

第 11 讲 反比例函数（精讲）



重点难点



1. 结合具体情境体会反比例函数的意义，能根据已知条件确定反比例函数的关系式
2. 能画出反比例函数的图像，根据图像和关系式 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 探索并理解 $k > 0$ 和 $k < 0$ 时，图像的变化情况
3. 能用反比例函数解决简单实际问题

作者使用建议



实战经典

: 课前预复习



典例精析

: 课上讲解练



举一反三

: 课上巩固练



第11讲：反比例函数

反比例函数的概念及其图像与性质

定义

形如 $y=k/x$ ($k \neq 0$) 的函数称为反比例函数， k 叫做比例系数，自变量的取值范围是非零的一切实数。

形式

形式：反比例函数有以下三种基本形式：① $y=k/x$ ；② $y=kx$ （负一次方）；③ $xy=k$ 。（其中 k 为常数，且 $k \neq 0$ ）

图像

$k>0$ ，图像经过第一、三象限（ x 、 y 同号）； $k<0$ ，图像经过第二、四象限（ x 、 y 异号）

性质

$k>0$ ，每个象限内，函数 y 的值随 x 的增大而减小。
 $k<0$ ，每个象限内，函数 y 的值随 x 的增大而增大。

根据待定系数法确定反比例函数解析式

待定系数法

只需要知道双曲线上任意一点坐标，设函数解析式，代入求出反比例函数系数 k 即可。

反比例函数与几何综合

意义

从反比例函数 $y=k/x$ ($k \neq 0$) 图象上任意一点向 x 轴和 y 轴作垂线，垂线与坐标轴所围成的矩形面积为 $|k|$ ，以该点、一个垂足和原点为顶点的三角形的面积为 $1/2|k|$ 。

确定交点坐标

【方法一】已知一个交点坐标为 (a, b) ，则根据中心对称性，可得另一个交点坐标为 $(-a, -b)$ 。【方法二】联立两个函数解析式，利用方程思想求解。

确定函数解析式

利用待定系数法，先确定交点坐标，再分别代入两个函数解析式中求解

反比例函数与一次函数综合

在同一坐标系中判断函数图象

充分利用函数图象与各字母系数的关系，可采用假设法，分 $k>0$ 和 $k<0$ 两种情况讨论，看哪个选项符合要求即可。也可逐一选项判断、排除。

比较函数值的大小

主要通过观察图象，图象在上方的值大，图象在下方的值小，结合交点坐标，确定出解集的范围

反比例函数的实际应用

一般步骤

- (1) 题意找出自变量与因变量之间的乘积关系；
- (2) 设出函数表达式；
- (3) 依题意求解函数表达式；
- (4) 根据反比例函数的表达式或性质解决相关问题。

知识点精析

考点 1: 反比例函数的概念、图像与性质

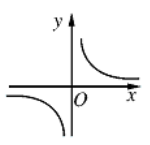
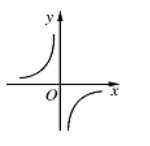
1. 反比例函数的概念:

(1) 定义: 形如 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的函数称为反比例函数, k 叫做比例系数, 自变量的取值范围是非零的一切实数.

(2) 形式: 反比例函数有以下三种基本形式:

① $y = \frac{k}{x}$; ② $y = kx^{-1}$; ③ $xy = k$. (其中 k 为常数, 且 $k \neq 0$)

2. 反比例函数图像与性质

k 的符号	图象	经过象限	y 随 x 变化的情况
$k > 0$		图象经过第一、三象限 (x, y 同号)	每个象限内, 函数 y 的值随 x 的增大而减小.
$k < 0$		图象经过第二、四象限 (x, y 异号)	每个象限内, 函数 y 的值随 x 的增大而增大.

3. 反比例函数的图像特征

- (1) 由两条曲线组成, 叫做双曲线;
- (2) 图象的两个分支都无限接近 x 轴和 y 轴, 但都不会与 x 轴和 y 轴相交;
- (3) 图象是中心对称图形, 原点为对称中心; 也是轴对称图形, 2 条对称轴分别是平面直角坐标系一、三象限和二、四象限的角平分线.



实战经典

1. (2018·柳州) 已知反比例函数的解析式为 $y = \frac{|a|-2}{x}$, 则 a 的取值范围是()

A. $a \neq 2$

B. $a \neq -2$

C. $a \neq \pm 2$

D. $a = \pm 2$

【分析】根据反比例函数解析式中 k 是常数, 不能等于 0 解答即可.

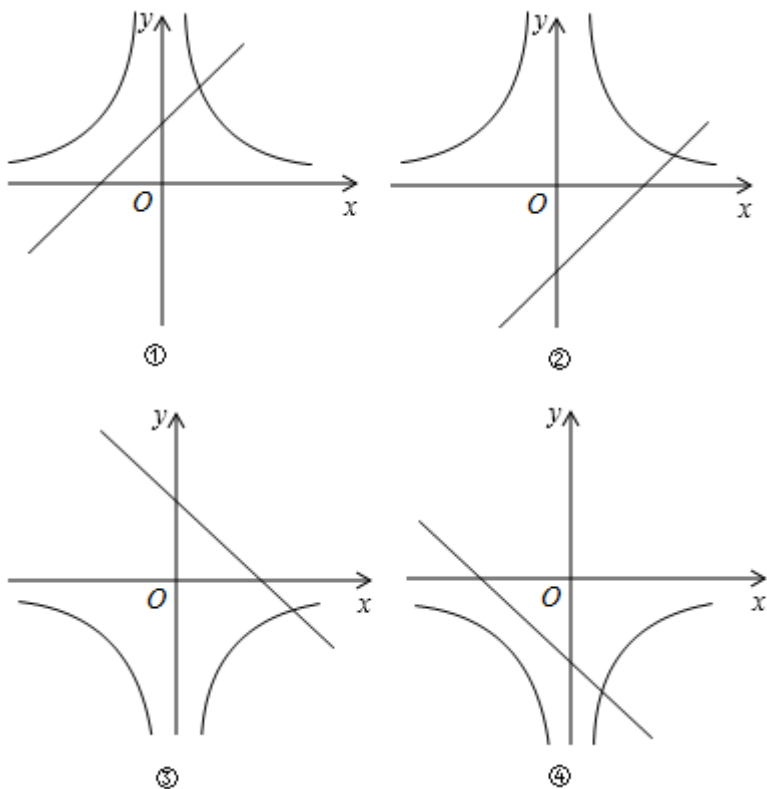
【解答】解: 根据反比例函数解析式中 k 是常数, 不能等于 0, 由题意可得: $|a|-2 \neq 0$,

解得: $a \neq \pm 2$,

故选：C．

【点评】此题主要考查了反比例函数，关键是根据反比例函数关系式中 k 的取值范围解答．

2. （2021•荆门）在同一平面直角坐标系中，函数 $y=kx-k$ 与 $y=\frac{k}{|x|}$ ($k \neq 0$)的大致图象是()



A. ①②

B. ②③

C. ②④

D. ③④

【分析】根据 k 的取值范围，分别讨论 $k > 0$ 和 $k < 0$ 时的情况，然后根据一次函数和反比例函数图象的特点进行选择正确答案．

【解答】解：当 $k > 0$ 时，

一次函数 $y=kx-k$ 经过一、三、四象限，

函数的 $y=\frac{k}{|x|}$ ($k \neq 0$)的图象在一、二象限，

故选项②的图象符合要求．

当 $k < 0$ 时，

一次函数 $y=kx-k$ 经过一、二、四象限，

函数的 $y=\frac{k}{|x|}$ ($k \neq 0$)的图象经过三、四象限，

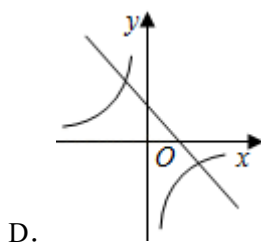
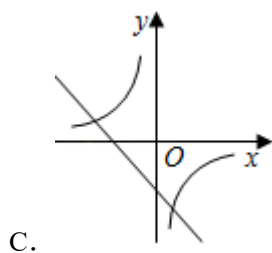
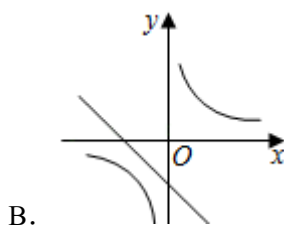
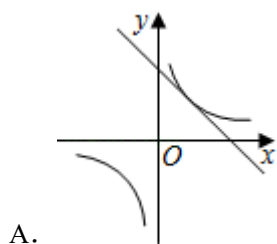
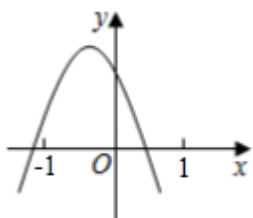
故选项③的图象符合要求．

故选：B．

【点评】此题考查一次函数的图象和反比例函数的图象，数形结合是解题的关键．

3. （2021•聊城）已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示，则一次函数 $y = bx + c$ 的图象和反比例函数

数 $y = \frac{a+b+c}{x}$ 的图象在同一坐标系中大致为()



【分析】先根据二次函数的图象开口向下和对称轴可知 $b < 0$ ，由抛物线交 y 的正半轴，可知 $c > 0$ ，由当 $x = 1$ 时， $y < 0$ ，可知 $a + b + c < 0$ ，然后利用排除法即可得出正确答案．

【解答】解：∵二次函数的图象开口向下，

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore -\frac{b}{2a} < 0,$$

$$\therefore b < 0,$$

∵抛物线与 y 轴相交于正半轴，

$$\therefore c > 0,$$

∴直线 $y = bx + c$ 经过一、二、四象限，

由图象可知，当 $x = 1$ 时， $y < 0$ ，

$$\therefore a + b + c < 0,$$

∴反比例函数 $y = \frac{a+b+c}{x}$ 的图象必在二、四象限，

故 A 、 B 、 C 错误， D 正确；

故选： D 。

【点评】 本题考查的是二次函数的图象与系数的关系，反比例函数及一次函数的性质，熟知以上知识是解答此题的关键。

4. (2021•黔西南州) 对于反比例函数 $y = -\frac{5}{x}$ ，下列说法错误的是()

- A. 图象经过点 $(1, -5)$ B. 图象位于第二、第四象限
C. 当 $x < 0$ 时， y 随 x 的增大而减小 D. 当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大

【分析】 根据题目中的函数解析式和反比例函数的性质，可以判断各个选项中的说法是否正确，从而可以解答本题。

【解答】 解：∵ 反比例函数 $y = -\frac{5}{x}$ ，

∴ 当 $x = 1$ 时， $y = -\frac{5}{1} = -5$ ，故选项 A 不符合题意；

$k = -5$ ，故该函数图象位于第二、四象限，故选项 B 不符合题意；

当 $x < 0$ ， y 随 x 的增大而增大，故选项 C 符合题意；

当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大，故选项 D 不符合题意；

故选： C 。

【点评】 本题考查反比例函数的性质，解答本题的关键是明确题意，利用反比例函数的性质解答。

5. (2021•德州) 小红同学在研究函数 $y = |x| + \frac{4}{|x|}$ 的图象时，发现有如下结论：①该函数有最小值；②该

函数图象与坐标轴无交点；③当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大；④该函数图象关于 y 轴对称；⑤直线

$y = 8$ 与该函数图象有两个交点，则上述结论中正确的个数为()

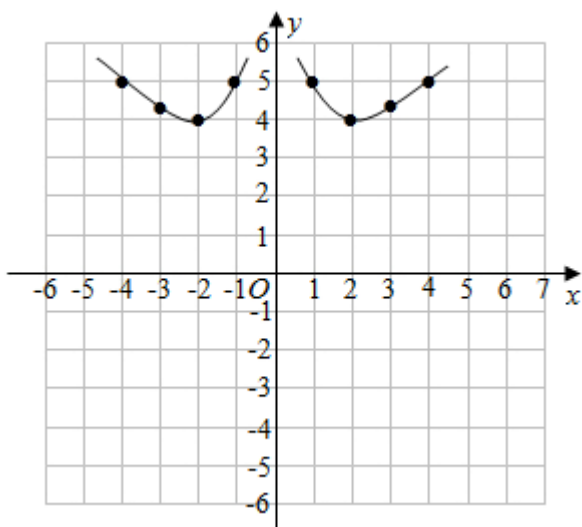
- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

【分析】 利用函数的图象和函数的增减性的特征对每一个选项进行分析判断得出结论。

【解答】 解：列表：

x	...	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	...
y	...	5	$\frac{13}{3}$	4	5	5	4	$\frac{13}{3}$	5	...

画出函数图象如图，



观察图象：

①该函数有最小值，符合题意；

②该函数图象与坐标轴无交点，符合题意；

③当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大，不合题意；

④该函数图象关于 y 轴对称，符合题意；

⑤令 $|x| + \frac{4}{|x|} = 8$ ，整理得 $x^2 - 8x + 4 = 0$ 或 $x^2 + 8x + 4 = 0$ ，

$$\therefore \Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times 4 > 0,$$

$\therefore$ 两个方程均有两个不相等的实数根，即共有四个根，且这四个根互不相等。

$\therefore$ 直线 $y = 8$ 与该函数图象有四个交点，不符合题意，

综上，以上结论正确的有：①②④，

故选：B。

【点评】 本题主要考查了函数的图象，函数的增减性，图象与 x 轴的交点，函数的极值。充分利用函数的图象，利用数形结合的思想是解题的关键。

6. （2021•杭州）已知 y_1 和 y_2 均是以 x 为自变量的函数，当 $x = m$ 时，函数值分别是 M_1 和 M_2 ，若存在实数 m ，使得 $M_1 + M_2 = 0$ ，则称函数 y_1 和 y_2 具有性质 P 。以下函数 y_1 和 y_2 具有性质 P 的是（ ）

A. $y_1 = x^2 + 2x$ 和 $y_2 = -x - 1$

B. $y_1 = x^2 + 2x$ 和 $y_2 = -x + 1$

C. $y_1 = -\frac{1}{x}$ 和 $y_2 = -x - 1$

D. $y_1 = -\frac{1}{x}$ 和 $y_2 = -x + 1$

【分析】 根据题干信息可知，直接令 $y_1 + y_2 = 0$ ，若方程有解，则具有性质 P ，若无解，则不具有性质 P 。

【解答】解 A. 令 $y_1 + y_2 = 0$, 则 $x^2 + 2x - x - 1 = 0$, 解得 $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, 即函数 y_1 和 y_2 具有性质 P , 符合题意;

B. 令 $y_1 + y_2 = 0$, 则 $x^2 + 2x - x + 1 = 0$, 整理得, $x^2 + x + 1 = 0$, 方程无解, 即函数 y_1 和 y_2 不具有性质 P , 不符合题意;

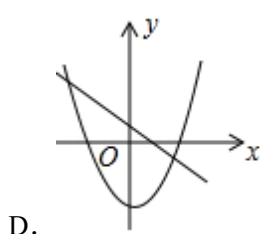
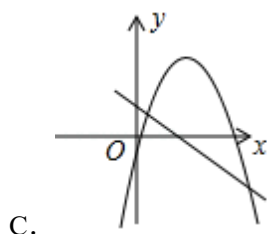
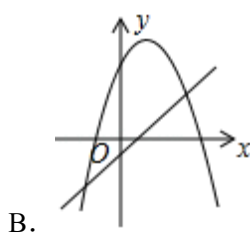
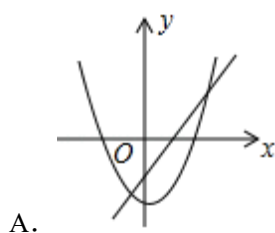
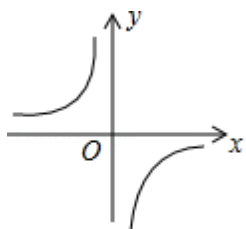
C. 令 $y_1 + y_2 = 0$, 则 $-\frac{1}{x} - x - 1 = 0$, 整理得, $x^2 + x + 1 = 0$, 方程无解, 即函数 y_1 和 y_2 不具有性质 P , 不符合题意;

D. 令 $y_1 + y_2 = 0$, 则 $-\frac{1}{x} - x + 1 = 0$, 整理得, $x^2 - x + 1 = 0$, 方程无解, 即函数 y_1 和 y_2 不具有性质 P , 不符合题意;

故选: A.

【点评】本题属于新定义类问题, 根据给出定义构造方程, 利用方程思想解决问题是常见思路, 本题也可利用函数图象快速解答.

7. (2021•青岛) 已知反比例函数 $y = \frac{b}{x}$ 的图象如图所示, 则一次函数 $y = cx + a$ 和二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 在同一平面直角坐标系中的图象可能是()



【分析】根据反比例函数的图象得出 $b < 0$, 逐一分析四个选项, 根据二次函数图象的开口以及对称轴与 y 轴的关系, 抛物线与 y 轴的交点, 即可得出 a 、 b 、 c 的正负, 由此即可得出一一次函数图象经过的象限, 再

与函数图象进行对比即可得出结论.

【解答】解: $\because$ 反比例函数的图象在二、四象限,

$$\therefore b < 0,$$

A 、 $\because$ 二次函数图象开口向上, 对称轴在 y 轴右侧, 交 y 轴的负半轴,

$$\therefore a > 0, \quad b < 0, \quad c < 0,$$

$\therefore$ 一次函数图象应该过第一、二、四象限, A 错误;

B 、 $\because$ 二次函数图象开口向下, 对称轴在 y 轴右侧,

$$\therefore a < 0, \quad b > 0,$$

$\therefore$ 与 $b < 0$ 矛盾, B 错误;

C 、 $\because$ 二次函数图象开口向下, 对称轴在 y 轴右侧,

$$\therefore a < 0, \quad b > 0,$$

$\therefore$ 与 $b < 0$ 矛盾, C 错误;

D 、 $\because$ 二次函数图象开口向上, 对称轴在 y 轴右侧, 交 y 轴的负半轴,

$$\therefore a < 0, \quad b < 0, \quad c < 0,$$

$\therefore$ 一次函数图象应该过第一、二、四象限, D 正确.

故选: D .

【点评】本题主要考查了一次函数、反比例函数、二次函数的图象与性质, 根据函数图象与系数的关系进行判断是解题的关键, 同时考查了数形结合的思想.



典例精析

【例题1】 (2021 秋·隆回县期中) 下面的函数是反比例函数的是()

A. $y = \frac{3}{x-1}$

B. $y = \frac{x}{2}$

C. $y = \frac{1}{3x}$

D. $y = \frac{-1}{x^3}$

【分析】 根据反比例函数的定义逐个判断即可.

【解答】 解: A. y 不是关于 x 的反比例函数, 故本选项不符合题意;

B. y 是 x 的正比例函数, 不是反比例函数, 故本选项不符合题意;

C. y 是关于 x 的反比例函数, 故本选项符合题意;

D. y 不是关于 x 的反比例函数, 故本选项不符合题意;

故选: C.

【点评】 本题考查了反比例函数的定义, 能熟记反比例函数的定义是解此题的关键, 注意: 形如 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$) 的函数, 叫反比例函数.

【例题2】 (2021 春·肇源县期末) 若函数 $y = (m^2 - 3m + 2)x^{|m|-3}$ 是反比例函数, 则 m 的值是()

A. 1

B. -2

C. 2 或 -2

D. 2

【分析】 根据反比例函数的意义, 得出 $|m| - 3 = -1$, 且 $m^2 - 3m + 2 \neq 0$, 进而求出 m 的值.

【解答】 解: $\because$ 函数 $y = (m^2 - 3m + 2)x^{|m|-3}$ 是反比例函数,

$$\therefore |m| - 3 = -1, \text{ 且 } m^2 - 3m + 2 \neq 0,$$

$$\therefore m = \pm 2,$$

当 $m = 2$ 时, $m^2 - 3m + 2 = 0$, 不合题意舍去,

$$\text{当 } m = -2 \text{ 时, } m^2 - 3m + 2 = 12 \neq 0,$$

$$\therefore m = -2,$$

故选: B.

【点评】 本题考查反比例函数的定义, 理解反比例函数的意义, 得出 $|m| - 3 = -1$, 且 $m^2 - 3m + 2 \neq 0$ 是解决问题的关键.

【例题3】 (2021·南岗区校级开学) 下面每个选项中的两种量成反比例的是()

- A. A 和 B 互为倒数
- B. 圆柱的高一定，体积和底面积
- C. 被减数一定，减数和差
- D. 除数一定，商和被除数

【分析】两种量成反比例，就是这两种量的乘积等于一个定值．

【解答】解：A．因为 A 和 B 互为倒数，所以 $A \times B = 1$ ，符合题意；

B．圆柱的体积 $\div$ 底面积 = 高，不是乘积，不符合题意；

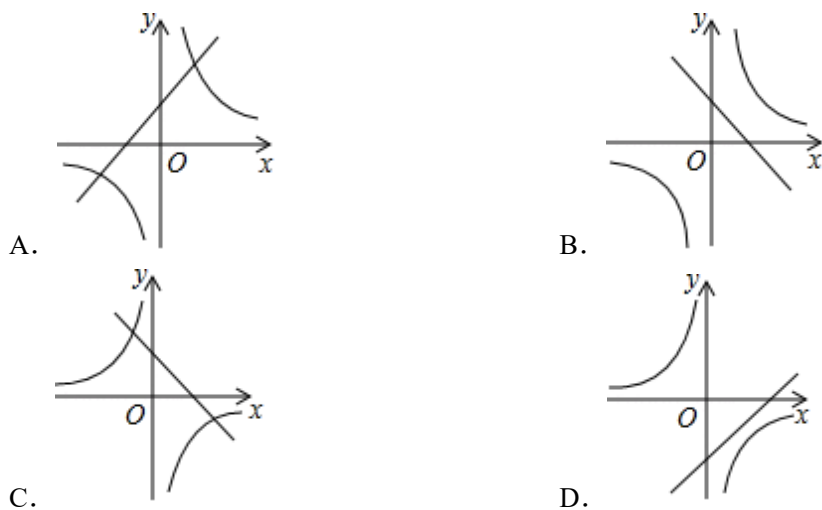
C．减数 + 差 = 被减数，不是乘积，不符合题意；

D．被除数 $\div$ 商 = 除数，不是乘积，不符合题意．

故选：A．

【点评】这道题主要考查了反比例的概念，正比例关系是两个量的比值是一个定值，希望加以区分．

【例题4】（2021 秋•市中区期中）反比例函数 $y = -\frac{k}{x}$ 与 $y = kx + 1 (k \neq 0)$ 在同一坐标系的图象可能为()



【分析】分别根据反比例函数与一次函数的性质对各选项进行逐一分析即可．

【解答】解：A、由反比例函数的图象可知， $k < 0$ ，一次函数图象呈下降趋势且交与 y 轴的正半轴，故本选项不符合题意；

B、由反比例函数的图象可知， $-k > 0$ ，一次函数图象呈下降趋势且交与 y 轴的正半轴，故本选项符合题意；

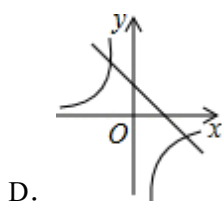
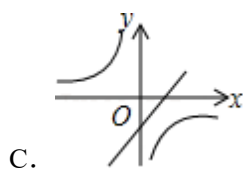
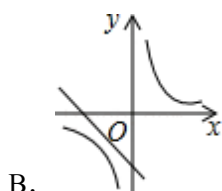
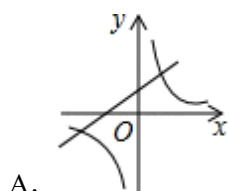
C、由反比例函数的图象可知， $-k < 0$ ，一次函数图象呈上升趋势且交与 y 轴的正半轴，故本选项不符合题意；

D、由反比例函数的图象可知， $-k < 0$ ，一次函数图象呈上升趋势且交与 y 轴的正半轴，故本选项不符合题意．

故选：B．

【点评】本题考查的是反比例函数的图象与一次函数的图象，熟知反比例函数中系数及常数项与图象位置之间关系是解答此题的关键．

【例题5】（2021秋•金牛区校级期中）反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ 与一次函数 $y = x - 2$ 在同一坐标系中的大致图象可能是（ ）

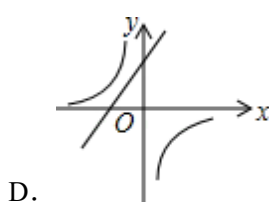
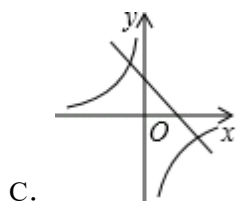
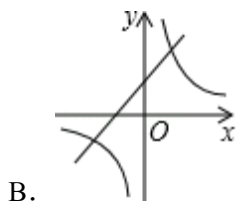
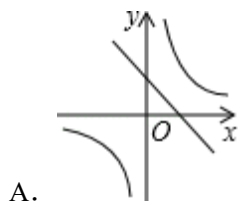


【分析】根据反比例函数的性质、一次函数的性质即可判断反比例函数的图象和一次函数的图象所处的象限，据此即可选C．

【解答】解：由反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ 与一次函数 $y = x - 2$ 可知，反比例函数的图象在二、四象限，一次函数的图象通过一、三、四象限，
故选：C．

【点评】本题考查了反比例函数的图象、一次函数的图象，熟练掌握一次函数的性质和反比例函数的性质是解题的关键．

【例题6】（2021秋•天长市月考）函数 $y = \frac{k}{x}$ 与 $y = kx + k$ 在同一坐标系的图象可能是下列选项中的（ ）



【分析】因为 k 的符号不确定，所以应根据 k 的符号及一次函数与反比例函数图象的性质解答．

【解答】解：∵ $y = kx + k = k(x+1)$ ，

∴ 直线经过点 $(-1, 0)$ ，故 A 、 C 选项错误；

当 $k < 0$ 时，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象在二、四象限，一次函数 $y = kx + k$ 的图象过二、三、四象限，选项 D 不符合；

当 $k > 0$ 时，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象在一、三象限，一次函数 $y = kx + k$ 的图象过一、二、三象限，选项 B 符合。

故选： B 。

【点评】 本题主要考查了反比例函数和一次函数的图象性质，正确掌握它们的性质才能灵活解题。

【例题7】 (2021 秋•任城区期中) 对于反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ ，下列说法不正确的是()

- A. 这个函数的图象分布在第一、三象限
- B. 点 $(1, 4)$ 在这个函数图象上
- C. 这个函数的图象既是轴对称图形又是中心对称图形
- D. 当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大

【分析】 根据反比例函数的性质：当 $k > 0$ ，双曲线的两支分别位于第一、三象限，在每一象限内 y 随 x 的增大而减小进行分析即可。

【解答】解：A、反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 中的 $k = 4 > 0$ ，双曲线的两支分别位于第一、三象限，正确，不符合题意；

B、点 $(1, 4)$ 在它的图象上，正确，不符合题意；

C、反比例函数的图象既是轴对称图形又是中心对称图形，正确，不符合题意；

D、反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 中的 $k = 4 > 0$ ，其在每一象限内 y 随 x 的增大而减小，不正确，符合题意；

故选： D 。

【点评】 本题考查反比例函数图象与性质，关键掌握以下性质：反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ ，当 $k > 0$ ，反比例函数图象在一、三象限，每个象限内， y 随 x 的增大而减小；当 $k < 0$ ，反比例函数图象在第二、四象限内，每个象限内， y 随 x 的增大而增大

【例题8】 (2021 秋•道县期中) 对于反比例函数 $y = -\frac{2021}{x}$ ，下列说法不正确的是()

- A. 图象分布在二、四象限内
- B. 图象经过点 $(1, -2021)$

C. 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大

D. 若点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 都在函数的图象上, 且 $x_1 < x_2$ 时, 则 $y_1 < y_2$

【分析】 根据反比例函数图象的性质对各选项分析判断后利用排除法求解.

【解答】 解: A、 $\because k = -2021 < 0$, $\therefore$ 它的图象在第二、四象限, 故本选项正确, 不符合题意;

B、 $\because x = 1$ 时, $y = -\frac{2021}{1} = -2021$, $\therefore$ 点 $(1, -2021)$ 在它的图象上, 故本选项正确, 不符合题意;

C、 $\because k = -2021 < 0$, $\therefore$ 当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而增大, 故本选项正确, 不符合题意;

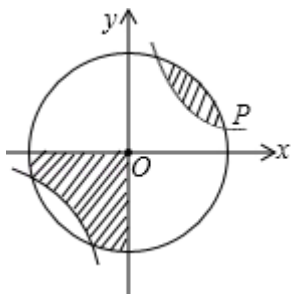
D、 $\because k = -2021 < 0$, $\therefore$ 在每一个象限内, y 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $x_1 < x_2 < 0$, 则 $y_1 < y_2$, 故本选项错误, 符合题意,

故选: D.

【点评】 本题考查了反比例函数的性质: 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象是双曲线; 当 $k > 0$, 双曲线的两支分别位于第一、第三象限, 在每一象限内 y 随 x 的增大而减小; 当 $k < 0$, 双曲线的两支分别位于第二、第四象限, 在每一象限内 y 随 x 的增大而增大.

【例题9】 (2021·茶陵县模拟) 如图, 点 $P(3a, a)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 与 $\odot O$ 的一个交点, 图中阴影部分的面积为 10π , 则反比例函数的解析式为 $y = \frac{12}{x}$.



【分析】 根据圆的对称性以及反比例函数的对称性可得, 阴影部分的面积等于圆的面积的 $\frac{1}{4}$, 即可求得圆的半径, 再根据 P 在反比例函数的图象上, 以及在圆上, 即可求得 k 的值.

【解答】 解: 设圆的半径是 r , 根据圆的对称性以及反比例函数的对称性可得:

$$\frac{1}{4}\pi r^2 = 10\pi$$

解得: $r = 2\sqrt{10}$.

$\because$ 点 $P(3a, a)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 与 $\odot O$ 的一个交点.

$$\therefore 3a^2 = k.$$

$$\sqrt{(3a)^2 + a^2} = r$$

$$\therefore a^2 = \frac{1}{10} \times (2\sqrt{10})^2 = 4.$$

$$\therefore k = 3 \times 4 = 12,$$

则反比例函数的解析式是： $y = \frac{12}{x}$.

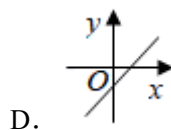
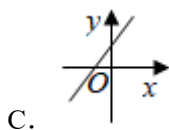
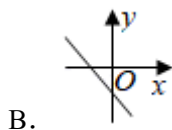
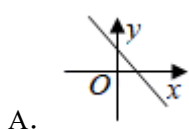
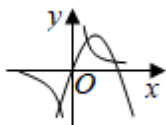
故答案是： $y = \frac{12}{x}$.

【点评】 本题主要考查了反比例函数图象的对称性，正确根据对称性求得圆的半径是解题的关键.

举一反三

【变式1】 (2021 秋·蜀山区校级期中) 已知在同一直角坐标系中二次函数 $y = mx^2 + nx$ 和反比例函数

$y = \frac{a}{x}$ 的图象如图所示, 则一次函数 $y = \frac{a}{m}x - n$ 的图象可能是()



【分析】 根据反比例函数图象和二次函数图象经过的象限, 即可得出 $m < 0$ 、 $n > 0$ 、 $a > 0$, 由此即可得出 $\frac{a}{m} < 0$, $-n < 0$, 即可得出一次函数 $y = \frac{a}{m}x - n$ 的图象经过二三四象限, 再对照四个选项中的图象即可得出结论.

【解答】 解: $\because$ 二次函数开口向下,

$\therefore m < 0$;

$\because$ 二次函数的对称轴在 y 轴右侧, 左同右异,

$\therefore b$ 符号与 a 相异, $n > 0$;

$\because$ 反比例函数图象经过一三象限,

$\therefore a > 0$,

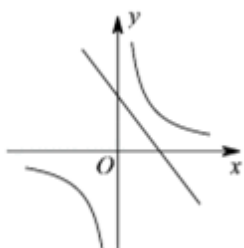
$\therefore \frac{a}{m} < 0$, $-n < 0$,

$\therefore$ 一次函数 $y = \frac{a}{m}x - n$ 的图象经过二三四象限.

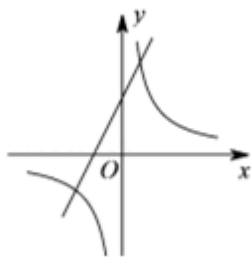
故选: B.

【点评】 本题考查了反比例函数的图象、一次函数的图象以及二次函数的图象, 根据反比例函数图象和二次函数图象经过的象限, 找出 $m < 0$ 、 $n > 0$ 、 $a > 0$ 是解题的关键.

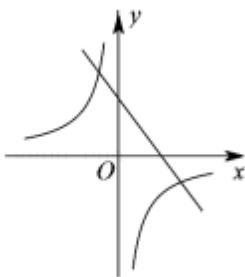
【变式2】 (2021 秋·岳阳县月考) 函数 $y = \frac{k}{x}$ 与 $y = kx + k$ 在同一坐标系的图象大致是图中的()



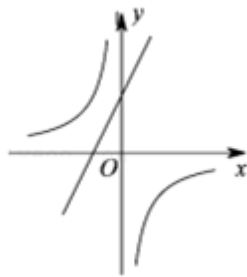
A.



B.



C.



D.

【分析】 因为 k 的符号不确定，所以应根据 k 的符号及一次函数与反比例函数图象的性质解答.

【解答】 解： $\because y = kx + k = k(x+1)$,

$\therefore$ 直线经过点 $(-1, 0)$ ，故 A 、 C 选项错误；

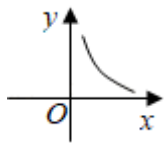
当 $k < 0$ 时，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象在二、四象限，一次函数 $y = kx + k$ 的图象过二、三、四象限，选项 B 、 D 不符合；

当 $k > 0$ 时，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象在一、三象限，一次函数 $y = kx + k$ 的图象过一、二、三象限，选项 B 符合.

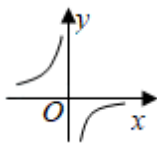
故选： B .

【点评】 本题主要考查了反比例函数和一次函数的图象性质，正确掌握它们的性质才能灵活解题.

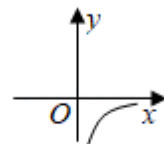
【变式3】 (2021 秋·新化县校级期中) 在下图中，反比例函数 $y = -\frac{5}{x} (x > 0)$ 的图象大致是 ()



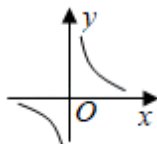
A.



B.



C.



D.

【分析】 根据反比例函数的性质判断即可.

【解答】 解： $\because k = -5 < 0$,

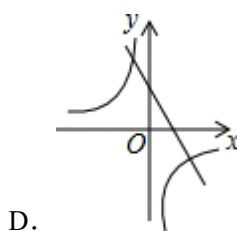
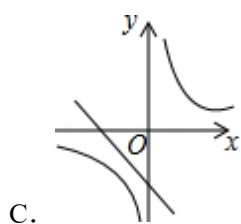
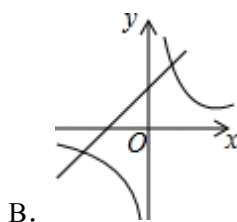
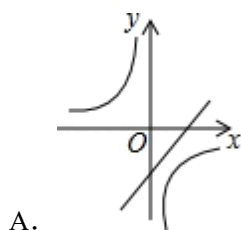
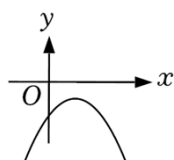
$\therefore$ 反比例函数 $y = -\frac{5}{x} (x > 0)$ 的图象位于第四象限.

故选：C．

【点评】此题需要根据反比例函数的性质解答：反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象是双曲线．当 $k > 0$ 时，它的两个分支分别位于第一、三象限；当 $k < 0$ 时，它的两个分支分别位于第二、四象限．

【变式4】（2021 秋•瑶海区校级期中）已知二次函数 $y = -(x+a)^2 - b$ 的图象如图所示，则反比例函数

$y = \frac{ab}{x}$ 与一次函数 $y = ax + b$ 的图象可能是（ ）



【分析】观察二次函数图象，找出 $a < 0$ ， $b > 0$ ，再结合反比例（一次）函数图象与系数的关系，即可得出结论．

【解答】解：观察二次函数图象，发现：抛物线的顶点坐标在第四象限，开口向下，对称在 y 轴右侧，

$$\therefore -a > 0, -b < 0,$$

$$\therefore a < 0, b > 0.$$

$$\therefore \text{反比例函数 } y = \frac{ab}{x} \text{ 中 } ab < 0,$$

$\therefore$ 反比例函数图象在第二、四象限；

$$\therefore \text{一次函数 } y = ax + b, a < 0, b > 0,$$

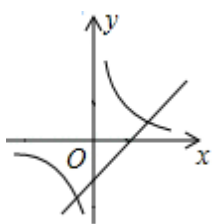
$\therefore$ 一次函数 $y = ax + b$ 的图象过第一、二、四象限．

故选：D．

【点评】本题考查了反比例函数的图象、一次函数的图象以及二次函数的图象，解题的关键是根据二次函数的图象找出 $a < 0$ ， $b > 0$ ．本题属于基础题，难度不大，解决该题型题目时，熟记各函数图象的性质是解

题的关键.

【变式5】 (2021•河北模拟) 直线 $y = ax + b$ 与双曲线 $y = \frac{c}{x}$ 的图象如图所示, 则 $a - b + c$ 的结果()



- A. 大于 0 B. 小于 0 C. 等于 0 D. 无法确定

【分析】 根据一次函数和反比例函数图象和系数的关系即可求得 $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$.

【解答】 解: $\because$ 直线 $y = ax + b$ 经过一、三、四象限,

$$\therefore a > 0, b < 0,$$

$\because$ 双曲线 $y = \frac{c}{x}$ 的图象在一、三象限,

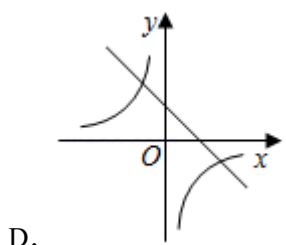
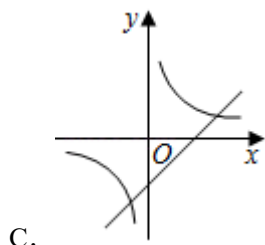
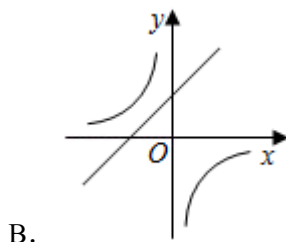
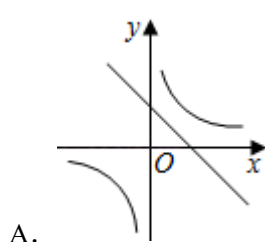
$$\therefore c > 0,$$

$$\therefore a - b + c > 0,$$

故选: A.

【点评】 本题考查了一次函数与反比例函数的图象和性质, 熟练掌握函数的性质是解题的关键.

【变式6】 (2021•湘潭模拟) 在同一平面直角坐标系中, 函数 $y = mx + n$ 与 $y = \frac{mn}{x} (mn \neq 0)$ 的图象可能是 ()



【分析】 根据一次函数的性质和反比例函数的性质, 可以判断各个选项中的图象是否正确.

【解答】 解: 当 $m < 0$, $n > 0$ 时, 函数 $y = mx + n$ 的图象经过第一、二、四象限, $y = \frac{mn}{x} (mn \neq 0)$ 的图象在第二、四象限, 故选项 A 错误、选项 D 正确;

当 $m > 0$, $n > 0$ 时, 函数 $y = mx + n$ 的图象经过第一、二、三象限, $y = \frac{mn}{x} (mn \neq 0)$ 的图象在第一、三象限, 故选项 B 错误;

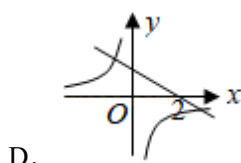
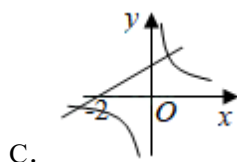
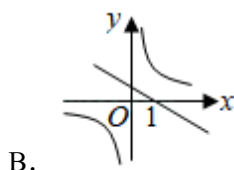
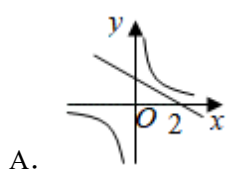
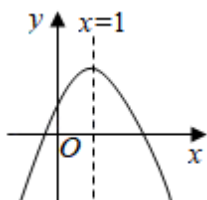
当 $m > 0$, $n < 0$ 时, 函数 $y = mx + n$ 的图象经过第一、三、四象限, $y = \frac{mn}{x} (mn \neq 0)$ 的图象在第二、四象限, 故选项 C 错误;

故选: D .

【点评】 本题考查反比例函数的图象、一次函数的图象, 解答本题的关键是明确题意, 利用数形结合的思想解答.

【变式7】 (2021·宝安区二模) 函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示, 其对称轴为直线 $x = 1$, 则函数

$y = ax + b$ 和 $y = \frac{c}{x}$ 的大致图象是 ()



【分析】 利用抛物线开口方向得到 $a < 0$, 利用抛物线与 y 轴的交点位置得到 $c > 0$, 结合对称轴得出 a , b 之间关系, 然后根据反比例函数的性质和一次函数的性质对各选项进行判断.

【解答】 解: 由二次函数的图象得 $a < 0$, $c > 0$,

所以反比例函数 $y = \frac{c}{x}$ 分布在第一、三象限, 一次函数 $y = ax + b$ 经过第二、四象限,

由二次函数对称轴为: $x = -\frac{b}{2a} = 1$,

则 $2a + b = 0$,

即 $b = -2a$,

则一次函数解析式为: $y = ax - 2a$,

此时图象必经过(2,0)点,故图象经过(2,0)。

故选: A。

【点评】本题考查了一次函数、二次函数、反比例函数图象:反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象为双曲线,当 $k > 0$, 图象分布在第一、三象限;当 $k < 0$, 图象分布在第二、四象限。

【变式8】 (2021秋·栖霞市期中) 已知反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$, 则下列结论正确的是()

- A. 点(1,2)在它的图象上
- B. 其图象分别位于第一、三象限
- C. y 随 x 的增大而减小
- D. 如果点 $P(m,n)$ 在它的图象上, 则点 $Q(n,m)$ 也在它的图象上

【分析】根据反比例函数图象上点的坐标特征、反比例函数的性质解答。

【解答】解: A、将 $x=1$ 代入 $y = -\frac{2}{x}$, 得到 $y = -2 \neq 2$,

$\therefore$ 点(1,2)不在反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 的图象上, 故本选项错误, 不符合题意;

B、因为比例系数为-2, 则函数图象过二、四象限, 故本选项错误, 不符合题意;

C、由于函数图象在二、四象限, 在每个象限, y 随 x 的增大而增大, 故本选项错误, 不符合题意。

D、如果点 $P(m,n)$ 在它的图象上, 则点 $Q(n,m)$ 也在它的图象上, 故本选项正确, 符合题意;

故选: D。

【点评】本题主要考查对反比例函数的性质的理解和掌握, 能熟练地根据反比例函数的性质进行判断是解此题的关键。

【变式9】 (2021·卧龙区二模) 已知反比例函数 $y = \frac{2}{x}$, 在下列结论中, 不正确的是()

- A. 图象必经过点(-1,-2)
- B. 图象在第一、三象限
- C. 若 $x < -1$, 则 $y < -2$
- D. 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 图象上的两点, 且 $x_1 < 0 < x_2$, 则 $y_1 < y_2$

【分析】直接利用反比例函数的性质结合反比例函数的增减性分别分析得出答案。

【解答】解: A. 反比例函数 $y = \frac{2}{x}$, 图象必经过点(-1,-2), 原说法正确, 故此选项不合题意;

B. 反比例函数 $y = \frac{2}{x}$, 图象在第一、三象限, 原说法正确, 故此选项不合题意;

C. 若 $x < -1$, 则 $y > -2$, 原说法错误, 故此选项符合题意;

D . 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 图象上的两点, 且 $x_1 < 0 < x_2$, 则 $y_1 < y_2$, 原说法正确, 故此选项不合题意;
故选: C .

【点评】 此题主要考查了反比例函数的性质, 正确掌握反比例函数的增减性是解题关键.

【变式10】 (2021 秋·灌阳县期中) 对于反比例函数 $y = \frac{2}{x}$, 下列说法正确的是()

- A. 图象经过点 $(2, -1)$ B. 图象位于第二、四象限
C. 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而减小 D. 当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而增大

【分析】 根据反比例函数的性质: 当 $k > 0$, 双曲线的两支分别位于第一、三象限, 在每一象限内 y 随 x 的增大而减小进行分析即可.

【解答】 解: A 、点 $(-2, -1)$ 在它的图象上, 故图象不经过点 $(2, -1)$, 不符合题意;

B 、反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象是双曲线, 双曲线的两支分别位于第一、三象限, 不符合题意;

C 、反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 中的 $k = 2 > 0$, 其在每一象限内 y 随 x 的增大而减小, 符合题意;

D 、反比例函数 $y = \frac{2}{x}$, 中的 $k = 2 > 0$, 其在每一象限内 y 随 x 的增大而减小, 不符合题意;

故选: C .

【点评】 本题考查反比例函数图象与性质, 难度不大. 对于反比例函数 $y = kx (k \neq 0)$, 当 $k > 0$, 反比例函数图象在一、三象限, 每个象限内, y 随 x 的增大而减小; 当 $k < 0$, 反比例函数图象在第二、四象限内, 每个象限内, y 随 x 的增大而增大.

【变式11】 (2021 春·沙坪坝区校级期末) 已知函数 $y = (m-1)x^{m^2-2}$ 是反比例函数, 则 m 的值为 -1 .

【分析】 根据反比例函数的定义, 即 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$, 只需令 $m^2 - 2 = -1$ 且 $m - 1 \neq 0$ 即可.

【解答】 解: 根据题意 $m^2 - 2 = -1$,

$\therefore m = \pm 1$,

又 $m - 1 \neq 0$, $m \neq 1$,

所以 $m = -1$.

故答案为: -1 .

【点评】 本题考查了反比例函数的定义, 重点是将一般式 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 转化为 $y = kx^{-1} (k \neq 0)$ 的形式.

【变式12】 (2021 春·江岸区校级月考) 已知函数 $y = (k^2 + k)x^{k^2-k-1}$ 是反比例函数, 则 k 的值为 1 .

【分析】利用反比例函数定义进行解答即可.

【解答】解：由题意得： $k^2 - k - 1 = -1$ ，且 $k^2 + k \neq 0$ ，

解得： $k = 1$ ，

故答案为：1.

【点评】此题主要考查了反比例函数定义，关键是掌握反比例函数形式为 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数， $k \neq 0$) 或

$y = kx^{-1}$ (k 为常数， $k \neq 0$) .

【变式13】 (2021•饶平县校级模拟) 若函数 $y = mx^{m^2+3m-1}$ 是反比例函数，则 $m = \underline{-3}$.

【分析】直接利用反比例函数的定义分析得出即可.

【解答】解： $\because$ 函数 $y = mx^{m^2+3m-1}$ 是反比例函数，

$\therefore m^2 + 3m - 1 = -1$ ， $m \neq 0$ ，

解得： $m = -3$.

故答案为：-3 .

【点评】此题主要考查了反比例函数的定义，正确把握定义是解题关键.

知识点精析

考点 2: 确定函数解析式

待定系数法: 只需要知道双曲线上任意一点坐标, 设函数解析式, 代入求出反比例函数系数 k 即可.



实战经典

1. (2020·上海) 已知反比例函数的图象经过点 $(2, -4)$, 那么这个反比例函数的解析式是()

A. $y = \frac{2}{x}$

B. $y = -\frac{2}{x}$

C. $y = \frac{8}{x}$

D. $y = -\frac{8}{x}$

【分析】已知函数图象上一点的坐标求反比例函数解析式, 可先设出解析式 $y = \frac{k}{x}$, 再将点的坐标代入求出待定系数 k 的值, 从而得出答案.

【解答】解: 设反比例函数解析式为 $y = \frac{k}{x}$,

将 $(2, -4)$ 代入, 得: $-4 = \frac{k}{2}$,

解得 $k = -8$,

所以这个反比例函数解析式为 $y = -\frac{8}{x}$,

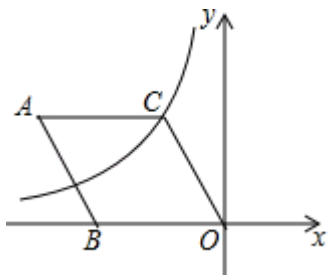
故选: D.

【点评】本题主要考查待定系数法求反比例函数解析式, 用待定系数法求反比例函数的解析式要注意:

- (1) 设出含有待定系数的反比例函数解析式 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$);
- (2) 把已知条件 (自变量与函数的对应值) 代入解析式, 得到待定系数的方程;
- (3) 解方程, 求出待定系数;
- (4) 写出解析式.

2. (2020·黔西南州) 如图, 在菱形 $ABOC$ 中, $AB = 2$, $\angle A = 60^\circ$, 菱形的一个顶点 C 在反比例函数

$y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象上, 则反比例函数的解析式为()



A. $y = -\frac{3\sqrt{3}}{x}$

B. $y = -\frac{\sqrt{3}}{x}$

C. $y = -\frac{3}{x}$

D. $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$

【分析】根据菱形的性质和平面直角坐标系的特点可以求得点 C 的坐标，从而可以求得 k 的值，进而求得反比例函数的解析式.

【解答】解：∵ 在菱形 $ABOC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ，菱形边长为 2，

∴ $OC = 2$ ， $\angle COB = 60^\circ$ ，

过 C 作 $CE \perp OB$ 于 E ，

则 $\angle OCE = 30^\circ$ ，

∴ $OE = \frac{1}{2}OC = 1$ ， $CE = \sqrt{3}$ ，

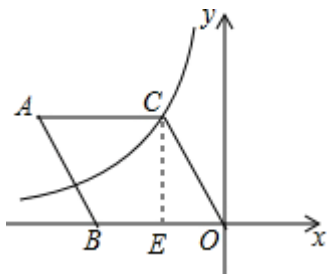
∴ 点 C 的坐标为 $(-1, \sqrt{3})$ ，

∵ 顶点 C 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上，

∴ $\sqrt{3} = \frac{k}{-1}$ ，得 $k = -\sqrt{3}$ ，

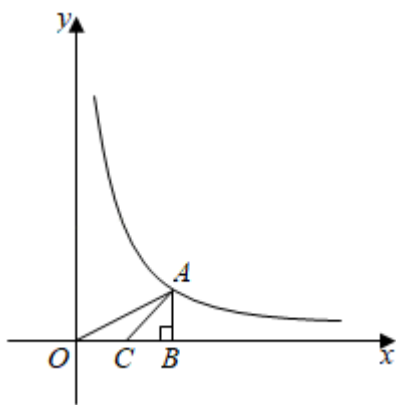
即 $y = -\frac{\sqrt{3}}{x}$ ，

故选：B.



【点评】本题考查待定系数法求反比例函数解析式、菱形的性质，解答本题的关键是明确题意，求出点 C 的坐标.

3. (2021•兰州) 如图，点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象上， $AB \perp x$ 轴于点 B ， C 是 OB 的中点，连接 AO ， AC ，若 $\triangle AOC$ 的面积为 4，则 $k =$ ()



A. 16

B. 12

C. 8

D. 4

【分析】由 C 是 OB 的中点求 $\triangle AOB$ 的面积，设 $A(a, b)$ 根据面积公式求 ab ，最后求 k 。

【解答】解：∵ C 是 OB 的中点， $\triangle AOC$ 的面积为 4，

∴ $\triangle AOB$ 的面积为 8，

设 $A(a, b)$

∵ $AB \perp x$ 轴于点 B ，

∴ $ab = 16$ ，

∵ 点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象上，

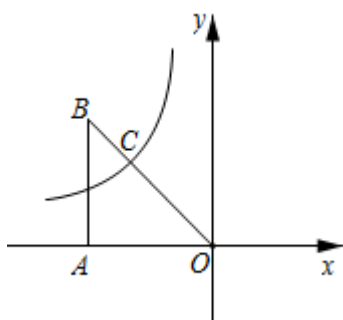
∴ $k = 16$ 。

故选：A。

【点评】本题考查了比例系数 k 的几何意义、反比例函数图象上点的坐标特征，掌握用面积法求 k 是解题关键。

4. (2021·西藏) 如图，在平面直角坐标系中， $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{27}{8}$ ， BA 垂直 x 轴于点 A ， OB 与双曲线

$y = \frac{k}{x}$ 相交于点 C ，且 $BC:OC = 1:2$ 。则 k 的值为()



A. -3

B. $-\frac{9}{4}$

C. 3

D. $\frac{9}{2}$

【分析】过 C 作 $CD \perp x$ 轴于 D ，可得 $\triangle DOC \sim \triangle AOB$ ，根据相似三角形的性质求出 $S_{\triangle DOC}$ ，由反比例函数系

数 k 的几何意义即可求得 k .

【解答】解：过 C 作 $CD \perp x$ 轴于 D ,

$$\therefore \frac{BC}{OC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{OC}{OB} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore BA \perp x \text{ 轴},$$

$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle DOC \sim \triangle AOB,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle DOC}}{S_{\triangle AOB}} = \left(\frac{OC}{OB}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

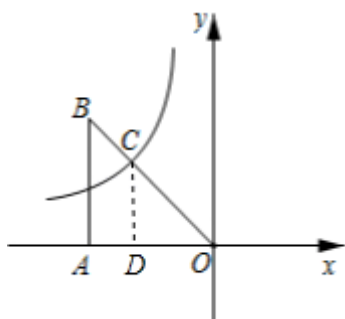
$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{27}{8},$$

$$\therefore S_{\triangle DOC} = \frac{4}{9} S_{\triangle AOB} = \frac{4}{9} \times \frac{27}{8} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{双曲线 } y = \frac{k}{x} \text{ 在第二象限},$$

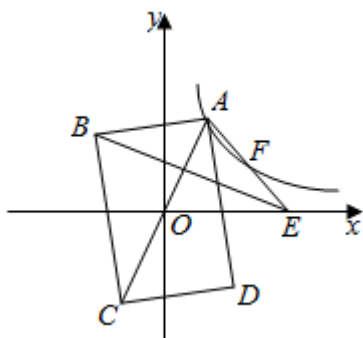
$$\therefore k = -2 \times \frac{3}{2} = -3,$$

故选： A .



【点评】本题主要考查了反比例函数系数 k 的几何意义，相似三角形的性质和判定，根据相似三角形的性质和判定求出 $S_{\triangle DOC}$ 是解决问题的关键.

5. （2021•罗湖区）如图，在平面直角坐标系中，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 的中点与坐标原点重合，点 E 是 x 轴上一点，连接 AE . 若 AD 平分 $\angle OAE$, 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$ 的图象经过 AE 上的两点 A , F , 且 $AF = EF$, $\triangle ABE$ 的面积为 18, 则 k 的值为()



A. 6

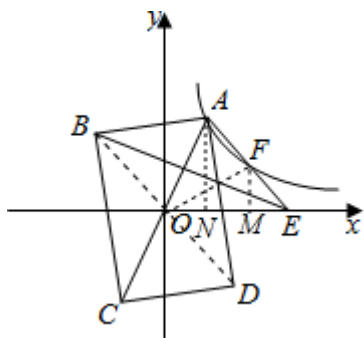
B. 12

C. 18

D. 24

【分析】如图，连接 BD ， OF ，过点 A 作 $AN \perp OE$ 于 N ，过点 F 作 $FM \perp OE$ 于 M ．证明 $BD \parallel AE$ ，推出 $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle AOE} = 18$ ，推出 $S_{\triangle EOF} = \frac{1}{2}S_{\triangle AOE} = 9$ ，可得 $S_{\triangle FME} = \frac{1}{3}S_{\triangle EOF} = 3$ ，由此即可解决问题．

【解答】解：如图，连接 BD ， OF ，过点 A 作 $AN \perp OE$ 于 N ，过点 F 作 $FM \perp OE$ 于 M ．



$$\because AN \parallel FM, \quad AF = FE,$$

$$\therefore MN = ME,$$

$$\therefore FM = \frac{1}{2}AN,$$

$\because A, F$ 在反比例函数的图象上,

$$\therefore S_{\triangle AON} = S_{\triangle FOM} = \frac{k}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot ON \cdot AN = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot FM,$$

$$\therefore ON = \frac{1}{2}OM,$$

$$\therefore ON = MN = EM,$$

$$\therefore ME = \frac{1}{3}OE,$$

$$\therefore S_{\triangle FME} = \frac{1}{3}S_{\triangle FOE},$$

$\therefore AD$ 平分 $\angle OAE$,

$$\therefore \angle OAD = \angle EAD,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore OA = OD,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA = \angle DAE,$$

$$\therefore AE \parallel BD,$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle AOE},$$

$$\therefore S_{\triangle AOE} = 18,$$

$$\therefore AF = EF,$$

$$\therefore S_{\triangle EOF} = \frac{1}{2} S_{\triangle AOE} = 9,$$

$$\therefore S_{\triangle FME} = \frac{1}{3} S_{\triangle EOF} = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle FOM} = S_{\triangle FOE} - S_{\triangle FME} = 9 - 3 = 6 = \frac{k}{2},$$

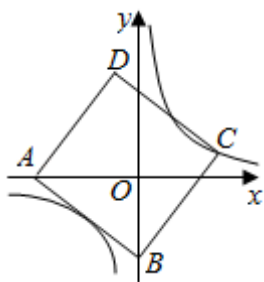
$$\therefore k = 12.$$

故选: B .

【点评】 本题考查反比例函数的性质, 矩形的性质, 平行线的判断和性质, 等高模型等知识, 解题的关键是证明 $BD \parallel AE$, 利用等高模型解决问题, 属于中考选择题中的压轴题.

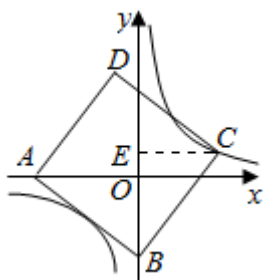
6. (2020•黔南州) 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 10, 点 A 的坐标为 $(-8, 0)$, 点 B 在 y 轴上, 若反比例函数

数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象过点 C , 则该反比例函数的解析式为 $y = \frac{12}{x}$.



【分析】 过点 C 作 $CE \perp y$ 轴于 E , 由 “ AAS ” 可证 $\triangle ABO \cong \triangle BCE$, 可得 $CE = OB = 6$, $BE = AO = 8$, 可求点 C 坐标, 即可求解.

【解答】 解: 如图, 过点 C 作 $CE \perp y$ 轴于 E ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = BC = 10, \quad \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore OB = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{100 - 64} = 6,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABO + \angle CBE = 90^\circ, \quad \angle ABO + \angle BAO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAO = \angle CBE,$$

$$\text{又} \because \angle AOB = \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle BCE (AAS),$$

$$\therefore CE = OB = 6, \quad BE = AO = 8,$$

$$\therefore OE = 2,$$

$$\therefore \text{点 } C(6, 2),$$

$$\because \text{反比例函数 } y = \frac{k}{x} (k \neq 0) \text{ 的图象过点 } C,$$

$$\therefore k = 6 \times 2 = 12,$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = \frac{12}{x},$$

$$\text{故答案为: } y = \frac{12}{x}.$$

【点评】 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征, 正方形的性质, 利用待定系数法求解析式, 求出点 C 坐标是本题的关键.



典例精析

【例题1】 (2021 秋·永定区期中) 一个反比例函数图象过点 $A(2,3)$ ，则这个反比例函数的解析式是

$$y = \frac{6}{x}.$$

【分析】 设出反比例函数解析式，然后把点的坐标代入求出 k 值，即可得到解析式.

【解答】 解：设该反比例函数为 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ ，则 $k = xy$.

$\therefore$ 该反比例函数的图象经过点 $A(2,3)$ ，

$$\therefore k = 2 \times 3 = 6,$$

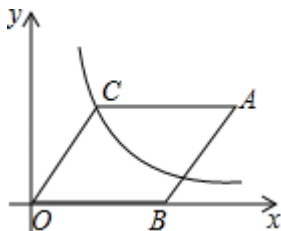
$\therefore$ 该反比例函数的解析式为： $y = \frac{6}{x}$.

故答案为： $y = \frac{6}{x}$.

【点评】 本题考查了待定系数法求反比例函数解析式，灵活运用待定系数法是解题的关键，本题把点的坐标代入函数表达式进行计算即可求解.

【例题2】 (2021 秋·雁塔区期中) 如图，菱形 $OBAC$ 的边 OB 在 x 轴上，点 $A(8,4)$ ， $\tan \angle COB = \frac{4}{3}$ ，若

反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象经过点 C ，则反比例函数解析式为 $y = \frac{12}{x}$.



【分析】 根据菱形的性质和点 A 的坐标可求出 CM ，再由锐角三角函数可求出 OM ，进而确定点 C 的坐标，再将点 C 的坐标代入函数关系式即可.

【解答】 解： $\because$ 四边形 $OABC$ 是菱形， $A(8,4)$ ，

$$\therefore CM = 4,$$

$$\text{又} \because \tan \angle COB = \frac{4}{3},$$

$$\therefore OM = 3,$$

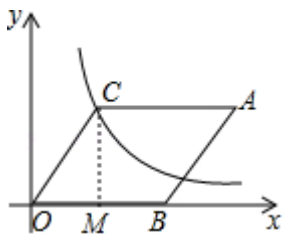
$$\therefore \text{点 } C(3,4),$$

$\therefore$ 点 $C(3,4)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上，

$$\therefore k = 3 \times 4 = 12,$$

$$\therefore \text{反比例函数关系式为 } y = \frac{12}{x},$$

$$\text{故答案为: } y = \frac{12}{x}.$$

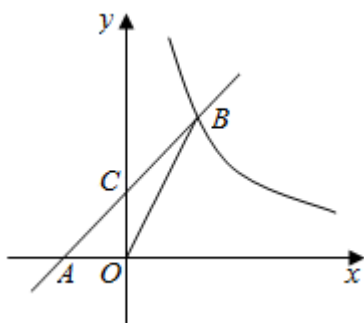


【点评】 本题考查菱形的性质，锐角三角函数的定义以及反比例函数图象上点值坐标的特征是解决问题的关键.

【例题3】 (2021·路北区二模) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 AB 与 x 轴交于点 $A(-2,0)$ ，与反比例函数在第一象限内的图象的交于点 $B(2,n)$ ，连接 BO ，若 $S_{\triangle AOB} = 4$.

(1) 反比例函数的解析式为 $y = \frac{8}{x}$;

(2) 若直线 AB 与 y 轴的交点为 C ，则 $\triangle OCB$ 的面积为 ____.



【分析】 (1) 先根据三角形面积公式求出 n 得到 $B(2,4)$ ，然后利用待定系数法求反比例函数解析式；

(2) 先利用待定系数法求出直线 AB 的解析式，再确定 C 点坐标，然后利用三角形面积公式求解.

【解答】 解：(1) $\because S_{\triangle AOB} = 4$,

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2 \times n = 4, \text{ 解得 } n = 4,$$

$$\therefore B(2,4),$$

$$\text{设反比例函数解析式为 } y = \frac{k}{x},$$

$$\text{把 } B(2,4) \text{ 代入得 } k = 2 \times 4 = 8,$$

$$\therefore \text{反比例函数解析式为 } y = \frac{8}{x};$$

(2) 设直线 AB 的解析式为 $y = ax + b$,

把 $A(-2,0)$ ， $B(2,4)$ 代入得 $\begin{cases} -2a+b=0 \\ 2a+b=4 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y=x+2$ ，

当 $x=0$ 时， $y=x+2=2$ ，则 $C(0,2)$ ，

$$\therefore S_{\triangle OCB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2.$$

故答案为：(1) $y = \frac{8}{x}$ ，(2) 2.

【点评】 本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题：求反比例函数与一次函数的交点坐标，把两个函数关系式联立成方程组求解，若方程组有解则两者有交点，方程组无解，则两者无交点．也考查了待定系数法求反比例函数和一次函数解析式．



【变式1】 (2021 春·长春期末) 已知反比例函数的图象经过点 (2,4), 那么这个反比例函数的表达式是

$$y = \frac{8}{x} \text{ —.}$$

【分析】 将此点坐标代入函数解析式 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 即可求得 k 的值.

【解答】 解: 设反比例函数的解析式为 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$,

$\therefore$ 函数的图象经过点 (2,4),

$$\therefore 4 = \frac{k}{2}, \text{ 得 } k = 8,$$

$$\therefore \text{反比例函数解析式为 } y = \frac{8}{x}.$$

故答案为: $y = \frac{8}{x}$.

【点评】 本题考查了用待定系数法求反比例函数的解析式, 用待定系数法求解析式是中学阶段的重点.

【变式2】 (2021·广东模拟) 已知平行四边形 $ABCD$ 中, $A(-9,0)$ 、 $B(-3,0)$, $C(0,4)$, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$

是经过线段 CD 的中点, 则反比例函数解析式为 $y = -\frac{12}{x}$ —.

【分析】 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 所以 CD 的中点为 $(-3,4)$, 由中点坐标可求反比例函数的解析式.

【解答】 解: 如图:

$$\therefore A(-9,0)、B(-3,0)、C(0,4),$$

$$\therefore AB = 6, BC = 5,$$

$$\therefore \text{反比例函数为 } y = \frac{k}{x},$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB = CD, AB \parallel CD,$$

$$\therefore D(-6,4),$$

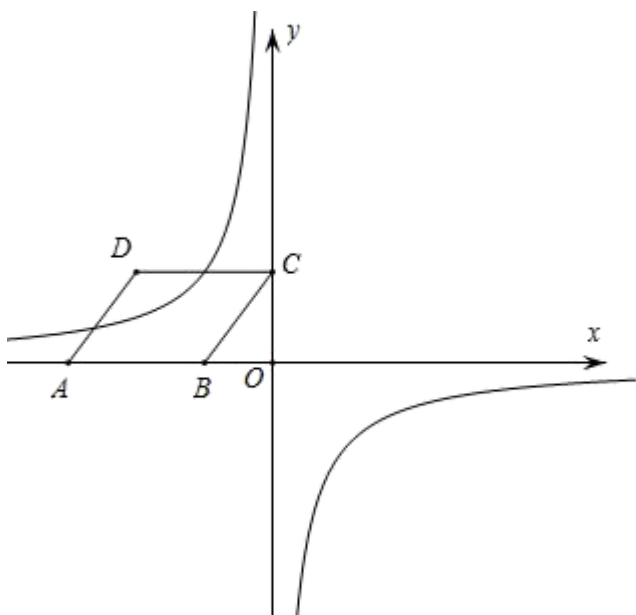
$$\therefore CD \text{ 的中点为 } (-3,4),$$

$$\therefore k = -12,$$

$$\therefore y = -\frac{12}{x};$$

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y = -\frac{12}{x}$;

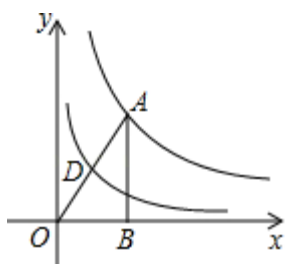
故答案为 $y = -\frac{12}{x}$.



【点评】 本题考查了待定系数法求反比例函数的解析式与平行四边形的性质；熟练掌握平行四边形的性质，会用待定系数法求反比例函数解析式是解题的关键.

【变式3】 (2021•泗洪县三模) 如图，反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 的图象经过 $\text{Rt}\triangle OAB$ 的顶点 A ， D 为斜边 OA 的

中点，则过点 D 的反比例函数图象的函数表达式为 $y = \frac{2}{x}$.



【分析】 设 $A(t, \frac{8}{t})$ ，利用线段的中点坐标公式得到 D 点坐标为 $(\frac{1}{2}t, \frac{4}{t})$ ，然后利用待定系数法求过点 D 的反比例函数解析式.

【解答】 解：设 $A(t, \frac{8}{t})$,

$\therefore D$ 为斜边 OA 的中点， $\therefore D$ 点坐标为 $(\frac{1}{2}t, \frac{4}{t})$ ，设过点 D 的反比例函数图象的函数表达式为 $y = \frac{k}{x}$,

把 $D(\frac{1}{2}t, \frac{4}{t})$ 代入得 $k = \frac{1}{2}t \cdot \frac{4}{t} = 2$ ， $\therefore$ 过点 D 的反比例函数图象的函数表达式为 $y = \frac{2}{x}$. 故答案为 $y = \frac{2}{x}$.

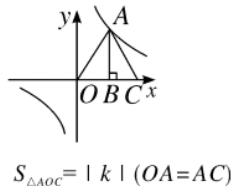
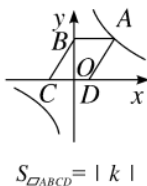
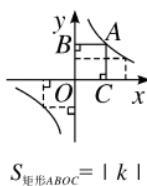
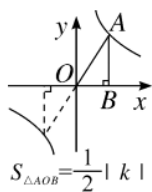
【点评】 本题考查了待定系数法求反比例函数的解析式：设出含有待定系数的反比例函数解析式 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数， $k \neq 0$)，然后把一个已知点的坐标代入求出 k 得到反比例函数解析式。

知识点精析

考点 3：反比例函数与几何综合

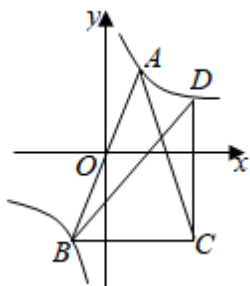
(1) 意义：从反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 图象上任意一点向 x 轴和 y 轴作垂线，垂线与坐标轴所围成的矩形面积为 $|k|$ ，以该点、一个垂足和原点为顶点的三角形的面积为 $\frac{1}{2}|k|$ 。

(2) 常见的面积类型：



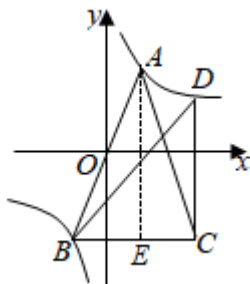
实战经典

1. (2021·玉林) 如图， $\triangle ABC$ 是等腰三角形， AB 过原点 O ，底边 $BC \parallel x$ 轴，双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 过 A ， B 两点，过点 C 作 $CD \parallel y$ 轴交双曲线于点 D ，若 $S_{\triangle ABC} = 8$ ，则 k 的值是 3。



【分析】 过点 A 作 $AE \parallel y$ 轴，交 BC 与点 E ，设点 $A(a, \frac{k}{a})$ 则 $B(-a, -\frac{k}{a})$ ，可表示出 BC 和 DC 的长度，又

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD = 8$ ，即可求出 k 的值。



【解答】

解：过点 A 作 $AE \parallel y$ 轴，交 BC 与点 E ，设点 $A(a, \frac{k}{a})$ 则 $B(-a, -\frac{k}{a})$ ，

$$\therefore BE = 2a,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形，底边 $BC \parallel x$ 轴， $CD \parallel y$ 轴，

$$\therefore BC = 4a,$$

$\therefore$ 点 D 的横坐标为 $3a$ ，

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的纵坐标为 } \frac{k}{3a},$$

$$\therefore CD = \frac{k}{3a} + \frac{k}{a} = \frac{4k}{3a},$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD = 8,$$

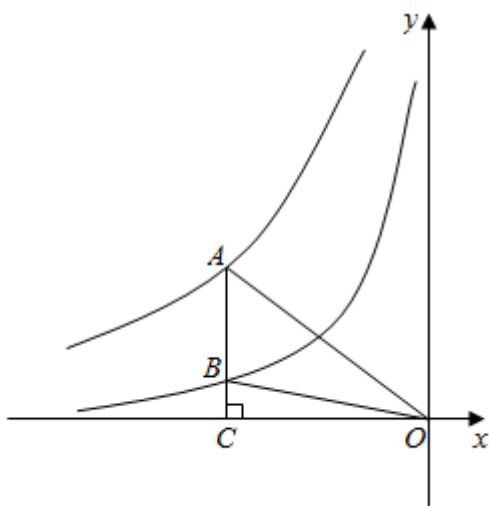
$$\therefore \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot \frac{4k}{3a} = 8,$$

$$\therefore k = 3,$$

故答案为 3.

【点评】 本题考查了等腰三角形的性质，反比例函数图象上点的坐标特点，能够利用 k 表示出 BC 和 CD 的长度是解决本题的关键.

2. (2021·齐齐哈尔) 如图，点 A 是反比例函数 $y = \frac{k_1}{x} (x < 0)$ 图象上一点， $AC \perp x$ 轴于点 C 且与反比例函数 $y = \frac{k_2}{x} (x < 0)$ 的图象交于点 B ， $AB = 3BC$ ，连接 OA ， OB 。若 $\triangle OAB$ 的面积为 6，则 $k_1 + k_2 = \underline{\quad -20 \quad}$ 。



【分析】 由 $\triangle OAB$ 的面积为 6，可求出 $\triangle OBC$ 的面积为 2，进而求出 $\triangle OAC$ 的面积为 8，再根据反比例函数系数 k 的几何意义可求出 k_1 ， k_2 ，进而得出答案.

【解答】 解： $\because S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OC = 6$ ， $S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot OC$ ， $AB = 3BC$ ，

$$\therefore S_{\triangle BOC} = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle AOC} = 2 + 6 = 8,$$

$$\text{又} \because \frac{1}{2}|k_1| = 8, \quad \frac{1}{2}|k_2| = 2, \quad k_1 < 0, \quad k_2 < 0,$$

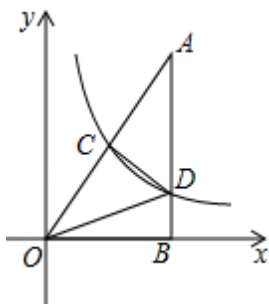
$$\therefore k_1 = -16, \quad k_2 = -4,$$

$$\therefore k_1 + k_2 = -16 - 4 = -20,$$

故答案为: -20 .

【点评】 本题考查反比例函数系数 k 的几何意义, 掌握反比例函数系数 k 的几何意义是正确解答的关键.

3. (2021·罗湖区) 如图, $\text{Rt}\triangle AOB$ 的一条直角边 OB 在 x 轴上, 双曲线 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 经过斜边 OA 的中点 C , 与另一直角边交于点 D . 若 $S_{\triangle OCD} = 9$, 则 $S_{\triangle OBD}$ 的值为 6.



【分析】 过双曲线上任意一点与原点所连的线段、坐标轴、向坐标轴作垂线所围成的直角三角形面积 S 是个定值, 即 $S = \frac{1}{2}|k|$.

【解答】 解: 如图, 过 C 点作 $CE \perp x$ 轴, 垂足为 E .

$$\because \text{Rt}\triangle OAB \text{ 中, } \angle OBA = 90^\circ,$$

$$\therefore CE \parallel AB,$$

$$\because C \text{ 为 } \text{Rt}\triangle OAB \text{ 斜边 } OA \text{ 的中点 } C,$$

$$\therefore CE \text{ 为 } \text{Rt}\triangle OAB \text{ 的中位线},$$

$$\therefore \triangle OEC \sim \triangle OBA,$$

$$\therefore \frac{OC}{OA} = \frac{1}{2}.$$

$$\because \text{双曲线的解析式是 } y = \frac{k}{x}, \text{ 即 } xy = k$$

$$\therefore S_{\triangle BOD} = S_{\triangle COE} = \frac{1}{2}|k|,$$

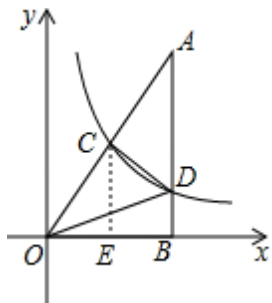
$$\therefore S_{\triangle AOB} = 4S_{\triangle COE} = 2|k|,$$

$$\text{由 } S_{\triangle AOB} - S_{\triangle BOD} = S_{\triangle AOD} = 2S_{\triangle DOC} = 18, \text{ 得 } 2k - \frac{1}{2}k = 18,$$

$$k=12,$$

$$S_{\triangle BOD} = S_{\triangle COE} = \frac{1}{2}k = 6,$$

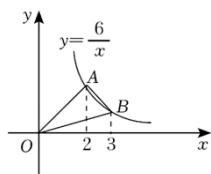
故答案为：6.



【点评】 本题考查了反比例函数 k 的几何意义，过图象上的任意一点作 x 轴、 y 轴的垂线，所得三角形的面积是 $\frac{1}{2}|k|$ ，是经常考查的知识点，也体现了数形结合的思想.

典例精析

【例题1】 (2021秋·招远市期中) 如图, A, B 是反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 在第一象限内的图象上的两点, 且 A, B 两点的横坐标分别是 2 和 3, 则 $\triangle OAB$ 的面积是()



- A. 4.5 B. 3.5 C. 2.5 D. 1.5

【分析】 过 A, B 两点分别作 $AC \perp x$ 轴于 $C, BD \perp x$ 轴于 D , 由反比例函数解析式求得 A, B 的坐标, 根据反比例函数系数 k 的几何意义得出 $S_{\triangle AOC} = S_{\triangle BOD} = 3$, 由 $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} + S_{\text{梯形}ABDC} - S_{\triangle BOD} = S_{\text{梯形}ABDC}$ 即可求得.

【解答】 解: $\because A, B$ 是反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 在第一象限内的图象上的两点, 且 A, B 两点的横坐标分别是 2 和 3,

$\therefore$ 当 $x=2$ 时, $y=3$, 即 $A(2,3)$,

当 $x=3$ 时, $y=2$, 即 $B(3,2)$.

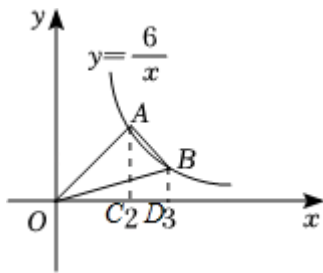
如图, 过 A, B 两点分别作 $AC \perp x$ 轴于 $C, BD \perp x$ 轴于 D , 则 $S_{\triangle AOC} = S_{\triangle BOD} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$.

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} + S_{\text{梯形}ABDC} - S_{\triangle BOD} = S_{\text{梯形}ABDC},$$

$$\therefore S_{\text{梯形}ABDC} = \frac{1}{2}(BD + AC) \cdot CD = \frac{1}{2}(2 + 3) \times 1 = \frac{5}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = 2.5.$$

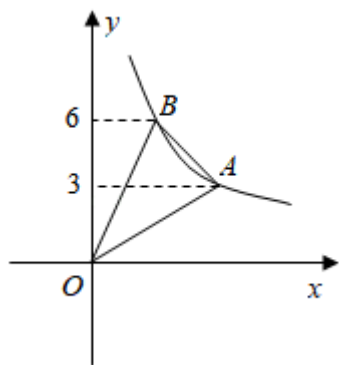
故选: C.



【点评】 本题考查了反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 中 k 的几何意义, 即图象上的点与原点所连的线段、坐标轴、向坐标

轴作垂线所围成的直角三角形面积 S 的关系即 $S = \frac{1}{2}|k|$.

【例题2】 (2021·费县模拟) 如图, 点 A 、 B 在反比例函数 $y = \frac{12}{x}$ 的图象上, A 、 B 的纵坐标分别是 3 和 6, 连接 OA 、 OB , 则 $\triangle OAB$ 的面积是()



- A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

【分析】 根据图象上点的坐标特征求得 A 、 B 的坐标, 将三角形 AOB 的面积转化为梯形 $ABED$ 的面积, 根据坐标可求出梯形的面积即可,

【解答】 解: $\because$ 点 A 、 B 在反比例函数 $y = \frac{12}{x}$ 的图象上, A 、 B 的纵坐标分别是 3 和 6,

$$\therefore A(4, 3), B(2, 6),$$

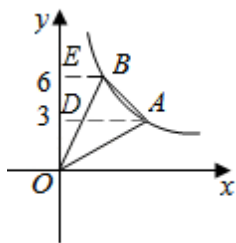
作 $AD \perp y$ 轴于 D , $BE \perp y$ 轴于 E ,

$$\therefore S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOE} = \frac{1}{2} \times 12 = 6,$$

$$\therefore S_{\triangle OAB} = S_{\triangle AOD} + S_{\text{梯形}ABED} - S_{\triangle BOE} = S_{\text{梯形}ABED},$$

$$\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}(4+2) \times (6-3) = 9,$$

故选: A.



【点评】 此题考查了反比例函数系数 k 的几何意义, 关键是掌握 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 图象中任取一点, 过这一个点向 x 轴和 y 轴分别作垂线, 与坐标轴围成的矩形的面积是定值 $|k|$.

【例题3】 如图, A 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象上一点, 过点 A 作 x 轴的平行线交反比例函数 $y = -\frac{3}{x}$ 的图

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/776041125121010114>