重庆市南开中学校2023-2024学年高一下学期期末考试数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知复数$z=\dfrac{i}{1+2i}$（i为虚数单位），则z的虚部为（　　）

A．$\dfrac{1}{5}$　　B．$\dfrac{1}{5}i$　　C．$\dfrac{2}{5}$　　D．$\dfrac{2}{5}i$

2．直线$3x+\sqrt{3}y+5=0$的倾斜角为（　　）

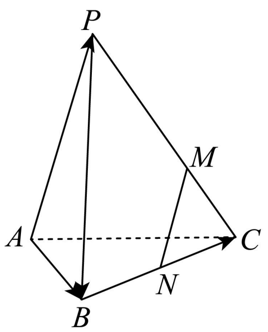
A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{4}$　　C．$\dfrac{2\pi}{3}$　　D．$\dfrac{3\pi}{4}$

3．已知向量$\vec{a}$与$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=\sqrt{3}$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{6}$，则$|\vec{a}-2\vec{b}|=$（　　）

A．3　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．$\sqrt{3}$

4．如图，在三棱锥$P-ABC$中，$\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{MC},N$为$BC$的中点，设$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b},\overrightarrow{AP}=\vec{c}$，

则用$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$表示$\overrightarrow{MN}$为（　　）



A．$\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}-\vec{c}$　　B．$\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{6}\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{c}$

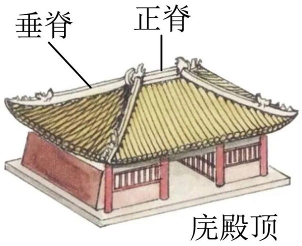
C．$\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{6}\vec{b}-\vec{c}$　　D．$\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{c}$

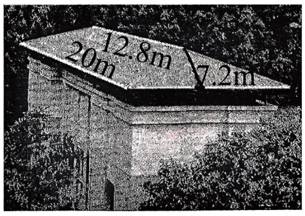
5．在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，且满足$b^2=a^2+c^2-ac$,$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，则b的最小值为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

6．庑殿顶是中国古代殿宇建筑屋顶的常见样式，屋顶包含一条正脊、四条垂脊，四个屋顶面.已知南开中学午晴堂侧楼屋顶为庑殿顶样式，整个屋顶长20m，宽7.2m，正脊长12.8m，四

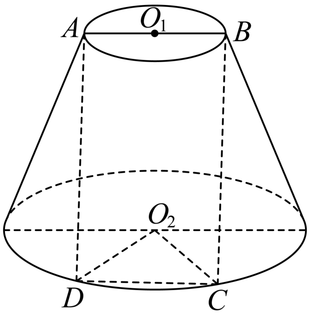
个屋顶面坡度均为$1:2.4$，其中坡度是指坡面的垂直高度和水平宽度的比值，则午静堂侧楼屋顶面积为（　）





A．$144\mathrm{m}^2$　　B．$156\mathrm{m}^2$　　C．$169\mathrm{m}^2$　　D．$172\mathrm{m}^2$

7．如图，已知圆台O_1O_2, AB为上底面圆O_1的一条直径，且$AB=2, CD$是下底面圆O_2的一条弦，$\angle CO_2D=60^\circ$，矩形$ABCD$的面积等于$4\sqrt{3}$，则该圆台的侧面积为（　）



A．$6\sqrt{2}\pi$　　B．$5\sqrt{10}\pi$　　C．$4\sqrt{3}\pi$　　D．$3\sqrt{10}\pi$

8．已知$\triangledown ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，且满足$\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BA}$在$\overrightarrow{BC}$上的投影向量的模长为$\frac{\sqrt{5}}{5}c$，则$\cos A=$（　）

A．$\frac{\sqrt{6}}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{5}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{10}$　　D．$\frac{\sqrt{10}}{10}$

二、多选题

9．下列说法正确的是（　）

A．对于平面$\alpha,\beta,\gamma,\alpha\cap\beta=a,\alpha\cap\gamma=b,\beta\cap\gamma=c$，若$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则$b//c$

B．对于平面α和直线a,b，若$a\perp b, b//\alpha$，则$a\perp\alpha$

C．对于平面α,β和直线a,b，若$a\perp b, a\,//\,\alpha, b\,//\,\beta$，则$\alpha\perp\beta$

D．对于平面α,β和直线a，若$a\perp\beta,\alpha\perp\beta,a\not\subset\alpha$，则$a\,//\,\alpha$

10．已知圆$C: x^2+y^2-mx-ny+1=0$，圆心C关于直线$l: y=-x+1$对称点为$A(-1,0), M,N$为

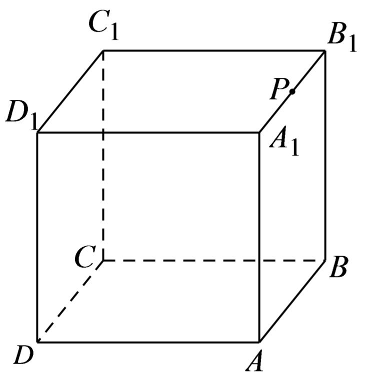
圆C上两点，且满足$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}$，点$O$为坐标原点，则下列正确的是（ ）

A．$m=2,n=4$　　B．y轴与圆C相切

C．线段MN的中点轨迹为圆　　D．$\left|\overrightarrow{MN}\right|$的最大值为$\sqrt{7+4\sqrt{2}}$

11．如图，棱长为4的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P为A_1B_1的中点，动点Q满足

$\overrightarrow{DQ}=\lambda\overrightarrow{DC}+\mu\overrightarrow{DD_1},\lambda,\mu\in(0,1)$，则下列说法正确的是（　）



A．平面$B_1DQ\perp$平面ACD_1

B．直线PQ与平面CC_1D_1D所成角为θ，则$\sin\theta$的取值范围是$\left(\dfrac{2}{3},1\right)$

C．设$C_1D\cap$平面$BPD_1=Q$，则三棱锥$P-A_1CQ$的体积为$\dfrac{8}{3}$

D．以$\triangle CC_1D_1$的边CD_1所在直线为旋转轴将$\triangle CC_1D_1$旋转，则在旋转过程中，则PC_1的取值范围是$\left[2,2\sqrt{13}\right]$

三、填空题

12．已知直线$l_1:(a-2)x+y-3=0$和直线$l_2:x+ay+1=0$垂直，则实数$a=$__________.

13．已知$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c,D为线段AC的中点，

$B=\dfrac{\pi}{3},\left|\overrightarrow{BD}\right|=\dfrac{\sqrt{13}}{2},c=a+2$，则$\dfrac{\sin\angle ABD}{\sin\angle CBD}=$__________.

14．已知三棱锥$S-ABC$中，$AB\perp BC,SC\perp BC,AB=2BC=2$，三棱锥$S-ABC$的体积为$\dfrac{2}{3}$，则当$SA$取最小值时，三棱锥$S-ABC$外接球的体积为__________.

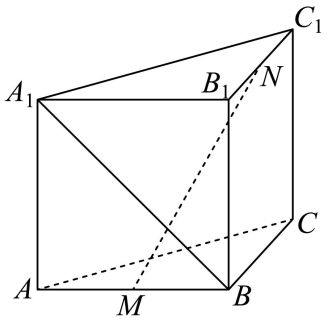
四、解答题

15．在∨ ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $\sqrt{3}\left(c-b\cos A\right)=b\sin A$.

(1)求 B；

(2)若 $a=3,b=\sqrt{13}$，求∨ ABC 的面积.

16．如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中 $AB=BC=CC_1=2,\ AC=2\sqrt{2},\ M,\ N$ 分别是 AB,B_1C_1 的中点.



(1)求证：$MN//$ 平面 ACC_1A_1；

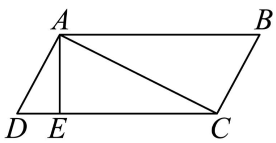
(2)求异面直线 A_1B 与 MN 所成角的余弦值.

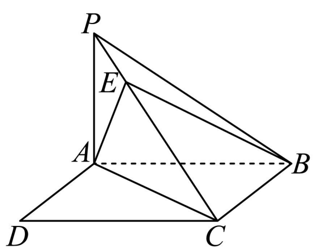
17．已知圆 $C:x^2+y^2-2ax-2by+a^2=0$ 满足：① $a>1,b>0$；②与圆 $O:x^2+y^2=1$ 外切；③被直线 $x=1$ 分成两段圆弧，其弧长的比为 $1:2$.

(1)求圆 C 的方程；

(2)若直线 l 与圆 C 相交于 M,N 两点，四边形 $OCNM$ 为平行四边形，求直线 l 的方程.

18．已知在平行四边形 $ABCD$ 中，E 是 CD 边上一点，且满足 $CE=3ED,\angle CAE=2\angle DAE$，$AD^2=DE\cdot DC$.





(1)求 $\angle DAE$ 的大小；

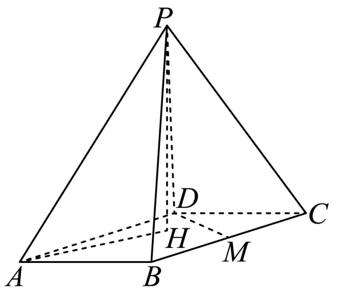
(2)现以 AC 为折痕把 $\vartriangle ACD$ 折起，使点 D 到达点 P 的位置，且 $AE\perp BE$.如图：

（i）证明：平面 $PAB\perp$ 平面 ABC；

（ii）求平面 EAB 与平面 PAB 夹角的余弦值.

19．如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，且

$AB=3, AD=4, \angle DAB=\frac{\pi}{3}, M$ 为 BC 的中点，点 P 在平面 $ABCD$ 内的射影为点 H，且 $AH \perp DM$.



(1)求证：$PA \perp DM$；

(2)当 $\triangle PAB$ 为等边三角形时，求点 H 到平面 PBC 的距离；

(3)若 $PA=m(m>\sqrt{21}), \angle PAH=\theta$，记三棱锥 $P-ABH$ 的外接球表面积 $f\left(\theta\right)$，当函数 $f\left(\theta\right)$ 取最小值时，平面 BPC 与平面 DPC 夹角的大小为 $\frac{\pi}{2}-\theta$，求实数 m 的值.

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	C	C	B	B	B	D	D	AD	ACD
题号	11									
答案	ABD									

1．A

【解析】利用复数除法的四则运算化简复数，再根据定义写出复数的虚部即可.

【详解】因为$z=\frac{i}{1+2i}=\frac{i\left(1-2i\right)}{\left(1+2i\right)\left(1-2i\right)}=\frac{2+i}{5}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$

所以复数z的虚部为：$\frac{1}{5}$

故选：A

2．C

【分析】先把方程化为斜截式，得到直线的斜率，即可求解.

【详解】由$3x+\sqrt{3}y+5=0$得：$y=-\sqrt{3}x-\frac{5\sqrt{3}}{3}$，设其倾斜角为$\alpha$，$\alpha\in\left[0,\pi\right)$，

所以斜率$k=-\sqrt{3}=\tan\alpha$， 故倾斜角为$\alpha=\frac{2\pi}{3}$，

故选：C

3．C

【分析】计算出$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，再根据$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)^2}$计算出结果.

【详解】由题意得：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\frac{\pi}{6}=2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$，

所以$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^{\,2}-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^{\,2}}=\sqrt{4-4\times3+4\times3}=2$.

故选：C

4．B

【分析】直接利用向量的线性运算和中线向量的应用求出结果.

【详解】在三棱锥$P-ABC$中，点N为棱BC的中点，点M在棱PC上，且满足$\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{MC}$,

故$\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AP}=2\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}\right)$，

所以$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{b}$，

点N为棱BC的中点，

所以$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$，

故$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\left(\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}$.

故选：B．

5．B

【分析】直接利用余弦定理得到$\cos B=\frac{1}{2}$,即得B的值，结合三角形面积公式和基本不等式求b的最小值.

【详解】$\because b^2=a^2+c^2-ac$，$\therefore \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，

又$0<A<\pi, \therefore B=\frac{\pi}{3}$，

又因为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}$，所以$ac=4$，

$b^2=a^2+c^2-ac\geq 2ac-ac=ac=4$，

当且仅当$a=c=2$时，等号成立，

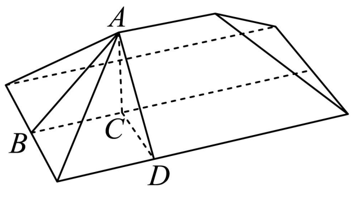
即$\triangledown ABC$为等边三角形时，b取最小值为2.

故选：B

6．B

【分析】根据庑殿顶抽象出几何体，该几何体的底面为矩形，侧面由两个全等梯形和两个全等的等腰三角形组成.根据坡度比可以计算三角形和梯形的高，根据题意计算表面积即可.

【详解】根据庑殿顶抽象出几何体，该几何体的底面为矩形，侧面由两个全等梯形和两个全等的等腰三角形组成.



过点A作底面的垂线交底面于点C，过点C作底面矩形的长的垂线并交于点D，

取宽的中点为B,连接AC,BC,CD，即有$AC\perp BC,AC\perp AD$，$\angle ABC,\angle ADC$分别为侧面、正面与底面形成的二面角，

屋顶长20m，宽7.2m，正脊长12.8m，由对称性可得$BC=\frac{20-12.8}{2}=3.6$，$CD=\frac{7.2}{2}=3.6$，

四个屋顶面坡度均为$1:2.4$，得$\frac{AC}{BC}=\frac{1}{2.4}$，$\therefore AC=\frac{3.6}{2.4}=1.5$，

由勾股定理得$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{1.5^2+3.6^2}=3.9$，

因为四个顶面坡度均相等，即$\angle ABC=\angle ADC$，且$BC=CD=3.6$，

即$\triangle ABC\cong\triangle ADC$，$\therefore AD=AB=3.9$，

故屋顶面积为：$\frac{1}{2}\times7.2\times3.9\times2+\frac{1}{2}\times(12.8+20)\times3.9\times2=3.9\times(7.2+32.8)=3.9\times40=156m^2$

故选：B．

7．D

【分析】根据题意，求得$AD=2\sqrt{3}$，取CD的中点E，求得$O_1E=2\sqrt{3}$，设圆台的下底面圆的半径为R，得到$R=CD=AB=2$，且$O_2E=\sqrt{3}$，在直角$\triangle O_1O_2E$中，求得$O_1O_2=3$，取O_2M的中点F，在直角$\triangle BMF$中，求得母线$BM=\sqrt{10}$，结合侧面积公式，即可求解.

【详解】因为矩形$ABCD$的面积等于$4\sqrt{3}$，且$AB=2$，

可得$AB\times AD=2AD=4\sqrt{3}$，解得$AD=2\sqrt{3}$，

取CD的中点E，连接O_1E，则$O_1E=2\sqrt{3}$，

设圆台的下底面圆的半径为R，因为$\angle CO_2D=60^\circ$，$\triangle CO_2D$为等边三角形，

因为$R=CD=AB=2$，且E为CD的中点，所以$O_2E=\sqrt{3}$，

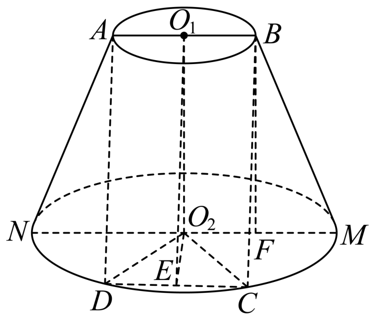
在直角$\triangle O_1O_2E$中，可得$O_1O_2=\sqrt{O_1E^2-O_2E^2}=3$，

取O_2M的中点F，可得$BF//O_1O_2$且$BF=O_1O_2=3$，

在直角$\triangle BMF$中，$BF=3,MF=1$，可得$BM=\sqrt{BF^2+MF^2}=\sqrt{10}$，

所以该圆台的侧面积为$S=\pi(R+1)\times BM=3\sqrt{10}\pi$.

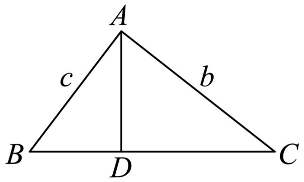
故选：D.



8．D

【分析】过点A作 $AD\perp BC$，交 BC 于点 D，根据题意可知，$\cos B=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\left|\overrightarrow{BD}\right|=\frac{\sqrt{5}}{5}c$，根据垂直关系数量积为0，可得 $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\frac{2\sqrt{5}}{5}c$，从而借助余弦定理求解.

【详解】过点A作 $AD\perp BC$，交 BC 于点 D，



$\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量的模长为 $\frac{\sqrt{5}}{5}c$，则 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{\sqrt{5}}{5}ac$，

因为 $\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\perp\overrightarrow{BC}$，

所以 $\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

$=-\frac{2\sqrt{5}}{5}ac+a\left|\overrightarrow{CD}\right|=0$，

所以 $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\frac{2\sqrt{5}}{5}c$，则 $a=\frac{3\sqrt{5}}{5}c$，

又因为 $\cos B=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}c\right)^2+c^2-b^2}{2\times\frac{3\sqrt{5}}{5}c^2}$，得 $b=\frac{2\sqrt{10}}{5}c$，

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\left(\frac{2\sqrt{10}}{5}c\right)^2+c^2-\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}c\right)^2}{2\times\frac{2\sqrt{10}}{5}c^2}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

故选：D

【点睛】关键点点睛：由 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量的模长为 $\frac{\sqrt{5}}{5}c$，则 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{\sqrt{5}}{5}ac$，$\cos B=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

9．AD

【分析】对于A选项，根据线面平行的性质定理判断即可；对于B选项，根据线面垂直的判定定理可判断；对于C，结合正方体中的线面关系可判断；对于D选项，利用反证法证明.

【详解】对于A选项，因为 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，$\alpha\cap\beta=a,\alpha\cap\gamma=b$，

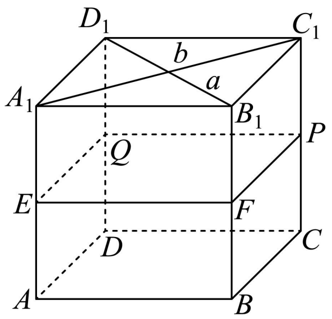
所以 $a\subset\beta,b\not\subset\beta$，所以 $b//\beta$，由于 $\beta\cap\gamma=c$，$c\subset\gamma$，所以 $b//c$，故A正确；

对于B选项，由 $b//\alpha$，可知过 b 的平面与 α 的交线与 b 平行，且所有的交线互相平行，

$\vec{a} \perp \vec{b}$，可得a与交线垂直，但无法推出$a \perp \alpha$，B 错误；

对于 C 选项，如图，在正方体中，$\vec{a} \perp \vec{b}$，$a//$平面$ABCD$，b平行与平面$EFPQ$，

但平面$ABCD//$平面$EFPQ$，C 错误；



对于 D 选项，如图，设$\alpha \cap \beta = c$，

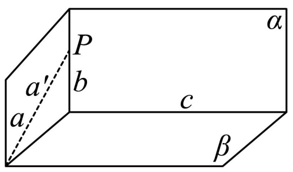
假设a与平面α不平行，又$a \not\subset \alpha$，

所以a与平面α相交，设交点为P，

在α内过点P作直线$b \perp c$，因为$\alpha \perp \beta$，$\alpha \cap \beta = c$，则$b \perp \beta$，

则过点P有两条直线垂直于平面β，矛盾，

所以假设不成立，故$a // \alpha$，D 正确.



故选：AD

10．ACD

【分析】对于 A，运用点关于线对称性质列方程，解出m,n即可；对于 B，运用点线距离与半径大小比较作判断即可；对于 C, 设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，中点设为$P(s,t)$，由平行四边形定则，$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AP}$，两边平方，再用两点间的距离公式得到，

$x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2(x_1+x_2)=4s^2+8s+1+4t^2$，借助$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$在圆上，和

$s=\dfrac{x_1+x_2}{2},t=\dfrac{y_1+y_2}{2}$，再继续化简，得到$4s^2+4t^2-8t+3=0$，即可判断 C；对于 D,

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=|\overrightarrow{AP}|^2-|\overrightarrow{PM}|^2=|\overrightarrow{AP}|^2-\dfrac{|\overrightarrow{MN}|^2}{4}=\dfrac{1}{2}$,使得$\left|\overrightarrow{MN}\right|$最大，则$|\overrightarrow{AP}|$最大即可，借助图形，得出$|\overrightarrow{AP}|$最大值，即可求出$\left|\overrightarrow{MN}\right|$最大值，可判断 D.

【详解】$C:x^2+y^2-mx-ny+1=0$，则$C(\dfrac{m}{2},\dfrac{n}{2}),R=\dfrac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2-4}$，

圆心C关于直线$l: y=-x+1$对称点为$A\left(-1,0\right)$，则可得线段CA中垂线为l，得

$\begin{cases}\dfrac{\frac{n}{2}}{2}=-\dfrac{\frac{m}{2}-1}{2}+1\\ \dfrac{\frac{n}{2}}{\frac{m}{2}+1}=1\end{cases}$ 解得$\begin{cases}m=2\\ n=4\end{cases}$，故 A 正确；

由 A 知道$C: x^2+y^2-2x-4y+1=0$，且$C(1,2), R=2$，显然C到y轴距离为 1,小于 2，故与y轴与圆C相交，故 B 错误；

设$M(x_1,y_1), N(x_2,y_2)$，中点设为$P\left(s,t\right), s=\dfrac{x_1+x_2}{2}, t=\dfrac{y_1+y_2}{2}$（* ），

则$x_1^2+y_1^2-2x_1-4y_1+1=0$，$x_2^2+y_2^2-2x_2-4y_2+1=0$，两式相加得到，

$x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2(x_1+x_2)-4(y_1+y_2)+2=0$，移项并把（* ）式代入得到，

$x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2=2\left(x_1+x_2\right)+4\left(y_1+y_2\right)-2=4s+8t-2$（* * ）.

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}$，根据平行四边形定则，$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AP}$，两边平方得，

$|\overrightarrow{AM}|^2+|\overrightarrow{AN}|^2+2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=4|\overrightarrow{AP}|^2$，即$|\overrightarrow{AM}|^2+|\overrightarrow{AN}|^2+1=4|\overrightarrow{AP}|^2$，

由两点间的距离公式得，$\left(\sqrt{\left(x_1+1\right)^2+y_1^2}\right)^2+\left(\sqrt{\left(x_2+1\right)^2+y_2^2}\right)^2+1=4\left(\sqrt{\left(s+1\right)^2+t^2}\right)^2$，

即$\left(x_1+1\right)^2+y_1^2+\left(x_2+1\right)^2+y_2^2+1=4\left(s+1\right)^2+4t^2=4s^2+8s+4+4t^2$，

即$x_1^2+2x_1+1+y_1^2+x_2^2+2x_2+1+y_2^2+1=4s^2+8s+4+4t^2$，

即$x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2\left(x_1+x_2\right)=4s^2+8s+1+4t^2$，由（* ）（* * ）式代入知道，

$4s+8t-2+4s=4s^2+8s+1+4t^2$，化简得到，

$4s^2+4t^2-8t+3=0$，即$s^2+t^2-2t+\dfrac{3}{4}=0$，配方$s^2+\left(t-1\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

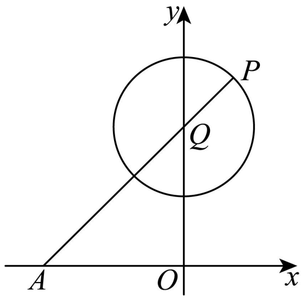
因此线段MN的中点P轨迹为圆心为$(0,1)$，半径为$\dfrac{1}{2}$的圆．故 C 正确．

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM})\cdot(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PN})=(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM})\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{PM})$

$=|\overrightarrow{AP}|^2-|\overrightarrow{PM}|^2=|\overrightarrow{AP}|^2-\dfrac{|\overrightarrow{MN}|^2}{4}=\dfrac{1}{2}$，则$4|\overrightarrow{AP}|^2-2=|\overrightarrow{MN}|^2$，

即$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{4|\overrightarrow{AP}|^2-2}$（* * * ），则要使得$\left|\overline{MN}\right|$最大，则$|\overrightarrow{AP}|$最大即可.

由题可知 $A(-1,0)$, P 的轨迹为圆 $Q: x^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$，$Q(0,1)$ 可画图辅助分析．



当 $|\overrightarrow{AP}|$ 最大时，A,Q,P 位置如图所示，$|\overrightarrow{AP}|_{\max}=|AQ|+\frac{1}{2}=\sqrt{2}+\frac{1}{2}$．

代入（＊＊＊）式，$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{4(\sqrt{2}+\frac{1}{2})^2-2}=\sqrt{7+4\sqrt{2}}$，故 D 正确．

故选：ACD.

11．ABD

【分析】A 选项，根据题目条件得到 Q 在侧面 CDD_1C_1（不含边界），作出辅助线，证明出 $AC\perp$ 平面 BDB_1，从而得到 $AC\perp B_1D$，同理可证 $B_1D\perp AD_1$，得到线面垂直，面面垂直；B 选项，作出辅助线，得到 $\angle PQR$ 即为直线 PQ 与平面 CC_1D_1D 所成角 θ，求出 $RQ\in(0,2\sqrt{5})$，从而得到 $PQ\in(4,6)$，故 $\sin\theta=\frac{PR}{PQ}\in\left(\frac{2}{3},1\right)$；C 选项，作出辅助线，得到 $D_1H\cap C_1D=Q$，利用等体积法和体积之比得到三棱锥 $P-A_1CQ$ 的体积；D 选项，作出辅助线，得到 C_1 的轨迹为以 W 为圆心，$C_1W=2\sqrt{2}$ 为半径的圆，从而确定何时取得最小值和最大值，得到答案.

【详解】A 选项，$\overrightarrow{DQ}=\lambda\overrightarrow{DC}+\mu\overrightarrow{DD_1},\lambda,\mu\in(0,1)$，故 Q 在侧面 CDD_1C_1（不含边界）上，

连接 BD，因为 $BB_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $BB_1\perp AC$，

因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $AC\perp BD$，

因为 $BD\cap BB_1=B$，$BD,BB_1\subset$ 平面 BDB_1，

所以 $AC\perp$ 平面 BDB_1，

因为 $B_1D\subset$ 平面 BDB_1，

所以 $AC\perp B_1D$，同理可证 $B_1D\perp AD_1$，