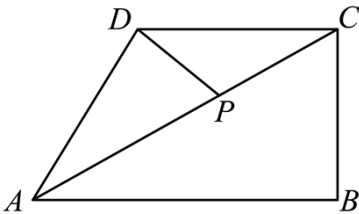
根据（1）的判断结果及表中数据，求 y 关于 x 的回归方程；

（3）已知企业年利润 z （单位：千万元）与 x, y 的关系为 $z = \frac{27}{e}y - x$ （其中 $e = 2.71828\cdots$ ），根据（2）的结果，要使得该企业下一年的年利润最大，预计下一年应投入多少研发费用？

附：对于一组数据， $(u_2, v_2), \dots$ ，其回归直线 $v = \alpha + \beta u$

的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\beta = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}$, $\alpha = \bar{v} - \beta \bar{u}$.

17. (2022·全国·高三专题练习)如图,某生态农庄内有一直角梯形区域 $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB \perp BC$, $AB = 3$ 百米, $CD = 1$ 百米. 该区域内原有道路 AC , 现新修一条直道 DP (宽度忽略不计), 点 P 在道路 AC 上 (异于 A , C 两点), $\angle BAC = \frac{\pi}{6}$, $\angle DPA = \theta$.



- (1) 用 θ 表示直道 DP 的长度;
- (2) 计划在 $\triangle ADP$ 区域内种植观赏植物, 在 $\triangle CDP$ 区域内种植经济作物. 已知种植观赏植物的成本为每平方百米 2 万元, 种植经济作物的成本为每平方百米 1 万元, 新建道路 DP 的成本为每百米 1 万元, 求以上三项费用总和的最小值.

18. (2011·江苏·高考真题) 请你设计一个包装盒, 如图所示, $ABCD$ 是边长为 60cm 的正方形硬纸片, 切去阴影部分所示的四个全等的等腰直角三角形, 再沿虚线折起, 使得四个点重合于图中的点 P , 正好形成一个正四棱柱形状的包装盒, E 、 F 在 AB 上是被切去的等腰直角三角形斜边的两个端点, 设 $AE = FB = x$

- (1) 若广告商要求包装盒侧面积 S (cm) 最大, 试问 x 应取何值?
- (2) 若广告商要求包装盒容积 V (cm) 最大, 试问 x 应取何值? 并求出此时包装盒的高与底面边长的比值.

【能力练】

19. (2021·福建泉州·统考二模) 来公司为了了解年宣传费 x (单位: 十万元) 对年利润 y (单位: 十万元) 的影响, 统计甲、乙两个地区 5 个营业网点近 10 年的年宣传费和利润相关数据, 公司采用相关指标衡量宣传费是否产生利润效益, 产生利润效益的年份用 “+”, 反之用 “-” 号记录.

年份	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
甲 1	+	+	-	+	+	+	+	-	+	+
甲 2	+	+	+	-	+	+	-	+	+	+

甲 3	+	+		+	+	+	+		+	+
乙 1	+				+	+			+	+
乙 2	+	+			+	+				+

（1）根据以上信息，填写下而2×2列联表，并根据列联表判断是否有 95%的把握认为宣传费是否产生利润效益与地区有关；

	产生利润效益	未产生利润效益	总计
甲地			
乙地			
总计			

（2）现将甲、乙两地相关数据作初步处理，得到相应散点图后，根据散点图分别选择 $\hat{y}=a+b\sqrt{x}$ 和 $\hat{y}=c+d\ln x$ 两个模型拟合甲、乙两地年宣传费与年利润的关系，经过数据处理和计算，得到以下表格信息：

	回归方程	残差平方和	总偏差平方和
甲地		0.032	1.021
乙地	$\hat{y}=1.3+1.8\ln x$	0.142	11.614

根据上述信息，某同学得出“因为甲地模型的残差平方和小于乙地模型的残差平方和，所以甲地的模型拟合度高于乙地”的判断，根据你所学的统计知识，分析上述判断是否正确，并给出适当的解释；

（3）该公司选择上述两个模型进行预报，若欲投入 36 万元的年宣传费，如何分配甲、乙两地的宣传费用，可以使两地总的年利润达到最大.

参考公式：相关指数 $R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^n(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n(y_i-\bar{y})^2}$

附：

$P(K^2\geq k_0)$	0.05	0.025	0.010
k_0	3.841	5.024	6.635

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(c+d)(b+d)}$$

20. (2022·江苏南通·模拟预测) 某农业观光区的平面示意图如图所示, 其中矩形 $ABCD$ 的长 $AB=2$ 千米, 宽 $AD=1$ 千米, 半圆的圆心 P 为 AB 中点, 为了便于游客观光休闲, 在观光区铺设一条由圆弧 AE 、线段 EF 、 FC 组成的观光道路, 其中线段 EF 经过圆心 P , 点 F 在线段 CD 上 (不含线段端点 C, D), 已知道路 AE, FC 的造价为每千米 20 万元, 道路 EF 造价为每千米 70 万元, 设 $\angle APE=\theta$, 观光道路的总造价为 y 万元.

(1) 试求 y 与 θ 的函数关系式 $y=f(\theta)$, 并写出 θ 的取值范围;

(2) 当 θ 为何值时, 观光道路的总造价 y 最小.

21. (2023·全国·高二专题练习) 随着网络技术的迅速发展, 直播带货成为网络销售的新梁道. 某服装品牌为了给所有带货网络平台分配合理的服装量, 随机抽查了 100 个带货平台的销售情况, 销售每件服装平均所需时间情况如下频率分布直方图.

(1) 求 m 的值, 并估计出这 100 个带货平台销售每件服装所用时间的平均数 a 和中位数;

(2) 假设该服装品牌所有带货平台销售每件服装平均所需时间 X 服从正态分布, 其中 μ 近似为 a , $\sigma^2=100$. 若该服装品牌所有带货平台约有 10000 个, 销售每件服装平均所需时间在范围内的平台属于“合格平台”. 为了提升平台销售业务, 该服装品牌总公司对平台进行奖罚制度, 在时间大于 44.4 分钟的平台中, 每个平台每卖一件扣除

$\frac{100s}{317}$ ($0 < s < 10$); 在时间小于 14.4 分钟的平台中, 每卖一件服装进行奖励 $\frac{s^3}{23}$ 元, 以资鼓励; 对于“合格平台”每卖一件服装奖励 1 元. 求该服装品牌总公司在所有平台均销售一件服装时总共需要准备多少资金作为本次平台销售业务提升. (结果保留整数)

附: 若 X 服从正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则, . 参考数据: $\sqrt{6} \approx 2.45$.

22. (2022·北京西城·校考模拟预测) 某艺术品公司欲生产一款迎新春工艺礼品, 该礼品是由玻璃球面和该球的内接圆锥组成, 圆锥的侧面用于艺术装饰, 如图 1. 为了便于设计, 可将该礼品看成是由圆 O 及其内接等腰三角形 ABC 绕底边 BC 上的高所在直线 AO 旋转 180° 而成, 如图 2. 已知圆 O 的半径为 10cm, 设 $\angle BAO=\theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 圆锥的侧面积为 $S\text{cm}^2$ (S 圆锥的侧面积 $= \pi Rl$ (R -底面圆半径, l -母线长))

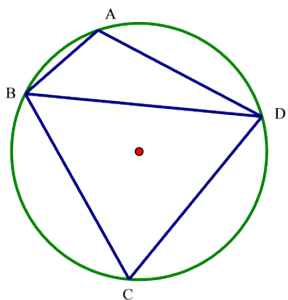
(1) 求 S 关于 θ 的函数关系式;

(2) 为了达到最佳观赏效果, 要求圆锥的侧面积 S 最大. 求 S 取得最大值时腰 AB 的长度

23. (2019·江苏南京·统考一模)某城市在进行规划时,准备设计一个圆形的开放式公园.为达到社会和经济效益双丰收.园林公司进行如下设计,安排圆内接四边形 $ABCD$ 作为绿化区域,其余作为市民活动区域.其中 $\triangle ABD$ 区域种植花木后出售, $\triangle BCD$ 区域种植草皮后出售,已知草皮每平方米售价为 a 元,花木每平方米的售价是草皮每平方米售价的三倍.若 $BC = 6 \text{ km}$, $AD = CD = 4 \text{ km}$

(1) 若 $BD = 2\sqrt{7} \text{ km}$, 求绿化区域的面积;

(2) 设 $\angle BCD = \theta$, 当 θ 取何值时, 园林公司的总销售金额最大.



24. (2015·江苏·高考真题)某山区外围有两条相互垂直的直线型公路,为进一步改善山区的交通现状,计划修建一条连接两条公路的山区边界的直线型公路,记两条相互垂直的公路为 l_1, l_2 , 山区边界曲线为 C , 计划修建的公路为 l , 如图所示, M, N 为 C 的两个端点,测得点 M 到 l_1, l_2 的距离分别为 5 千米和 40 千米, 点 N 到 l_1, l_2 的距离分别为 20 千米和 2.5 千米, 以 l_1, l_2 所在的直线分别为 x, y 轴, 建立平面直角坐标系 xOy , 假设曲线 C 符合函数 $y = \frac{a}{x^2 + b}$ (其中 a, b 为常数) 模型.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 设公路 l 与曲线 C 相切于 P 点, P 的横坐标为 t .

① 请写出公路 l 长度的函数解析式 $f(t)$, 并写出其定义域;

② 当 t 为何值时, 公路 l 的长度最短? 求出最短长度.

【磨尖练】

25. (2022·全国·高三专题练习)如图, 已知边长为 2 的正方形材料 $ABCD$, 截去如图所示的阴影部分后, 可焊接成一个正四棱锥的封闭容器. 设 $\angle FCB = \theta$.

(1) 用 θ 表示此容器的体积;

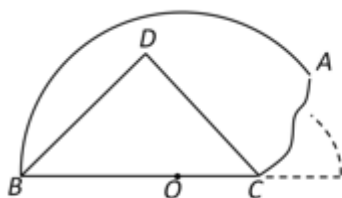
(2) 当此容器的体积最大时, 求 $\tan \theta$ 的值.

26. (2022·全国·高三专题练习)某房地产开发商在其开发的某小区前修建了一个弓形景观湖. 如图, 该弓形所在的圆是以 AB 为直径的圆, 且 $AB = 300$ 米, 景观湖边界 CD 与 AB

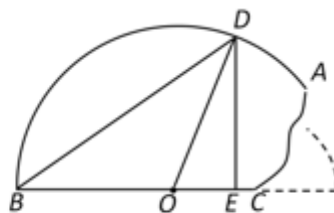
平行且它们间的距离为 $50\sqrt{2}$ 米. 开发商计划从 A 点出发建一座景观桥 (假定建成的景观桥的桥面与地面和水面均平行), 桥面在湖面上的部分记作 PQ . 设 $\angle AOP = 2\theta$.

- (1) 用 θ 表示线段 PQ , 并确定 $\sin 2\theta$ 的范围;
- (2) 为了使小区居民可以充分地欣赏湖景, 所以要将 PQ 的长度设计到最长, 求 PQ 的最大值.

27. (2018·江苏扬州·统考一模) 已知一块半径为 r 的残缺的半圆形材料 ABC , O 为半圆的圆心, $OC = \frac{1}{2}r$, 残缺部分位于过点 C 的竖直线的右侧. 现要在这块材料上截出一个直角三角形, 有两种设计方案: 如图甲, 以 BC 为斜边; 如图乙, 直角顶点 E 在线段 OC 上, 且另一个顶点 D 在 $\widehat{AB}$ 上. 要使截出的直角三角形的面积最大, 应该选择哪一种方案? 请说明理由, 并求出截得直角三角形面积的最大值.



图甲



图乙

28. (2023 秋·高二课时练习) 已知抛物线 $E: y^2 = x$ 与圆 $M: (x-4)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相交于 A, B, C, D 四个点.

- (1) 当 $r = 2$ 时, 求四边形 $ABCD$ 面积;
- (2) 当四边形 $ABCD$ 的面积最大时, 求圆 M 的半径 r 的值.

参考答案:

1. 该商品零售价定为每件 30 元, 所获利润最大为 23000 元

【分析】先求得 y 的表达式, 然后结合导数求得 y 的最大值.

【详解】依题意 $y = (p - 20) \cdot Q = (p - 20) \cdot (8300 - 170p - p^2)$

$$= -p^3 - 150p^2 + 11700p - 166000 \quad (p \geq 20),$$

$$y' = -3p^2 - 300p + 11700 = -3(p - 30)(p + 130),$$

所以当 $20 \leq p < 30$ 时, $y' > 0$, 函数递增; 当 $p > 30$ 时, $y' < 0$, 函数递减.

所以当 $p = 30$ 时,

y 取得极大值也即是最大值 $-30^3 - 150 \times 30^2 + 11700 \times 30 - 166000 = 23000$ 元.

$$2. (1) W = \begin{cases} 8.1x - \frac{1}{30}x^3 - 10, & 0 < x \leq 10 \\ 98 - \left(\frac{1000}{3x} + 2.7x \right), & x > 10 \end{cases}; (2) 9 \text{ 千件}.$$

【分析】(1) 根据题意, 结合已知条件, 即可容易求得结果;

(2) 由 (1) 中所求函数解析式, 分段考虑函数最值, 注意利用导数即可.

【详解】(1) 由题意得

$$W = \begin{cases} \left(10.8 - \frac{1}{30}x^2 \right) \times x - 2.7x - 10, & 0 < x \leq 10 \\ \left(\frac{108}{x} - \frac{1000}{3x^2} \right) \times x - 2.7x - 10, & x > 10 \end{cases}$$

$$\text{即 } W = \begin{cases} 8.1x - \frac{1}{30}x^3 - 10, & 0 < x \leq 10 \\ 98 - \left(\frac{1000}{3x} + 2.7x \right), & x > 10 \end{cases}$$

(2) ① 当 $0 < x \leq 10$ 时, $W = 8.1x - \frac{1}{30}x^3 - 10$,

$$\text{则 } W' = 8.1 - \frac{1}{10}x^2 = \frac{81 - x^2}{10} = \frac{(9+x)(9-x)}{10},$$

因为 $0 < x \leq 10$, 所以当 $0 < x < 9$ 时, $W' > 0$, 则 W 递增;

当 $9 < x \leq 10$ 时, $W' < 0$, 则 W 递减.

所以当 $x = 9$ 时, W 取最大值 $\frac{193}{5} = 38.6$ 万元.

② 当 $x > 10$ 时,

$$W = 98 - \left(\frac{1000}{3x} + 2.7x \right) \leq 98 - 2\sqrt{\frac{1000}{3x} \times 2.7x} = 38.$$

当且仅当 $\frac{1000}{3x} = 2.7x$, 即 $x = \frac{100}{9}$ 时等号成立.

综上, 当年产量为 9 千件时, 该企业生产此产品所获年利润最大.

【点睛】本题考查函数模型的应用, 涉及利用导数求利润的最大值, 属基础题.

3. 长为 2 m , 宽为 1 m , 高为 $\frac{3}{2}\text{ m}$ 时, 体积最大, 最大体积为 3 m^3

【分析】设出长方体的宽为 $x\text{ m}$, 表达出长方体的长和高, 从而体积 $V = -6x^3 + 9x^2$, 并根据长宽高均大于 0, 求出 $0 < x < \frac{3}{2}$, 求导后得到 $V = -6x^3 + 9x^2$ 的单调性和极值, 最值情况, 并确定此时的长、宽、高.

【详解】设长方体的宽为 $x\text{ m}$, 则长方体的长为 $2x\text{ m}$, 故长方体的高为 $\frac{18-12x}{4} = \left(\frac{9}{2} - 3x\right)\text{ m}$,

$$\text{由} \begin{cases} x > 0 \\ 2x > 0 \\ \frac{9}{2} - 3x > 0 \end{cases}, \text{解得: } 0 < x < \frac{3}{2},$$

设长方体的体积为 V ,

$$\text{故 } V = 2x \cdot x \cdot \left(\frac{9}{2} - 3x\right) = -6x^3 + 9x^2, \quad 0 < x < \frac{3}{2}$$

$$\text{则 } V' = -18x^2 + 18x,$$

$$\text{令 } V' = -18x^2 + 18x > 0, \text{ 解得: } 0 < x < 1,$$

$$\text{令 } V' = -18x^2 + 18x < 0, \text{ 解得: } 1 < x < \frac{3}{2},$$

故 $V = -6x^3 + 9x^2$ 在 $0 < x < 1$ 上单调递增, 在 $1 < x < \frac{3}{2}$ 上单调递减,

故 $V = -6x^3 + 9x^2$ 在 $x = 1$ 处取得极大值, 也是最大值, 最大值为 $V = -6 + 9 = 3\text{ m}^3$,

此时长为 $2x = 2\text{ m}$, 宽为 1 m , 高为 $\frac{9}{2} - 3x = \frac{3}{2}\text{ m}$.

4. (1) 证明见解析; (2) $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, 观光专线的修建总成本最低, 理由见解析.

【解析】(1) 先由题意得到 $\angle CAP = \frac{\pi}{4} - \theta$, 所以 $CP = \frac{\pi}{4} - \theta$, 得出观光专线的总长度, 再由导数的方法判定其单调性, 即可证明结论成立;

(2) 设翻新道路的单位成本为 $a(a > 0)$, 总成本为 $g(\theta)$, 由 (1), 根据题中条件, 得到, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, 对其求导, 根据导数的方法求出最值, 即可得出结果.

【详解】(1) 由题意, $\angle CAP = \frac{\pi}{4} - \theta$, 所以 $CP = \frac{\pi}{4} - \theta$,

$$\text{又 } PQ = AB - AP \cos \theta = 1 - \cos \theta,$$

所以观光专线的总长度，

因为当 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 时，，

所以 $f(\theta)$ 在上单调递减，即观光专线的总长度随 θ 的增大而减小.

(2) 设翻新道路的单位成本为 $a(a > 0)$ ，总成本为 $g(\theta)$ ，

由题意可得， $g(\theta) = a\left(\frac{\pi}{4} - \theta + 2 - 2\cos\theta\right) = a\left(-\theta - 2\cos\theta + \frac{\pi}{4} + 2\right)$ ， $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ ，

$g'(\theta) = a(-1 + 2\sin\theta)$ ，令 $g'(\theta) = 0$ ，得 $\sin\theta = \frac{1}{2}$ ，

因为 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ ，所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$ ，

当 $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ 时， $g'(\theta) < 0$ ，当 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{4}$ 时， $g'(\theta) > 0$.

所以，当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时， $g(\theta)$ 最小.

故当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时，观光专线的修建总成本最低.

【点睛】思路点睛：

导数的方法求函数最值的一般思路：

(1) 先对函数求导，根据导数的方法判定函数在给定区间的单调性；

(2) 由函数在给定区间的单调性，即可求出最值.

5. (1) $\frac{10(2\sqrt{3}-3)}{3} \text{ cm}$ (2) $\frac{500}{27} \text{ cm}^3$

【分析】(1) 先设 $A_1D = x$ ，得到 AD, A_1B_1 ，根据 $\frac{A_1B_1}{A_1D} = 3$ ，即可求出结果；

(2) 先由 (1) 得到 $A_1B_1 = 10 - 2\sqrt{3}x > 0$ ， $0 < x < \frac{5\sqrt{3}}{3}$ ，表示出三棱柱的体积 $V(x) = \frac{1}{2}(10 - 2\sqrt{3}x)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times x$ ，

用导数的方法求出其最值即可.

【详解】(1) 设 $A_1D = x$ ，则 $AD = \sqrt{3}x$ ，

$$A_1B_1 = 10 - 2\sqrt{3}x.$$

因为 $\frac{A_1B_1}{A_1D} = \frac{10 - 2\sqrt{3}x}{x} = 3$ ，

所以 $x = \frac{10(2\sqrt{3}-3)}{3} (\text{cm})$.

答：该三棱柱的高为 $\frac{10(2\sqrt{3}-3)}{3} \text{ cm}$.

(2) 因为 $A_1B_1 = 10 - 2\sqrt{3}x > 0$, 所以 $0 < x < \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

$$\text{三棱柱的体积 } V(x) = \frac{1}{2}(10 - 2\sqrt{3}x)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times x$$

$$= \sqrt{3} \left(3x^3 - 10\sqrt{3}x^2 + 25x \right) \left(0 < x < \frac{5\sqrt{3}}{3} \right),$$

$$\text{所以 } V'(x) = \sqrt{3}(9x^2 - 20\sqrt{3}x + 25) = \sqrt{3}(3\sqrt{3}x - 5)(\sqrt{3}x - 5).$$

因为当 $0 < x < \frac{5\sqrt{3}}{9}$ 时, $V'(x) > 0$, $V(x)$ 单调递增,

当 $\frac{5\sqrt{3}}{9} < x < \frac{5\sqrt{3}}{3}$ 时, $V'(x) < 0$, $V(x)$ 单调递减,

$$\text{所以 } x = \frac{5\sqrt{3}}{9} \text{ 时, } V(x)_{\max} = \frac{500}{27} (\text{cm}^3).$$

答: 该三棱柱的体积为 $\frac{500}{27} \text{cm}^3$.

【点睛】本题主要考查函数的模型, 以及导数的应用, 熟记导数的方法求函数的最值即可, 属于常考题型.

6. 315 万元

【详解】解: 每月生产 x 吨时的利润为

$$f(x) = (24200 - \frac{1}{5}x^2)x - (50000 + 200x) = -\frac{1}{5}x^3 + 24000x - 50000 (x \geq 0)$$

$$\text{由 } f'(x) = -\frac{3}{5}x^2 + 24000 = 0, \text{ 解得 } x_1 = 200, x_2 = -200 (\text{舍去})$$

$\because$ 当 $0 < x < 200$ 时, $f'(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(0, 200)$ 单调递增

$\because x > 200$ 时, $f'(x) < 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(200, +\infty)$ 单调递减

故 $x = 200$ 就是最大值点, 且最大值 $f(200) = -\frac{1}{5} \times 200^3 + 24000 \times 200 - 50000 = 3150000$ (元).

所以每月生产 200 吨产品时, 利润达到最大, 最大利润为 315 万元.

答: 每月生产 200 吨产品时利润达到最大, 最大利润为 315 万元.

7. (1) $f(\theta) = 36\sin\theta\cos\theta + 36\cos\theta$, 其中 θ 的取值范围是 (2) 四边形 O_1O_2BC 面积取最大值时, 点 C 到圆柱上底面的距离为 3cm.

【分析】(1) 先证明 $O_1O_2 \parallel BC$, 又因为 $O_1O_2 \perp BC$, 则四边形 O_1O_2BC 是梯形, 用 O_1C 与圆柱底面所成的角 θ 来表示梯形的上底、下底和高, 根据梯形面积公式即可求得四边形 O_1O_2BC 面积;

(2) 由 (1) 得四边形 O_1O_2BC 面积的解析式 $f(\theta)$, 对函数 $f(\theta)$ 求导, 判断单调性, 求出极值点, 由此得出点 C 到圆柱上底面的距离 d .

【详解】解: (1) 因为 O_1 、 O_2 分别是圆柱上、下底面的圆心, 所以 O_1O_2 与圆柱的底面垂直;

因为 BC 与圆柱的底面垂直, 所以 $O_1O_2 \parallel BC$;

在梯形 O_1O_2BC 中, $O_1O_2=6$, ,

设梯形的高 $O_1H=6\cos q$;

所以梯形 O_1O_2BC 的面积为

$$\begin{aligned} f(q) &= \frac{1}{2}(O_1O_2 + BC) \cdot O_1H \\ &= \frac{1}{2} \cdot [6 + (12\sin q + 6)] \cdot 6\cos q \\ &= 36\sin q \cos q + 36\cos q \end{aligned}$$

其中 θ 的取值范围是:

(2) 由 (1) 得 $f(q) = 36\sin q \cos q + 36\cos q$,

$$f'(q) = -36(2\sin^2 q + \sin q - 1) = -36(2\sin q - 1)(\sin q + 1) ,$$

令 $f'(\theta) = 0$, 解得 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ 或 $\sin \theta = -1$ (不合题意, 舍去);

又 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$;

列表如下:

θ		$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$	+	0	
$f(\theta)$	单调增	极大值	单调减

所以当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(\theta)$ 取得极大值, 即是最大值, 此时 $d = 6\sin \theta = 6 \times \frac{1}{2} = 3$;

所以四边形 O_1O_2BC 面积取最大值时, 点 C 到圆柱上底面的距离为 $d = 3\text{cm}$.

【点睛】 本题考查有参数表示四边形的面积, 以及利用导数求极值的实际应用, 属于中档题.

8. 方案①, ②苗圃的最大面积分别为 $\frac{225}{2}m^2, 75\sqrt{3}m^2$, 建苗圃时用方案②, 且 $\angle BAE = \frac{\pi}{3}$

【详解】 试题分析: 方案① 多边形为直角三角形, 已知两边之和为定值, 求两边之积最大值, 这可利用基

本不等式求解: 设 $AE = x$, 则 $S_1 = \frac{1}{2} \times (30 - x)x \leq \frac{1}{2} \left[\frac{x + (30 - x)}{2} \right]^2 = \frac{225}{2}$ (当且仅当 $x = 15$ 时, “=”成立). 方

案② 多边形为等腰梯形, 利用梯形面积公式得函数关系式, 据题意可设角 $\angle BAE = \theta$ 为自变量,

$S_2 = 100\sin \theta (1 + \cos \theta)$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 再利用导数求其最值: 当 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时, $(S_2)_{\max} = 75\sqrt{3}$

. 最后比较最值大小, 确定方案.

试题解析: 解: 设方案①, ②中多边形苗圃的面积分别为 S_1, S_2 .

方案①设 $AE = x$, 则 $S_1 = \frac{1}{2} \times (30 - x)x \leq \frac{1}{2} \left[\frac{x + (30 - x)}{2} \right]^2 = \frac{225}{2}$ (当且仅当 $x = 15$ 时, “=”成立).

方案②设 $\angle BAE = \theta$, 则 $S_2 = 100 \sin \theta (1 + \cos \theta), \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

由得, $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ($\cos \theta = -1$ 舍去)

因为 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 列表:

所以当 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时, $(S_2)_{\max} = 75\sqrt{3}$

因为 $\frac{225}{2} < 75\sqrt{3}$, 所以建苗圃时用方案②, 且 $\angle BAE = \frac{\pi}{3}$.

答: 方案①, ②苗圃的最大面积分别为 $\frac{225}{2} m^2, 75\sqrt{3} m^2$, 建苗圃时用方案②, 且 $\angle BAE = \frac{\pi}{3}$

考点: 利用基本不等式求最值, 利用导数求最值

9. (1) $x + y + 3 = 0$; (2) .

【详解】试题分析: (1) 求导得 $f'(x) = \frac{1}{x} - a$, 利用导数求得斜率为 $k = f'(1) = 1 - a$, 而切点, 由此求得切线方程, 分别令 $y = 0, x = 0$, 求得 $x_0 = \frac{a+1}{a-1}, y_0 = -1 - a$, 代入 $\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2}$ 后利用二次函数求最值的方法求得当 $a = 2$ 时有最小值, 由此求得切线方程为 $x + y + 3 = 0$; (2) 构造函数 $g(x) = f(x) + 2a = \ln x - a(x+1) + 2a$, 利用 $g(x)$ 的导数, 讨论函数 $g(x)$ 的单调区间与最值, 由此求得实数 a 的取值范围是.

试题解析:

(1) $f'(x) = \frac{1}{x} - a$, 切线斜率 $k = f'(1) = 1 - a$, 切点为, 所以切线 l 的方程为 $y + 2a = (1 - a)(x - 1)$, 分别令 $y = 0, x = 0$, 得切线与 x 轴, y 轴的交点坐标为, 当 $\frac{1}{a+1} = -\frac{-4}{2 \times 5} = \frac{2}{5}$, 即 $a = \frac{3}{2}$ 时, $\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2}$ 取得最小值, 但 $a > 1$ 且 $a \in \mathbb{N}^*$, 所以当 $a = 2$ 时, $\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2}$ 取得最小值. 此时, 切线 l 的方程为 $y + 4 = (1 - 2)(x - 1)$, 即 $x + y + 3 = 0$.

(2) 设 $g(x) = f(x) + 2a = \ln x - a(x+1) + 2a$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x} - a = -\frac{ax-1}{x}$, ①当 $a \leq 0$ 时, 因为

$x \in (1, +\infty)$, $\therefore g'(x) > 0$, $\therefore g(x)$ 在上单调递增, $\therefore g(x) > g(1) = 0$, $\therefore a \leq 0$ 不符合题意. ②

当 $0 < \frac{1}{a} \leq 1$, 即 $a \geq 1$ 时, $g'(x) = -\frac{ax-1}{x} = -\frac{a\left(x-\frac{1}{a}\right)}{x} < 0$ 在上恒成立, $\therefore g(x)$ 在

上单调递减, 于是 $g(x) < g(1) = 0$, $\therefore a \geq 1$ 满足题意. ③ 当 $\frac{1}{a} > 1$, 即时, 由 $g'(x) > 0$, 可得 $1 < x < \frac{1}{a}$, 由

$g'(x) < 0$, 可得 $x > \frac{1}{a}$, $\therefore g(x)$ 在 $\left(1, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减, $\therefore g\left(\frac{1}{a}\right) > g(1) = 0$, $\therefore 0 < a < 1$

不符合题意. 综上所述, 实数 a 的取值范围是.

考点: 导数与切线, 导数与不等式.

【方法点睛】本题主要考查利用导数求解有关切线的问题, 考查利用导数研究不等式的方法, 考查分类讨论的数学思想. 第一步根据题意, 先利用函数 $f(x)$ 的导数, 利用切点和斜率, 求出切线方程, 这个方程是含有参数 a 的, 需要用一个方程将其解出, 故令 $x=0, y=0$ 求出 x_0, y_0 , 代入题目所给要求最小值的式子, 利用最小值求出参数 a 的值.

10. 当该公司用于广告投入 1.27(百万元), 用于技术改造投入 1.73(百万元)时, 公司将有最大的销售额.

【分析】根据条件, 列出销售额增加值的函数关系式, 再利用导数求得单调性及最值, 分析即可得答案.

【详解】设 3 百万元中技术改造投入为 x (百万元), 广告费投入为 $3-x$ (百万元), 则广告收入带来的销售额增加值为 $-2(3-x)^2 + 14(3-x)$ (百万元), 技术改造投入带来的销售额增加值为 $-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x$ (百万元),

所以, 投入带来的销售额增加值 $F(x) = -2(3-x)^2 + 14(3-x) - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x$

整理上式得 $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x + 24$,

因为 $F'(x) = -x^2 + 3$, 令 $F'(x) = 0$, 解得 $x = \sqrt{3}$ 或 $x = -\sqrt{3}$ (舍去),

当 $x \in [0, \sqrt{3})$ 时, $F'(x) > 0$, $F(x)$ 为增函数,

当 $x \in (\sqrt{3}, 3]$ 时, $F'(x) < 0$, $F(x)$ 为减函数,

所以当 $x = \sqrt{3} \approx 1.73$ 时, $F(x)$ 取得最大值.

所以, 当该公司用于广告投入 1.27(百万元), 用于技术改造投入 1.73(百万元)时, 公司将有最大的销售额.

11. (1) 证明见解析; (2) $a \geq e-1$; (3) 证明见解析.

【详解】试题分析: (1) 当 $a=1$ 且 $x>1$ 时, 构造函数 $m(x) = \ln x + \frac{4}{x+1} - 2$, 利用函数单调性和导数之

间的关系即可证明: $f(x) > 3 - \frac{4}{x-1}$; (2

根据函数最值和函数导数之间的关系将不等式恒成立问题进行转化，求实数 a 的取值范围；（3）根据函数的单调性的性质，利用放缩法即可证明不等式。

试题解析：（1）证明：要证 $f(x) > 3 - \frac{4}{x+1}$ ，即证 $\ln x + \frac{4}{x+1} - 2 > 0$ ，

$$\text{令 } m(x) = \ln x + \frac{4}{x+1} - 2 \text{ 则 } m'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0$$

$\therefore m(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增， $\therefore m(x) > m(1) = 0$ ，

$\therefore \ln x + \frac{4}{x+1} - 2 > 0$ ，即 $f(x) > 3 - \frac{4}{x+1}$ 成立。

（2）解法一：由 $f(x) > x$ 且 $x \in (1, e)$ 可得 $a > \frac{x-1}{\ln x}$

$$\text{令 } h(x) = \frac{x-1}{\ln x}, \quad h'(x) = \frac{\ln x - 1 + \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$\text{由（1）知 } \ln x - 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x+1} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)} > 0$$

$\therefore h'(x) < 0$ 函数 $h(x)$ 在 $(1, e)$ 单调递增，当 $x \in (1, e)$ 时， $h(x) < h(e) = e - 1$

$\therefore a \geq e - 1$ 。

【解法二】：令 $h(x) = a \ln x + 1 - x$ ，则 $h'(x) = \frac{a}{x} - 1 = \frac{a-x}{x}$ ，

当 $a > e$ 时， $h'(x) > 0$ ，函数 $h(x)$ 在 $(1, e)$ 上是增函数，有 $h(x) > h(1) = 0$ ，

当 $1 < a \leq e$ 时， $\therefore$ 函数 $h(x)$ 在 $(1, a)$ 上递增，在 (a, e) 上递减，

对 $\forall x \in (1, e)$ ， $f(x) > x$ 恒成立，只需 $h(e) \geq 0$ ，即 $a \geq e - 1$ 。

当 $a \leq 1$ 时，函数 $h(x)$ 在 $(1, e)$ 上递减，对 $\forall x \in (1, e)$ ， $f(x) > x$ 恒成立，只需 $h(e) \geq 0$ ，

而 $h(e) = a + 1 - e < 0$ ，不合题意，

综上得对 $\forall x \in (1, e)$ ， $f(x) > x$ 恒成立， $a \geq e - 1$ 。

【解法三】：由 $f(x) > x$ 且 $x \in (1, e)$ 可得 $\frac{1}{a} < \frac{\ln x}{x-1}$

由于 $\frac{\ln x}{x-1}$ 表示两点 $A(x, \ln x)$ ， $B(1, 0)$ 的连线斜率，

由图象可知 $y = \frac{\ln x}{x-1}$ 在 $(1, e)$ 单调递减,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/775121234040011334>