

第 17 讲 对数函数及其性质

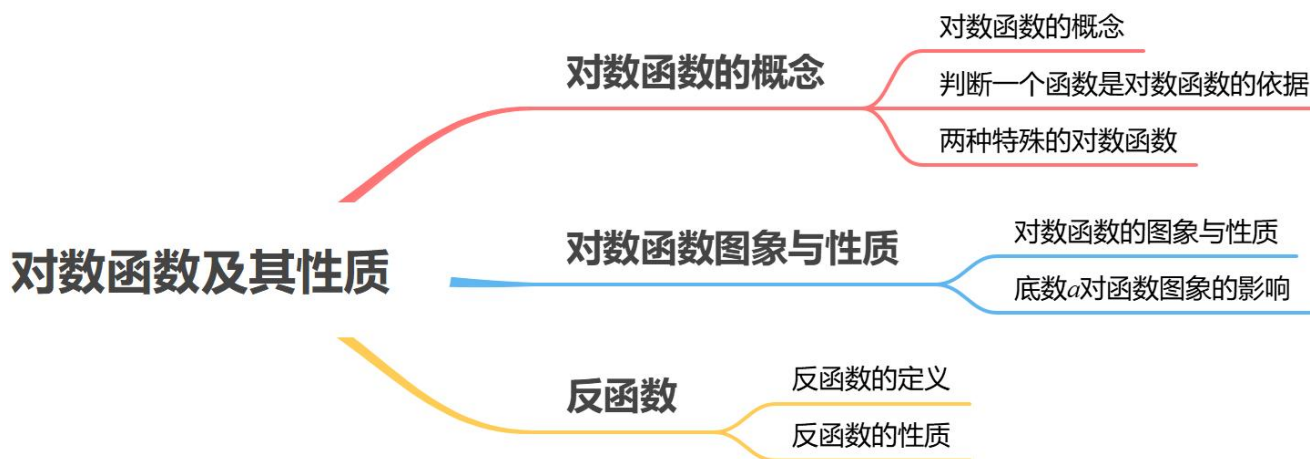
模块导航

- 模块一 思维导图串知识
- 模块二 基础知识全梳理（吃透教材）
- 模块三 核心考点举一反三
- 模块四 小试牛刀过关测

素养目标

1. 理解对数函数的概念，知道对数函数模型是一类重要的函数模型；
2. 会求简单的对数型函数的定义域；
3. 会用描点法画出对数函数的简图；
4. 掌握对数函数的性质，会解决简单的与性质有关的问题.

模块一 思维导图串知识



模块二 基础知识全梳理

知识点 1 对数函数的概念

1、对数函数的概念：函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$) 叫做对数函数，其中 x 是自变量，定义域为 $(0, +\infty)$ 。

2、判断一个函数是对数函数的依据

(1) 形如 $y = \log_a x$ ，且系数为 1；(2) 底数 a 满足 $a > 0$ ，且 $a \neq 1$ ；(3) 真数是 x 而不是 x 的函数；(4) 整体只有一项；(5) 定义域为 $(0, +\infty)$ 。

例如， $y = \log_2(x+1)$ ， $y = 2 \log_2 x$ 都不是对数函数，可称为对数型函数。

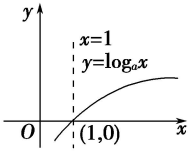
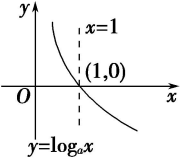
3、两种特殊的对数函数

(1) 常用对数函数：以 10 为底的对数函数 $y = \lg x$ 。

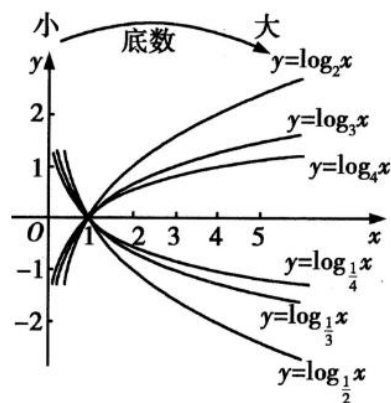
(2) 自然对数函数：以无理数 e 为底的对数函数 $y = \ln x$ 。

知识点 2 对数函数及其性质

1、对数函数的图象与性质

		$a > 1$	$0 < a < 1$
图象			
性质	定义域	$(0, +\infty)$	
	值域	\mathbf{R}	
	过定点	过定点(1, 0), 即 $x=1$ 时, $y=0$	
	函数值的变化	当 $0 < x < 1$ 时, $y < 0$; 当 $x > 1$ 时, $y > 0$	当 $0 < x < 1$ 时, $y > 0$; 当 $x > 1$ 时, $y < 0$
	单调性	是 $(0, +\infty)$ 上的增函数	是 $(0, +\infty)$ 上的减函数

2、底数 a 对函数图象的影响



(1) 底数 a 与 1 的大小关系决定了对数函数图象的“升降”：当 $a > 1$ 时，图象呈上升趋势；当 $0 < a < 1$ 时，图象呈下降趋势；

(2) 函数 $y = \log_a x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象关于 x 轴对称；

(3) 底数的大小决定了图象相对位置的高低：无论 $a > 1$ 还是 $0 < a < 1$ ，在第一象限内，自左向右，图象对应的对数函数的底数逐渐变大。

知识点 3 反函数

1、反函数的定义

一般地，函数 $y = f(x)(x \in A)$ ，设它的值域为 C ，根据这个函数中 x, y 的关系，用 y 把 x 表示出来，得到 $x = g(y)$ 。如果 y 在 C 中的任何取值，通过 $x = g(y)$ ， x 在 A 中都有唯一值和它对应，则 $x = g(y)$ 就表示 x 是关于自变量 y 的函数。这样的函数 $x = g(y)(y \in C)$ 叫

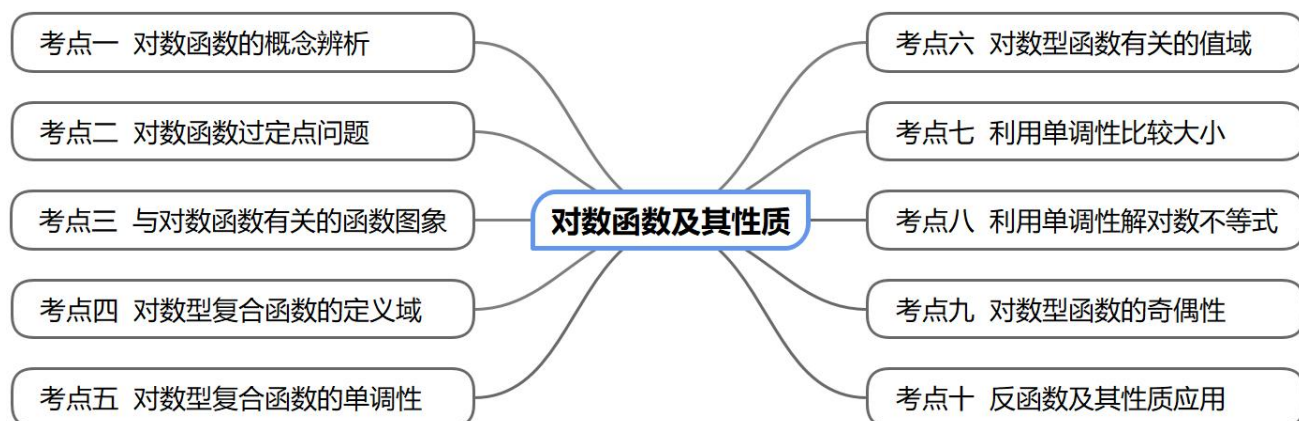
做 $y = f(x)(x \in A)$ 的反函数, 记作 $y = f^{-1}(x)$.

例如, 对数函数 $y = \log_a x (a > 0, \text{且} a \neq 1)$ 是指数函数 $y = a^x (a > 0, \text{且} a \neq 1)$ 的反函数.

2、反函数的性质

- (1) 互为反函数的两个函数的图象关于直线 $y = x$ 对称;
- (2) 若函数 $y = f(x)$ 的图象上有一点 (a, b) , 则点 (b, a) 必在其反函数的图象上, 反之也成立;
- (3) 互为反函数的两个函数的单调性相同;
- (4) 反函数的定义域是原函数的值域, 反函数的值域是原函数的定义域;
- (5) 单调函数必有反函数.

◇ 模块三 核心考点举一反三



考点一：对数函数的概念辨析



例 1. (22-23 高一上·云南曲靖·月考) 下列函数是对数函数的是 ()

- A. $y = \ln x$ B. $y = \log_2 x^2$ C. $y = \log_a \frac{x}{9}$ D. $y = \log_2 x - 2022$

【变式 1-1】(22-23 高一上·河北唐山·月考) 下列函数是对数函数的是 ()

- A. $y = \log_a(2x)$ B. $y = \lg 10^x$ C. $y = \log_a(x^2 + x)$ D. $y = \ln x$

【变式 1-2】(23-24 高一上·全国·课后作业) 下列函数, 其中为对数函数的是 ()

- A. $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ B. $y = 2\log_4(1-x)$ C. $y = \ln x$ D. $y = \log_{(a^2+a)} x$

【变式 1-3】(23-24 高一上·全国·课堂例题) (多选) 下列函数中为对数函数的是 ()

- A. $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ B. $y = \log_4 x^2$ C. $y = \ln x$ D. $y = \log_{(a^2+a+2)} x$ (a 是

常数)

考点二：对数函数过定点问题



例 2. (23-24 高一下·广东湛江·开学考试) 函数 $f(x) = \log_a(4x-3)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

的图象所过的定点为 ()

- A. (1,0) B. $(\frac{3}{4}, 0)$ C. (1,1) D. $(\frac{3}{4}, 1)$

【变式 2-1】(23-24 高一下·甘肃威武·开学考试) 函数 $f(x) = \log_a(2x-3)+5$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象过定点 A, 则 A 的坐标为 ()

- A. (1,0) B. (1,5) C. (2,5) D. (2,6)

【变式 2-2】(23-24 高一上·全国·专题练习) 函数 $y = \log_a x + a^{x-1} + 2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过的定点是 ()

- A. (1,2) B. (1,3) C. (2,2) D. (0,2)

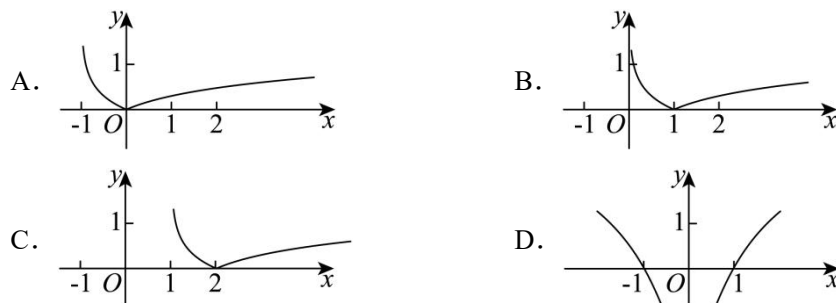
【变式 2-3】(23-24 高一上·江苏苏州·月考) 已知曲线 $y = \log_a(x-2)+1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 过定点 (s,t) , 若 $m+n=s-t$ 且 $m > 0, n > 0$, 则 $\frac{9}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 ()

- A. 16 B. 10 C. 8 D. 4

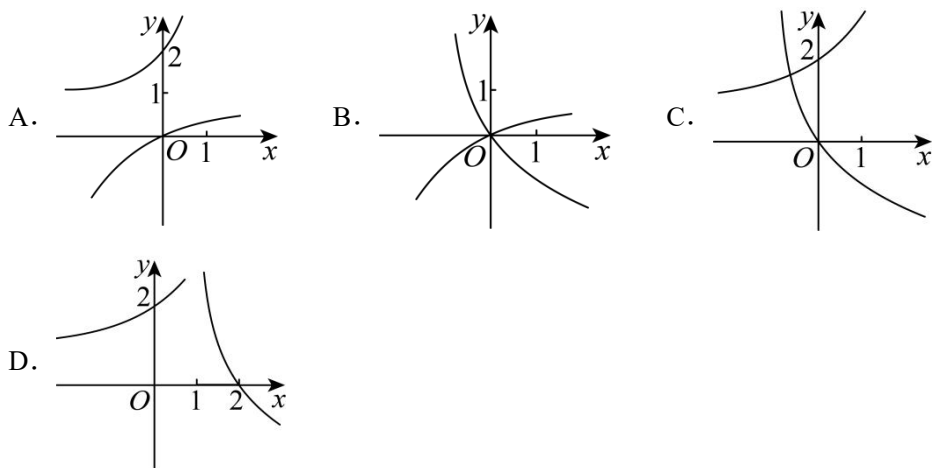
考点三：与对数函数有关的函数图象



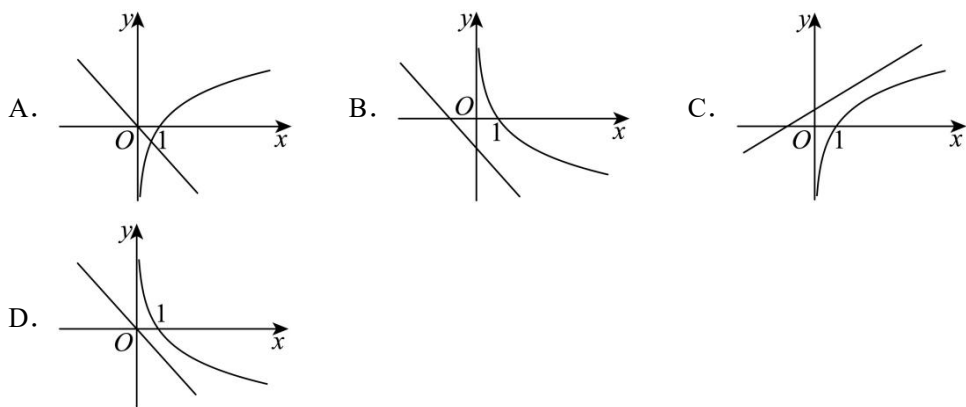
例 3. (23-24 高一下·青海西宁·开学考试) 函数 $y = |\lg(x+1)|$ 的图象是 ()



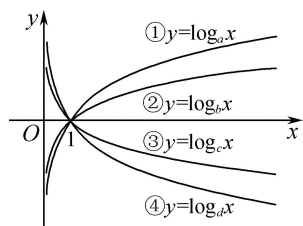
【变式 3-1】(23-24 高一上·四川攀枝花·月考) 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 则函数 $y = \log_a(x+1)$ 与 $y = (\frac{1}{a})^x + 1$ 在同一直角坐标系中的图象大致是 ()



【变式 3-2】(23-24 高一下·浙江·期中)在同一直角坐标系中,函数 $f(x) = (a-1)x, g(x) = \log_a x$ 的图象可能是 ()



【变式 3-3】(23-24 高一上·全国·专题练习)已知函数① $y = \log_a x$; ② $y = \log_b x$; ③ $y = \log_c x$; ④ $y = \log_d x$ 的大致图象如图所示, 则下列不等关系正确的是 ()



- A. $a+c < b+a$
- B. $a+d < b+c$
- C. $b+c < a+d$
- D. $b+d < a+c$

考点四：对数型复合函数的定义域



例 4. (23-24 高一上·四川广安·期末) 函数 $\lg(x-1) + \frac{1}{x-2}$ 的定义域为 ()

- A. $(1, +\infty)$
- B. $[1, 2) \cup (2, +\infty)$
- C. $(0, 2) \cup (2, +\infty)$
- D. $(1, 2) \cup (2, +\infty)$

【变式 4-1】(23-24 高一上·河南洛阳·月考) 函数 $f(x) = \frac{\lg(2x-1)}{x^2-1}$ 的定义域为 ()

- A. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-1, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$ D. $(\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$

【变式 4-2】(23-24 高一下·河南·开学考试) 函数 $f(x) = \log_{x-1} \sqrt{x^2-3x+2}$ 的定义域为 ()

- A. $\{x | x > 1 \text{ 且 } x \neq 2\}$ B. $\{x | 1 < x < 2\}$ C. $\{x | x > 2\}$
D. $\{x | x \neq 1\}$

【变式 4-3】(23-24 高一上·湖北·期末) 函数 $y = \sqrt{\log_{0.5}(4x-5)}$ 的定义域为 ()

- A. $(\frac{5}{4}, +\infty)$ B. $(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$ C. $[\frac{3}{2}, +\infty)$ D. $(-\infty, \frac{3}{2}]$

考点五：对数型复合函数的单调性



例 5. (23-24 高一上·浙江杭州·期末) 函数 $f(x) = \lg(4+3x-x^2)$ 的单调递减区间是 ()

- A. $(-\infty, \frac{3}{2}]$ B. $[\frac{3}{2}, +\infty)$ C. $(-1, \frac{3}{2}]$ D. $[\frac{3}{2}, 4)$

【变式 5-1】(23-24 高一下·山西大同·月考) 函数 $f(x) = \lg(4-|x|)$ 的单调递增区间为 ()

- A. $(-4, 0)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(0, 4)$ D. $(0, +\infty)$

【变式 5-2】(22-23 高一下·湖南长沙·期末) 已知 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2-ax+3a)$ 在 $[2, +\infty)$ 上为减函数，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 4]$ B. $(-4, 4]$ C. $(0, 2)$ D. $(0, 4]$

【变式 5-3】(23-24 高一下·贵州遵义·期中) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_a x + 1, & x \geq 1 \\ (4-a)x, & x < 1 \end{cases}$ 是 \mathbb{R} 上的单调递增函数，则 a 的取值范围是 ()

- A. $[2, 4)$ B. $[3, 4)$ C. $(1, 2]$ D. $(1, 3]$

考点六：对数型函数有关的值域



例 6. (23-24 高三上·陕西汉中·月考) 已知 $f(x) = (\log_2 x) \cdot \log_4 \frac{16}{x^2}$, $x \in [\frac{1}{2}, 8]$, 则 $f(x)$

的值域为 ()

- A. $[-3,1]$ B. $[-1,3]$ C. $[0,1]$ D. $[-3,0]$

【变式 6-1】(23-24 高一上·四川眉山·期中) 已知函数 $f(x) = \log_2\left(\frac{x}{8}\right) \cdot \log_2(8x)$, 则函数 $f(x)$ 的值域为 ()

- A. $[-9,0]$ B. $[-9,+\infty)$ C. $(-\infty,-9]$ D. $[-12,0]$

【变式 6-2】(22-23 高一下·云南保山·月考) 函数 $f(x) = \lg(x^2 + 2x + m)$ 的值域为 \mathbf{R} , 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $m > 1$ B. $m \geq 1$ C. $m \leq 1$ D. $m \in \mathbf{R}$

【变式 6-3】(23-24 高一上·山东菏泽·月考) 已知函数 $y = \log_2(4^x - a \cdot 2^x + a)$ 的值域为 \mathbf{R} , 则实数 a 的取值范围是_____.

考点七：利用单调性比较大小



例 7. (23-24 高一下·湖北·月考) 已知 $a = 2^{-3}$, $b = \log_2 3$, $c = \log_4 6$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < b < a$ D. $c < a < b$

【变式 7-1】(23-24 高一下·河南开封·月考) 已知 $a = \log_{0.5} 3$, $b = \log_2 3$, $c = 2^{-0.1}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $a < c < b$ B. $c < a < b$ C. $a < b < c$ D. $b < c < a$

【变式 7-2】(23-24 高一下·浙江·期中) 已知 $a = \log_6 2$, $b = \log_{0.6} 0.2$, $c = 0.6^{0.2}$, 则 a, b, c 的大小关系 ()

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

【变式 7-3】(23-24 高一下·湖南长沙·开学考试) 已知 $a = \log_3 2$, $b = \log_4 3$, $c = \log_5 4$, 则 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. $a > c > b$

考点八：利用单调性解对数不等式



例 8. 不等式 $\log_3(2x-1) \leq 2$ 的解集为 ()

- A. $\left[-\infty, \frac{3}{2}\right]$ B. $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$ C. $(-\infty, 5]$ D. $\left[-\infty, \frac{7}{2}\right]$

【变式 8-1】(22-23 高一下·湖南株洲·期中) 已知 $\log_4(3x) < \log_4(x+1)$, 则 x 的取值范围为

()

- A. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ B. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

【变式 8-2】(23-24 高一上·四川内江·月考) 设函数 $f(x) = \lg(x^2 + 1)$, 则使得 $f(2x-1) > f(x+1)$ 成立的 x 的取值范围为 ()

- A. $(0, 2)$ B. $(0, 2)$ C. $(-\infty, 2)$ D. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

【变式 8-3】(23-24 高一上·辽宁沈阳·月考) 已知不等式 $\log_x(2x^2 + 1) < \log_x(3x) < 0$ 成立, 则实数 x 的取值范围 ()

- A. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ B. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ D. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

考点九：对数型函数的奇偶性



例 9. (23-24 高一下·辽宁抚顺·开学考试) 函数 $f(x) = \lg\left(\frac{2}{x+1} - 1\right)$ 的图象关于 () 对称.

- A. 直线 $y=x$ B. 原点 C. x 轴 D. y 轴

【变式 9-1】(23-24 高一上·湖南娄底·期末) 已知函数 $f(x) = \lg \frac{a-x}{2+x} (x \neq -2)$ 是定义在 $(-b, b)$ 的奇函数, 则 a^b 的取值范围为 ()

- A. $(0, 4]$ B. $(0, 4)$ C. $(1, 4]$ D. $(1, 4)$

【变式 9-2】(23-24 高一上·全国·专题练习) 已知函数 $f(x) = \log_2(3+x) + \log_2(3-x)$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域;

(2) 求证: 函数 $f(x)$ 为偶函数;

(3) 求 $f(\sqrt{7})$ 的值.

【变式 9-3】(23-24 高一上·陕西安康·期末) 已知函数 $f(x) = \log_2 \frac{x+a}{1-x}$ (a 为常数) 是奇函数.

(1) 求 a 的值与函数 $f(x)$ 的定义域;

(2)若 $f(x) + \log_2(1-x) < m$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

考点十: 反函数及其性质应用



例 10. (23-24 高一上·湖南长沙·期中) 若对数函数 $f(x)$ 经过点 $(4, 2)$, 则它的反函数 $g(x)$ 的解析式为 ()

- A. $g(x) = 2^x$ B. $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ C. $g(x) = 4^x$ D. $g(x) = x^2$

【变式 10-1】(23-24 高一上·辽宁大连·期末) 函数 $y = -\sqrt{x-2}$ 的反函数是 ()

- A. $y = x^2 + 2 (-\infty < x < +\infty)$ B. $y = x^2 + 2 (x \geq 2)$
C. $y = x^2 + 2 (x \leq 2)$ D. $y = x^2 + 2 (x \leq 0)$

【变式 10-2】(23-24 高二上·天津和平·月考) 如果直线 $y = ax + 2$ 与直线 $y = 3x - b$ 关于直线 $y = x$ 对称, 那么 a, b 的值分别为 ()

- A. $a = \frac{1}{3}, b = 6$ B. $a = -\frac{1}{3}, b = 6$ C. $a = 3, b = -2$ D. $a = 3, b = 6$

【变式 10-3】(23-24 高一上·辽宁沈阳·月考) 设函数 $y = f(x)$ 存在反函数 $y = f^{-1}(x)$, 且函数 $y = x^2 - f(x)$ 的图象过点 $(2, 3)$, 则函数 $y = \sqrt{x} - f^{-1}(x)$ 的图象一定过点 ()

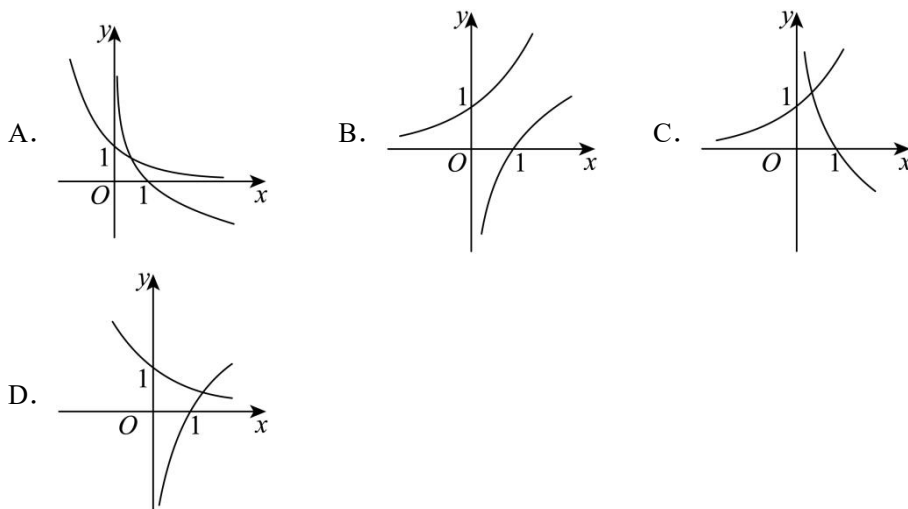
- A. $(1, -1)$ B. $(3, 2)$ C. $(1, 0)$ D. $(2, 1)$

◇ 模块四 小试牛刀过关测

一、单选题

- (23-24 高一下·黑龙江绥化·开学考试) 函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(3+x)$ 的定义域为 ()
A. $(-\infty, -3]$ B. $(-\infty, -3)$ C. $(-3, +\infty)$ D. $(-3, 0) \cup (0, +\infty)$
- (23-24 高一上·全国·课后作业) 若函数 $f(x) = (a^2 - 3a + 3)\log_a x$ 是对数函数, 则 a 的值是 ()
A. 1 或 2 B. 1 C. 2 D. $a > 0$ 且 $a \neq 1$

3. (23-24 高一上·安徽马鞍山·期末) 已知 $0 < a < 1$, 在同一坐标系中, 函数 $y = a^{-x}$ 与 $y = -\log_a x$ 的图象可能是 ()



4. (23-24 高一上·福建福州·月考) 已知函数 $f(x) = \log_5 x$, $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数, 则 $f(1) + g(1) =$ ()

- A. 10 B. 8 C. 5 D. 2

5. (23-24 高一下·湖南衡阳·开学考试) 已知 $a = \log_{16} 3, b = 2^{-2}, c = \log_9 2$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a > c > b$ B. $c > b > a$ C. $a > b > c$ D. $c > a > b$

6. (23-24 高一下·湖南长沙·期中) 若函数 $f(x) = \ln[(a-1)x+1]$ 在 $(2,3)$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $[\frac{2}{3}, 1)$ C. $[\frac{1}{2}, 1)$ D. $(\frac{2}{3}, 1)$

二、多选题

7. (23-24 高一上·贵州黔南·月考) 关于函数 $f(x) = \lg(x^2 + 2x - 3)$, 下列说法正确的是 ()

- A. $f(x)$ 的定义域为 $(-3, 1)$ B. $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
 C. $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1, +\infty)$ D. $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -3)$

8. (23-24 高一下·贵州贵阳·月考) 已知函数 $f(x) = \ln|1+x| - \ln|1-x|$, 则下列有关该函数叙述正确的有 ()

- A. $f(x)$ 是偶函数 B. $f(x)$ 是奇函数
 C. $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增 D. $f(x)$ 的值域为 $(0, +\infty)$

三、填空题

9. (23-24 高一·上海·假期作业) 函数 $f(x) = \lg(-x^2 + 4x)$ 的值域是 ____.
10. (23-24 高一上·云南曲靖·月考) 函数 $y = \log_a(3x+2) + 5$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点_____.
11. (23-24 高一上·陕西咸阳·期末) 已知函数 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 则 $g(x^2 + 1)$ 的值域为_____.

四、解答题

12. (23-24 高一上·云南昆明·期末) 设函数 $f(x) = \log_a(x-3) + 1$, ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).
- (1) 若 $f(12) = 3$, 解不等式 $f(x) > 0$;
- (2) 若 $f(x)$ 在 $[4, 5]$ 上的最大值与最小值之差为 1, 求 a 的值.

13. (23-24 高一上·河南驻马店·月考) 已知函数 $f(x) = \lg(1-x) - \lg(1+x)$.

- (1) 求函数 $y = f(x)$ 的定义域;
- (2) 判断函数 $y = f(x)$ 的奇偶性并说明理由;
- (3) 求证: 对于任意的 $x \in (-1, 1)$ 都有 $f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = 2f(x)$.

第 17 讲 对数函数及其性质

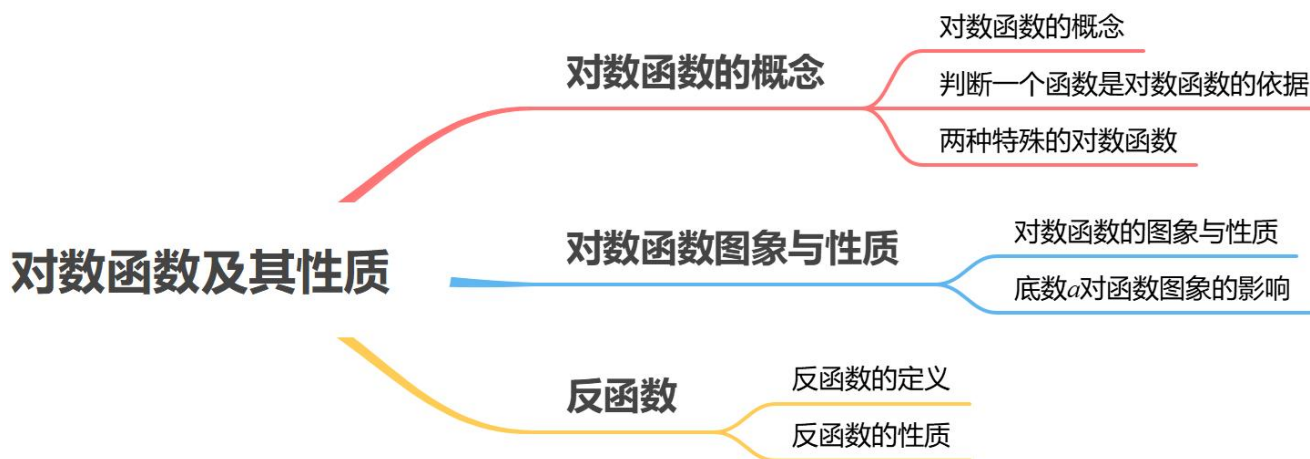
模块导航

- 模块一 思维导图串知识
- 模块二 基础知识全梳理（吃透教材）
- 模块三 核心考点举一反三
- 模块四 小试牛刀过关测

素养目标

1. 理解对数函数的概念，知道对数函数模型是一类重要的函数模型；
2. 会求简单的对数型函数的定义域；
3. 会用描点法画出对数函数的简图；
4. 掌握对数函数的性质，会解决简单的与性质有关的问题.

模块一 思维导图串知识



模块二 基础知识全梳理

知识点 1 对数函数的概念

1、对数函数的概念：函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$) 叫做对数函数，其中 x 是自变量，定义域为 $(0, +\infty)$ 。

2、判断一个函数是对数函数的依据

(1) 形如 $y = \log_a x$ ，且系数为 1；(2) 底数 a 满足 $a > 0$ ，且 $a \neq 1$ ；(3) 真数是 x 而不是 x 的函数；(4) 整体只有一项；(5) 定义域为 $(0, +\infty)$ 。

例如， $y = \log_2(x+1)$ ， $y = 2 \log_2 x$ 都不是对数函数，可称为对数型函数。

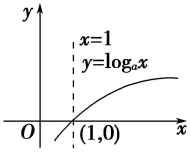
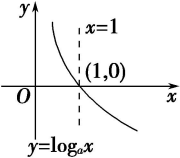
3、两种特殊的对数函数

(1) 常用对数函数：以 10 为底的对数函数 $y = \lg x$ 。

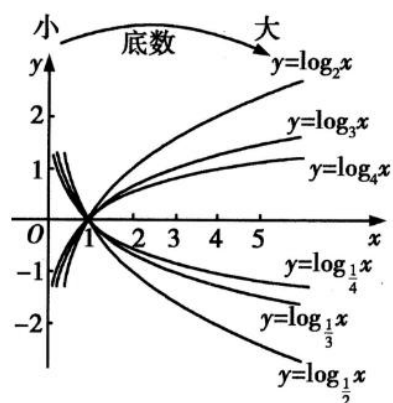
(2) 自然对数函数：以无理数 e 为底的对数函数 $y = \ln x$ 。

知识点 2 对数函数及其性质

1、对数函数的图象与性质

		$a > 1$	$0 < a < 1$
图象			
性质	定义域	$(0, +\infty)$	
	值域	\mathbf{R}	
	过定点	过定点(1, 0), 即 $x=1$ 时, $y=0$	
	函数值的变化	当 $0 < x < 1$ 时, $y < 0$; 当 $x > 1$ 时, $y > 0$	当 $0 < x < 1$ 时, $y > 0$; 当 $x > 1$ 时, $y < 0$
	单调性	是 $(0, +\infty)$ 上的增函数	是 $(0, +\infty)$ 上的减函数

2、底数 a 对函数图象的影响



(1) 底数 a 与 1 的大小关系决定了对数函数图象的“升降”：当 $a > 1$ 时，图象呈上升趋势；当 $0 < a < 1$ 时，图象呈下降趋势；

(2) 函数 $y = \log_a x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象关于 x 轴对称；

(3) 底数的大小决定了图象相对位置的高低：无论 $a > 1$ 还是 $0 < a < 1$ ，在第一象限内，自左向右，图象对应的对数函数的底数逐渐变大。

知识点 3 反函数

1、反函数的定义

一般地，函数 $y = f(x)(x \in A)$ ，设它的值域为 C ，根据这个函数中 x, y 的关系，用 y 把 x 表示出来，得到 $x = g(y)$ 。如果 y 在 C 中的任何取值，通过 $x = g(y)$ ， x 在 A 中都有唯一值和它对应，则 $x = g(y)$ 就表示 x 是关于自变量 y 的函数。这样的函数 $x = g(y)(y \in C)$ 叫

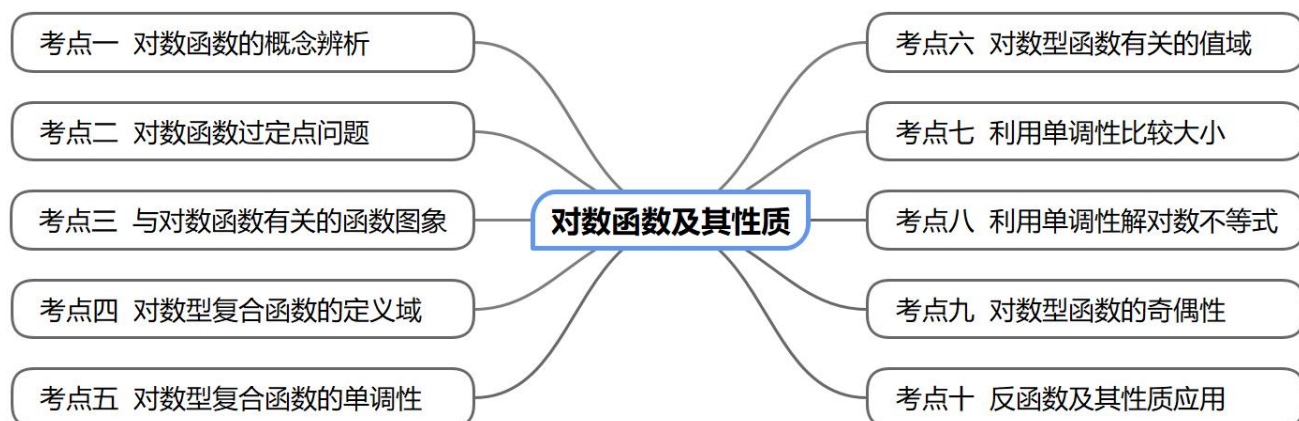
做 $y = f(x)(x \in A)$ 的反函数, 记作 $y = f^{-1}(x)$.

例如, 对数函数 $y = \log_a x (a > 0, \text{且} a \neq 1)$ 是指数函数 $y = a^x (a > 0, \text{且} a \neq 1)$ 的反函数.

2、反函数的性质

- (1) 互为反函数的两个函数的图象关于直线 $y = x$ 对称;
- (2) 若函数 $y = f(x)$ 的图象上有一点 (a, b) , 则点 (b, a) 必在其反函数的图象上, 反之也成立;
- (3) 互为反函数的两个函数的单调性相同;
- (4) 反函数的定义域是原函数的值域, 反函数的值域是原函数的定义域;
- (5) 单调函数必有反函数.

◇ 模块三 核心考点举一反三



考点一：对数函数的概念辨析



例 1. (22-23 高一上·云南曲靖·月考) 下列函数是对数函数的是 ()

- A. $y = \ln x$ B. $y = \log_2 x^2$ C. $y = \log_a \frac{x}{9}$ D. $y = \log_2 x - 2022$

【答案】A

【解析】形如 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 的函数叫作对数函数, 它的定义域是 $(0, +\infty)$,

对于 A, $y = \ln x = \log_e x$ 满足, 故 A 正确;

对于 B, C, D, 形式均不正确, 均错误. 故选: A

【变式 1-1】(22-23 高一上·河北唐山·月考) 下列函数是对数函数的是 ()

A. $y = \log_a(2x)$ B. $y = \lg 10^x$ C. $y = \log_a(x^2 + x)$ D. $y = \ln x$

【答案】D

【解析】因为函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 为对数函数,

所以 ABC 均为对数型复合函数, 而 D 是底数为自然常数的对数函数. 故选: D.

【变式 1-2】(23-24 高一上·全国·课后作业) 下列函数, 其中为对数函数的是 ()

A. $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ B. $y = 2\log_4(1-x)$ C. $y = \ln x$ D. $y = \log_{(a^2+a)} x$

【答案】C

【解析】函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$, $y = 2\log_4(1-x)$ 的真数不是自变量, 它们不是对数函数, AB 不是;

函数 $y = \ln x$ 是对数函数, C 是;

函数 $y = \log_{(a^2+a)} x$ 的底数含有参数 a ,

而 a 的值不能保证 $a^2 + a$ 是不等于 1 的正数, D 不是. 故选: C

【变式 1-3】(23-24 高一上·全国·课堂例题) (多选) 下列函数中为对数函数的是 ()

A. $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ B. $y = \log_4 x^2$ C. $y = \ln x$ D. $y = \log_{(a^2+a+2)} x$ (a 是常数)

【答案】CD

【解析】对于 A, 真数是 $-x$, 故 A 不是对数函数;

对于 B, $y = \log_4 x^2 = \log_2 |x|$, 真数是 $|x|$, 不是 x , 故 B 不是对数函数;

对于 C, $\ln x$ 的系数为 1, 真数是 x , 故 C 是对数函数;

对于 D, 底数 $a^2 + a + 2 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 1$, 真数是 x , 故 D 是对数函数. 故选: CD

考点二: 对数函数过定点问题



例 2. (23-24 高一下·广东湛江·开学考试) 函数 $f(x) = \log_a(4x-3)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

的图象所过的定点为 ()

- A. (1,0) B. $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ C. (1,1) D. $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$

【答案】A

【解析】因为函数 $f(x) = \log_a(4x-3)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$),

令 $4x-3=1$, 解得 $x=1$, 则 $f(1) = \log_a 1 = 0$,

所以 $f(x)$ 的图象所过的定点为 (1,0). 故选: A.

【变式 2-1】(23-24 高一下·甘肃威武·开学考试) 函数 $f(x) = \log_a(2x-3)+5$ ($a > 0$, $a \neq 1$) 的图象过定点 A, 则 A 的坐标为 ()

- A. (1,0) B. (1,5) C. (2,5) D. (2,6)

【答案】C

【解析】令 $2x-3=1$, 则 $x=2$, 此时 $f(x) = \log_a 1 + 5 = 5$, 故定点 A 的坐标为 (2,5). 故选: C

【变式 2-2】(23-24 高一上·全国·专题练习) 函数 $y = \log_a x + a^{x-1} + 2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过的定点是 ()

- A. (1,2) B. (1,3) C. (2,2) D. (0,2)

【答案】B

【解析】当 $x=1$ 时, $f(x) = \log_a x$ 恒等于 0, $g(x) = a^{x-1}$ 恒等于 1,

故 $y = \log_a x + a^{x-1} + 2$ 恒等于 $0+1+2=3$,

所以 $y = \log_a x + a^{x-1} + 2$ 的图象恒过的定点是 (1,3). 故选: B

【变式 2-3】(23-24 高一上·江苏苏州·月考) 已知曲线 $y = \log_a(x-2)+1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 过定点 (s,t) , 若 $m+n=s-t$ 且 $m > 0$, $n > 0$, 则 $\frac{9}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 ()

- A. 16 B. 10 C. 8 D. 4

【答案】C

【解析】对于 $y = \log_a(x-2)+1$, 令 $x-2=1$, 即 $x=3$, 则 $y=1$,

即曲线 $y = \log_a(x-2)+1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 过定点 (3,1), 即 $s=3, t=1$, 故 $m+n=2$,

又 $m > 0$, $n > 0$, 则

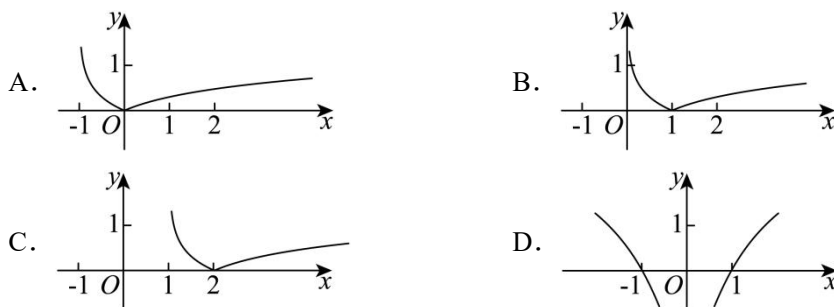
$$\frac{9}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{m} + \frac{1}{n} \right) (m+n) = \frac{1}{2} \left(10 + \frac{9n}{m} + \frac{m}{n} \right) \geq \frac{1}{2} \times (10 + 2\sqrt{\frac{9n}{m} \cdot \frac{m}{n}}) = 8,$$

当且仅当 $\frac{9n}{m} = \frac{m}{n}$, 结合 $m+n=2$, 即 $m = \frac{3}{2}, n = \frac{1}{2}$ 时等号成立, 故选: C

考点三: 与对数函数有关的函数图象



例 3. (23-24 高一下·青海西宁·开学考试) 函数 $y = |\lg(x+1)|$ 的图象是 ()



【答案】 A

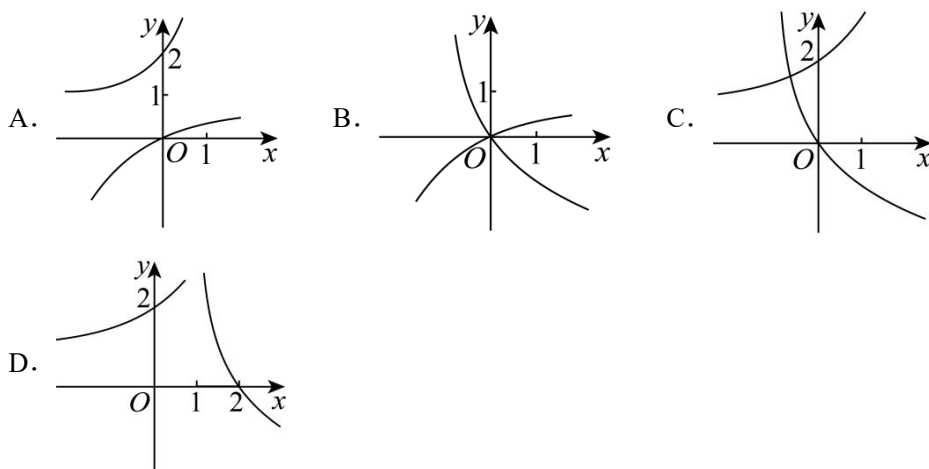
【解析】 因为 $y = |\lg(x+1)| \geq 0$, 故排除 D;

当 $x=0$ 时, $y = |\lg(0+1)| = 0$, 故排除 BC;

结合对数函数的性质可知 A 正确. 故选: A.

【变式 3-1】 (23-24 高一上·四川攀枝花·月考) 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 则函数 $y = \log_a(x+1)$ 与

$y = \left(\frac{1}{a}\right)^x + 1$ 在同一直角坐标系中的图象大致是 ()



【答案】 C

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/776004043105011001>