基于偏微分方程（PDE）的图像去噪

2023-09-06

目录

一、偏微分方程图像处剪发展过程

在过去几十年，计算机可视化和图像分析领域中以偏微分方程为基础的模型在图像处理研究领域占据着主要地位。

- 使用偏微分方程处理图像的思想能够追溯到Gabor和Jain。
- 但是这种措施真正建立起来是Koenderind和Witkin的研究工作开始的，他们引入了尺度空间(Scale Space)的概念，尺度空间把一组图像同步在多种尺度上表述。
- 他们的贡献在很大程度上构成了偏微分方程图像处理理论的基础。在他们的研究工作中，图像的多尺度表达是经过高斯平滑来取得的，这等价于利用经典的热传导方程来演化图像得到一种各向同性扩散流。

- 在80年代末，Hummel提出热传导方程并不是唯一能够产生尺度空间的抛物方程，并提出构成尺度空间的准则:只要满足最大原则的演化方程就能够定义一种尺度空间。
- Perona和Malik提出各向异性扩散方程在这个领域最具有影响力。他们提出用一种保持边沿的有选择性的扩散来替代Gaussian扩散。他们的工作引起了诸多理论和实际问题的研究。

- Osher和他的研究小组提出了几何制约的偏微分方程，其中最著名的是曲率流。
- 曲率流是“纯粹的”各向异性扩散模型，它使图像灰度值的扩散只发生在图像梯度的正交方向上，在保持图像轮廓精确位置和清楚的同步沿轮廓进行平滑去噪。

- Osher和Rudin有关激波的研究以及有关TV模型的研究工作更突出了偏微分方程在图像处理中的主要性，这些措施成功之处于于将图像视为由跳跃边沿连接而成的分片光滑函数(曲面)，从而与某种偏微分方程的分片光滑解联络起来。

二、偏微分方程图像处理数学基础

- 在基于偏微分方程的图象处理中，对图象模型有连续与可微的要求，需要建立图象的连续模型。
- 只有在空间定义域和灰度值上都离散化了的图象才干被计算机处理，这种离散化图象称为数字图象，空间离散化称为空间采样，灰度离散化称为灰度量化。

目录

- 离散图象的模型用u: $x\in\Omega\rightarrow$ [0,255]表达，这里x=(x,y)是离散的，[0, 255]表量化的256个灰度级。
- 尽管图象在计算机中以上述离散形式存储，但因为在空间采样与灰度量化上这种离散化都足够精细，从而能够用连续(或分段连续)的数学函数近似。

- 一幅数字图像在计算机中是以离散的形式存储的，但我们能够以为图像的离散化是足够细的，从而能够利用一种连续的数学函数来近似描述.对于一幅灰度图像，我们能够采用下面的表达来近似:

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

- 其中Ω 是图像的定义域。

- 图像在每一像素处的梯度利用其在:方向和y方向的偏导来描述：

$$\nabla u = (u_x, u_y)$$

- 梯度模(梯度向量的范数)为

$$\|\nabla u\| = \sqrt{u^2{}_x + u^2{}_y}$$

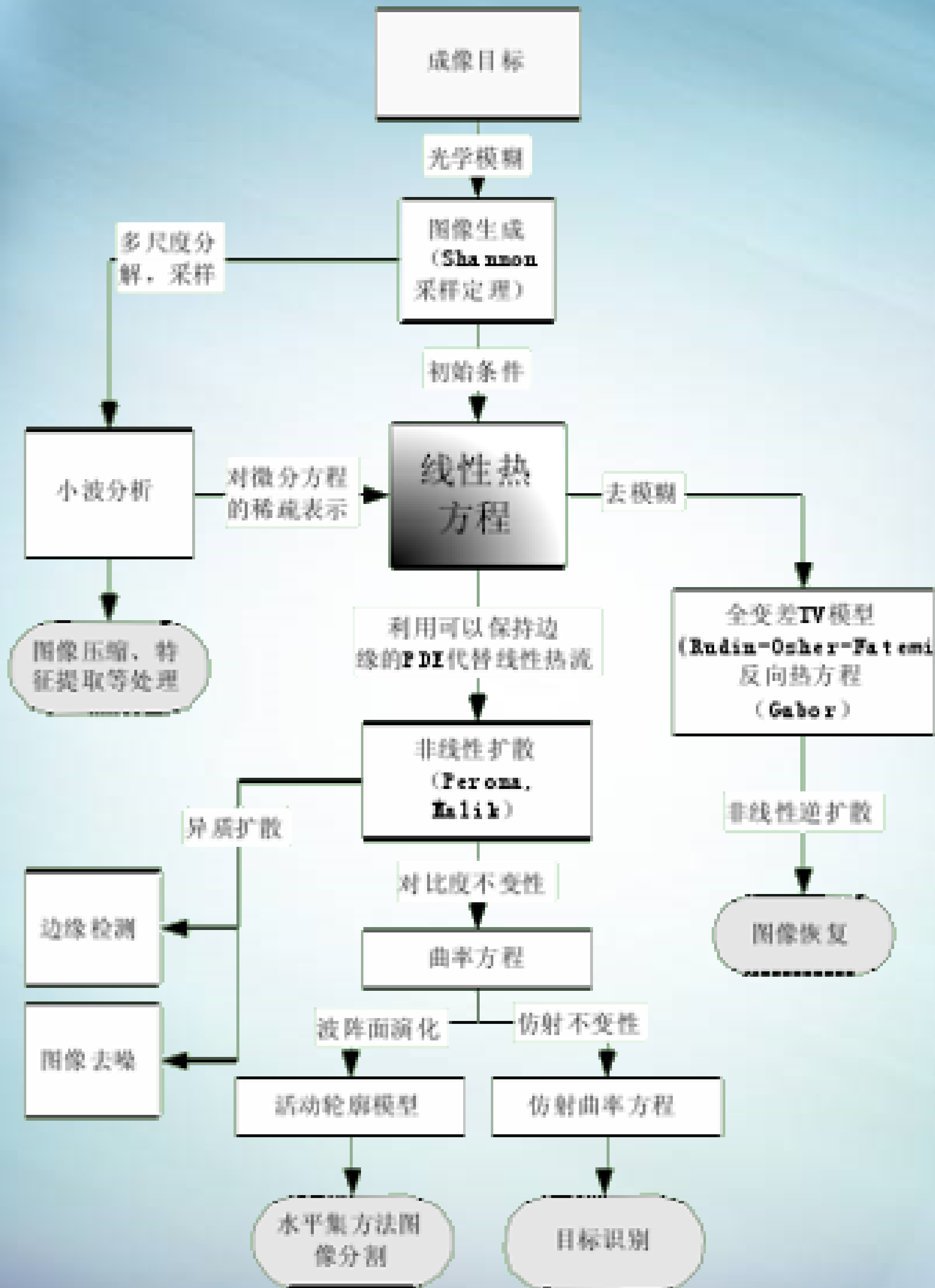
• 在图像处理中另外一种主要的几何量是方向导数，任给一种方向向量，图像在该像素处沿此方向的导数为图像的梯度与此方向向量的内积:

$$u_v = \nabla u \cdot v$$

三、偏微分方程图像处理的优缺陷及应用构造

- 用偏微分方程进行图像处理的基本思想是利用偏微分方程把图像变形，然后求解该方程，这时方程的解就是我们所期望的成果。

目录


成像目标
光学模糊
图像生成（Shannon采样定理）
多尺度分解，采样
初始条件
小波分析
对微分方程的稀疏表示
线性热方程
去模糊
图像压缩、特征提取等处理
利用可以保持边缘的PDE代替线性热流
全变差TV模型（Rudin-Osher-Fatemi）反向热方程（Gabor）
非线性扩散（Perona，Malik）
异质扩散
非线性逆扩散
对比度不变性
边缘检测
曲率方程
图像恢复
波阵面演化
仿射不变性
图像去噪
活动轮廓模型
仿射曲率方程
水平集方法图像分割
目标识别

优点

使用偏微分方程进行图像处理有诸多优点。

- 使用偏微分方程能够用广义上连续的二维函数来对图像进行建模，从而对图像进行求导求积分等操作，这就把图像处理问题规范化，使问题的描述在形式上变得简朴。

- PDE给出了连续域上图象的分析模型。模型与数字图象的网格(相应于图象像素)大小无关，当假定网格网孔大小趋于零时，离散滤波器在PDE中可了解为连续微分算子的近似，从而使得网格的划分与局部非线性滤波分析易于实现，简化了图象的分析体系。

- 另一方面，当图象表达为连续信号，PDE可视为具有微小子邻域局部滤波器的迭代，这种在PDE框架内的解释允许将既有的滤波措施进行合并与分类，愈加轻易了解其相应的物理意义，并可直观地设计出新的滤波措施。进一步，PDE使得图象处理的合成非常自然。

例如给定两个不同的图象处理方案:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=F_1\left[u(x,y,t)\right],\quad \frac{\partial u}{\partial t}=F_2\left[u(x,y,t)\right]$$

能够轻易合成为:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha F_1+F_2$$

这么若算子F1和F2分别为光滑与边沿保护算子，则新的合成方案将同步具有去噪与保护边沿的图象恢复效果。

- 在计算方面，能够很好的利用目前已经有的某些非常完备的数值分析和偏微分方程计算措施来进行运算,为PDE的数值计算予以了极大的帮助，它能从已经有的有关数值分析和计算偏微分方程的许多文件中大大获益。

- 最终，使用偏微分方程的突出优点是能够使图像处理和分析的速度、精确性和稳定性都有很大提升。PDE能取得很好的图象处理效果，而且算法解的存在性，唯一性与稳定性都能够在PDE独特的分析理论框架内得到证明。

四、偏微分方程去噪问题的研究

- 基于PDE的图像处理措施在图像降噪领域得到了广泛的注重，因为它在平滑噪声的同步，能够使得图像的细节，如边沿和纹理得到保护。

目录