

## 第 04 讲 利用导数研究不等式恒成立与能成立问题

### 目录

题型一：重点考查变量分离法解决恒成立问题.....	1
题型二：重点考查分类讨论法解决恒成立问题.....	7
题型三：重点考查分离变量法解决有解问题.....	12
题型四：重点考查等价转化法解决恒成立问题（形如 $f(x) \geq g(x)$ ）.....	17
题型四：重点考查双变量不等式问题（形如 $f(x_1) \geq g(x_2)$ ）.....	22
题型五：重点考查同构法解决不等式能成立问题.....	28

### 题型一：重点考查变量分离法解决恒成立问题

#### 典型例题

例题 1. （2024 上·辽宁抚顺·高三校联考期末）已知函数  $f(x) = x^3 + ax + 16$ .

- (1) 若  $a = -27$ , 求  $f(x)$  的极值;
- (2) 若  $f(x) \geq 0$  在  $(1, 4)$  上恒成立, 求  $a$  的取值范围.

例题 2. （2024 上·云南昆明·高二昆明市第三中学校考期末）已知函数  $f(x) = (x - a) \ln x$ .

- (1) 讨论  $f'(x)$  的单调性;
- (2) 若不等式  $xf'(x) \geq 2(x - a)$  在  $[1, +\infty)$  上恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

例题 3. (2024 上·湖南益阳·高二南县第一中学校考期末) 已知函数  $f(x) = -x^2 + x - \sin x - a \cos x$ , 其中  $a \in \mathbf{R}$ .

(1) 当  $0 < a \leq 1$  时, 求  $f(x)$  的极值;

(2) 若不等式  $f(x) + x^2 \leq 1$  对任意  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

### 精练核心考点

1. (2024·全国·高三专题练习) 已知函数  $f(x) = x - \ln x - 2$ .

(1) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程;

(2) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(3) 若对任意的  $x \in (1, +\infty)$ , 都有  $x \ln x + x > k(x-1)$  成立, 求整数  $k$  的最大值.

2. (2024 上·天津河西·高三天津实验中学学校考阶段练习) 已知函数  $f(x) = x(\ln x - k - 1)$ ,  $k \in \mathbf{R}$ .

(1) 当  $x > 1$  时, 求函数  $f(x)$  的单调区间和极值;

(2) 若对于任意  $x \in [e, e^2]$ , 都有  $f(x) < 4 \ln x$  成立, 求实数  $k$  的取值范围;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/775340330334011333>