第4章根轨迹法

控制系统的稳定性，由其闭环极点唯一确定，系统暂态响应和稳态响应的基本特性与系统的闭环零、极点在S平面上分布的位置有关。

决定系统基本特性的是系统特征方程的根，如果搞清楚这些根在S平面上的分布与系统参数之间的关系，那就掌握了系统的基本特性。

为此目的，W．R．伊文思在１９４８年提出了根轨迹法，令开环函数的一个参数——开环增益K（或另一个感兴趣的参数）从0变化到∞，与此对应，特征方程的根，便在S平面上描出一条轨迹，称这条轨迹为根轨迹。

根轨迹法是研究自动控制系统的一种有效方法，它已发展成为经典控制理论中最基本的方法之一。

- **内容提要**

  根轨迹法是一种图解法，是分析控制系统的基本方法之一，特点是简单、直观。本章研究了根轨迹的基本条件、常规根轨迹的绘制法则、广义根轨迹的绘制，以及利用根轨迹分析系统的性能。

- **知识要点**

  传递函数的零极点表示，系统的性能与零极点的关系，根轨迹方程，轨迹的基本条件及法则。

- **教学重点**

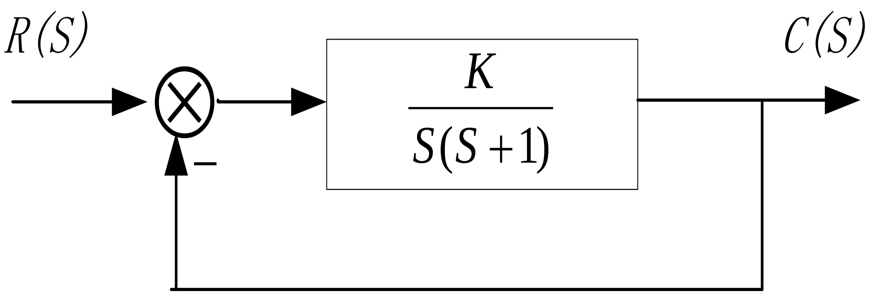
  熟练掌握根轨迹方程、根轨迹的幅值条件与相角条件，根据系统开环零、极点分布，熟练绘制根轨迹，根据根轨迹分析系统的性能

4．1 闭环系统的根轨迹

4．1．1 根轨迹的定义

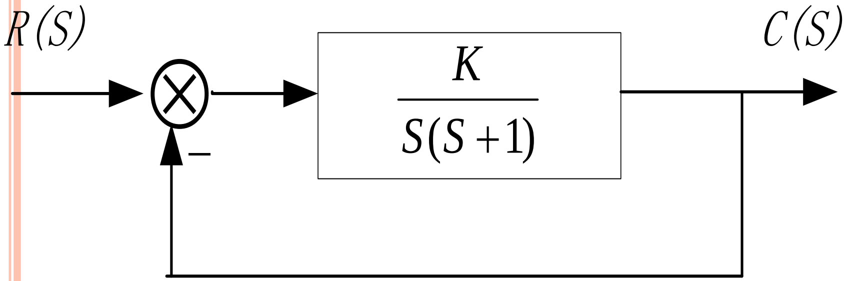
举例说明

$$\phi(S)=\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{K}{S^2+S+K}$$



特征方程 $S^2+S+K=0$ 的根为

$$S_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4K}\ ,\qquad S_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-4K}$$



当K=0时，S_1=0，S_2=−1

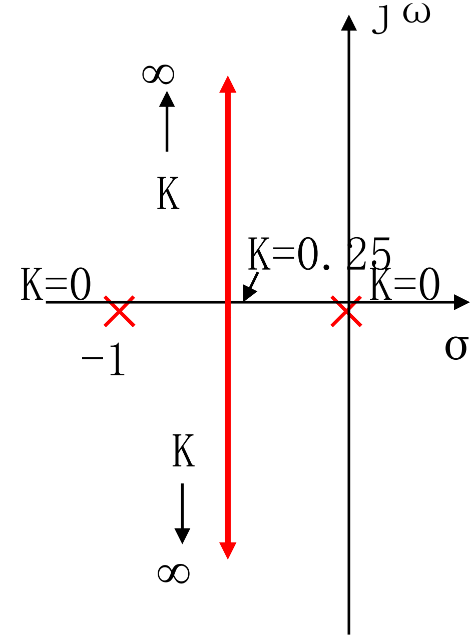
$$S_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4K}$$

$$S_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4K}$$

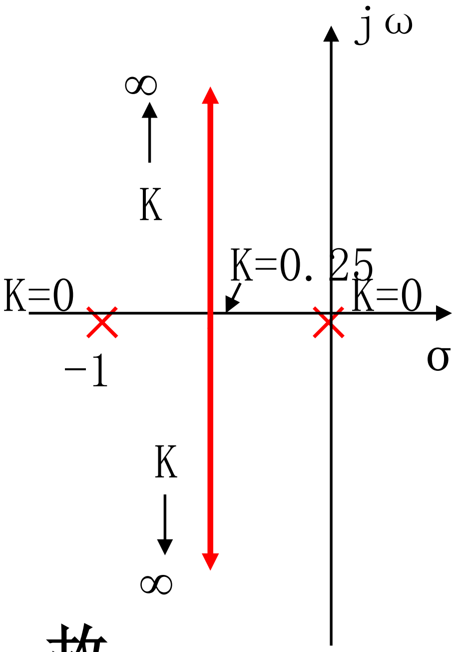
K	0	1/4	1/2	3/4	…	
特征根	S1=0 S2=-1	S1=-1/2 S2=-1/2	S1=-1/2+j/2 S2=-1/2-j/2	S1=-1/2+…j S2=-1/2-…j		

当K=0时，$S_1=0$，$S_2=-1$

令开环增益K从0变化到∞，用解析方法求不同K所对应的特征根的值，将这些值标在S平面上，并连成光滑的粗实线，这就是该系统的根轨迹。箭头表示随着K值的增加，根轨迹的变化趋势。



K	0	1/4	1/2	3/4	…	
特征根	S1=0 S2=-1	S1=-1/2 S2=-1/2	S1=-1/2+j/2 S2=-1/2-j/2	S1=-1/2+…j S2=-1/2-…j		



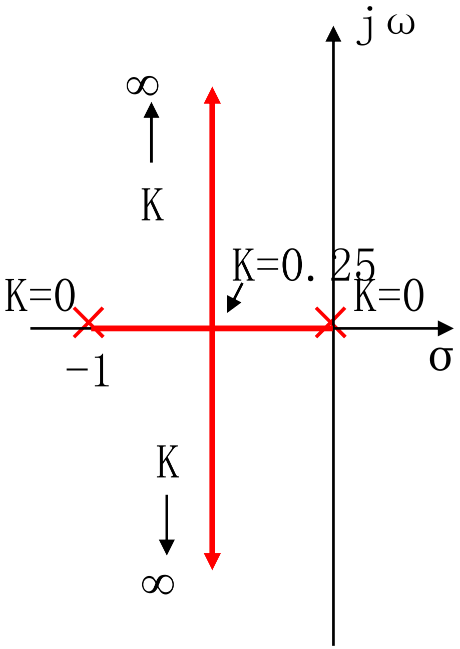
从系统的根轨迹图，可以获得下述信息:

1.稳定性: 因为根轨迹全部位于左半S平面，故闭环系统对所有的K值都是稳定的。

2.稳态性能: 因为开环传函有一个位于坐标原点的极点，所以是I型系统，阶跃作用下的稳态误差为**0**。

3．暂态性能

（１）　当０＜K＜ ０.25时，闭环特征根为实根，系统是过阻尼状态，阶跃响应为非周期过程。



（２）　当K＝０.25时，两特征根重合，均为－0.5，系统处于临界阻尼状态。

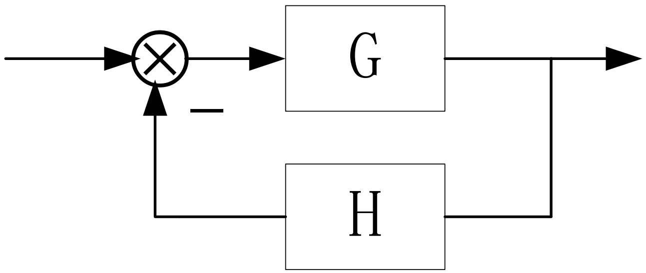
（３）　当K＞０.25时，两特征根变为共轭复根，系统处于欠阻尼状态，阶跃响应为衰减振荡过程。

需要指出的是，绘制根轨迹时选择的可变参数可以是系统的任何参量，但实际中最常用的是系统的开环增益。

以系统的开环增益K为可变参数绘制的根轨迹——常规根轨迹

4．1．2 根轨迹方程

图示系统的特征方程



$$1+G(S)H(S)=0$$

$G(S)H(S)$ ——开环传函

绘制根轨迹是求解特征方程的根，特征方程可改写为

$$G(S)H(S)=-1$$

$G(S)H(S)$ 是复变量 S 的函数，根据上式两边的幅值和相角分别相等的条件，可以得到

$$\left|G(S)H(S)\right| = 1$$

$$\angle G(S)H(S) = \pm 180°(2q+1), \qquad q = 0,1,2,\cdots$$

这就是满足特征方程的幅值条件和相角条件，是绘制系统根轨迹的重要依据。

现进一步将绘制根轨迹的幅值条件和相角条件转换成实用的形式。

将开环传递函数写成下列标准的因子式

$$G(S)H(S)=\frac{K^{*}\prod_{j=1}^{m}(s-z_{j})}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_{i})}$$

注意这个形式和求稳态误差的式子不同，需变换成这种形式.

z_j—开环零点. —开环极点. p_i

此时，幅值条件和相角条件可写成

$$\frac{K^{*}\prod_{j=1}^{m}\left|s-z_{j}\right|}{\prod_{i=1}^{n}\left|s-p_{i}\right|}=1$$

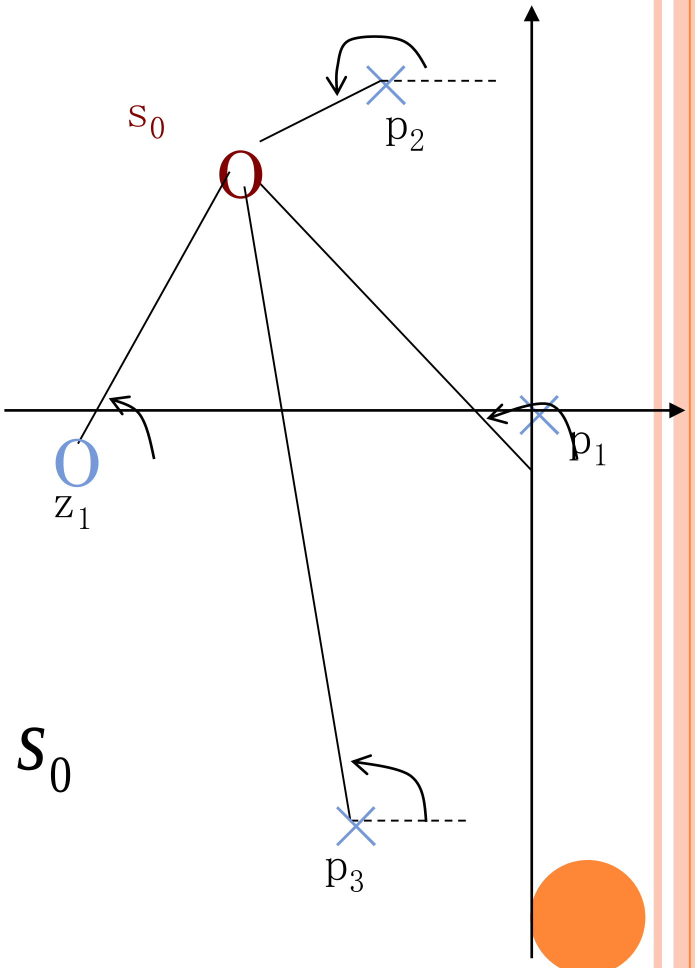
$$\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_{j})-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_{i})=\pm(2q+1)180^{\circ}\qquad q=0,1,2,\ \cdots$$

几点说明：

- **实际上满足相角条件的任一点，一定可以找到相应的可变参数值，使幅值条件成立。**
- **相角条件也是根轨迹的充要条件。**
- **利用相角条件可确定根轨迹的形状，但利用幅值条件才可求得给定闭环极点所对应的增益*K*。**
- **进行相角计算时，规定正实轴方向为0°，逆时针方向为相角的正方向。**
- **相角条件说明：Σ(由各开环零点指向轨迹点的方向角) – Σ(由各极点指向轨迹点的方向角) = 指向正左方。**

4．1．3根轨迹方程的应用

设某一系统的开环零极点如图，在S平面中的任意一点**S0**，用相角条件可以判断**S0**是不是根轨迹的点。



1．从S_0 到各零极点连直线

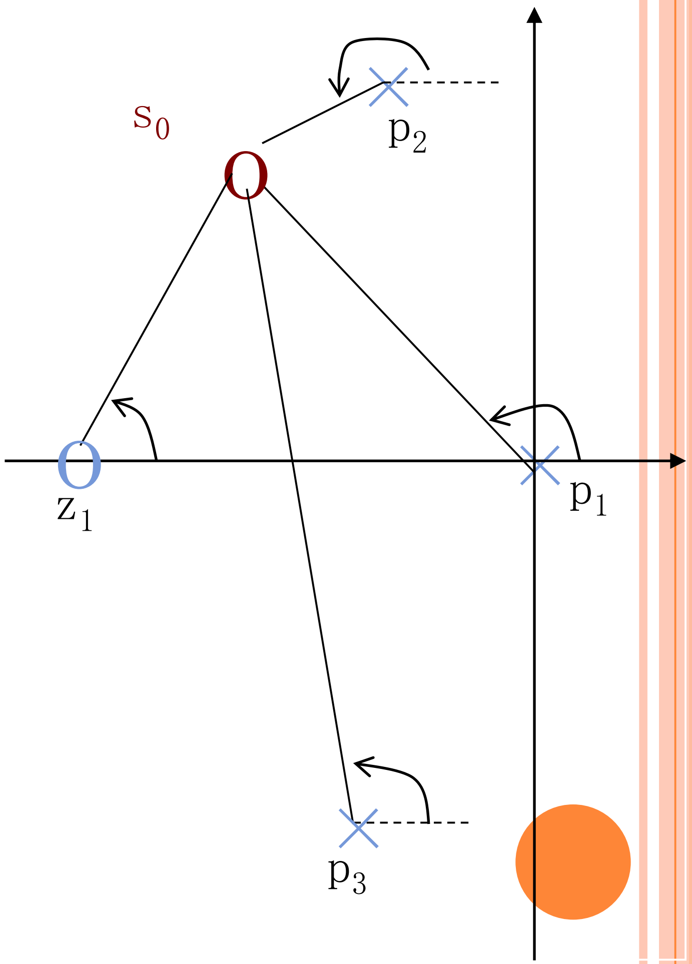
2．用量角器量 $\angle(s_0 - p_1)$,…等各个角.

3．将量好的值代入相角条件式，若等式成立，则 S_0 就是根轨迹上的点.

$$\angle(s_0 - z_1) - \angle(s_0 - p_1) - \angle(s_0 - p_2) - \angle(s_0 - p_3)$$
$$= 45° - 135° - 210° - 100° = -400°$$

不满足，故s_0 不是根轨迹上的点。

在绘制根轨迹时，在感兴趣的区段，要比较细致地绘制，可用试探法，根据相角条件确定几个根轨迹上的点。允许有一定的误差，比如± 5° 。而其它区段的根轨迹则可根据一些规则迅速的勾画出来。



绘制根轨迹图时， S 平面虚轴和实轴的坐标比例应取得一致。

4．2 绘制根轨迹的基本规则

纯粹用试验点的办法手工作图，工作量是十分巨大的，而且对全貌的把握也很困难，于是人们研究根轨迹图的基本规则，以便使根轨迹绘图更快更准。概括起来， 以开环增益K为参变量的根轨迹图主要有下列基本规则：

1）分支数和对称性

根轨迹一定对称于实轴，并且有max(n,m)支。

根轨迹由若干分支构成，分支数与开环极点数相同。

特征方程的根要么是实根（在实轴上）要么是共轭复根（对称于实轴），所以根轨迹一定对称于实轴。

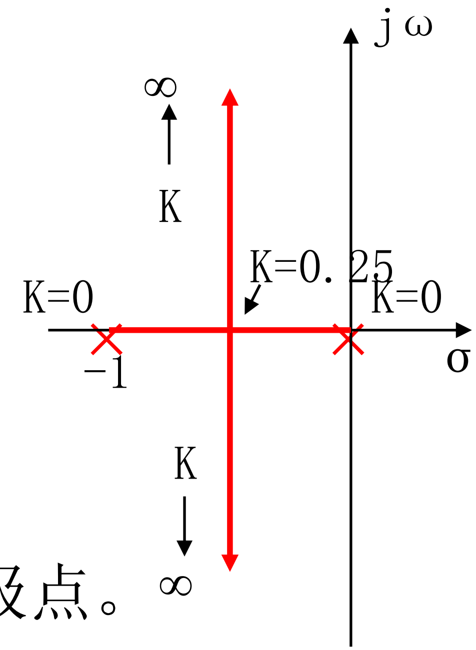
2）起点和终点

根轨迹一定开始于开环极点，终止于开环零点。

根轨迹的起点对应于K=0 时特征根在S平面上的分布位置，而根轨迹的终点则对应于$K\rightarrow\infty$时，特征根在S平面上的分布位置。

幅值条件改写

$$\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=\frac{1}{K_1}$$



当 $K_1=0$，必有 S = p_i ，即起点是开环极点。

当 $K_1\to\infty$，必有 S = z_j ，即终点是开环零点。

但在控制系统中，总有n>m，所以根轨迹从n个开环极点处起始，到m个开环零点处终止，剩下的n－m条根轨迹将趋于无穷远处。

举例如题，$G(S)=\dfrac{K}{S(S+1)}$ ，起点： 0 ，－ 1 ，无零点，n= 2 ，m=0，n－m=2，有两条根轨迹→∞

根轨迹的起点和终点是根轨迹的特殊点。当$n=m$时，开始于n个开环极点的n支根轨迹，正好终止于 n 个开环零点。

当n>m时，开始于n个开环极点的n支根轨迹，有m支终止于开环零点，有n-m支终止于无穷远处。无穷远处也称为‘无穷远零点’。

当n<m时，终止于m个开环零点m支根轨迹，有 m支来自个开环极点，有m-n支来自无穷远处。

3)根轨迹的渐近线

1．根轨迹中（n－m）条趋向无穷远处的分支的渐近线的倾角为

$$\varphi_a = \pm \frac{(2k+1)180^\circ}{n-m} \qquad k = 1,2,\cdots，（n-m-1）$$

当 $k = 0$ 时，求得的渐近线倾角最小，

k 增大，倾角值将重复出现，而独立的渐近线只有（n－m）条.

2．渐近线与实轴的交点

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m}$$

渐近线的交点总在实轴上，即 σ_a 必为实数．在计算时，考虑到共轭复数极点、零点的虚部总是相互抵消，只须把开环零、极点的实部代入即可．

例.设控制系统的开环传函为

$$G(S)=\frac{K(S+1)}{S(S+4)(S^2+2S+2)}$$

试根据目前所知的法则确定根轨迹的有关数据

解：(1)根轨迹起始于 $P_1=0,\ P_2=-4,\ P_3=-1+j,\ P_4=-1-j$

终止于 $Z_1=-1$ 和无穷远

(2)有四条根轨迹且对称于实轴

(3) $n-m=3$ 条根轨迹终止于无穷远，其渐近线与实轴的交点为

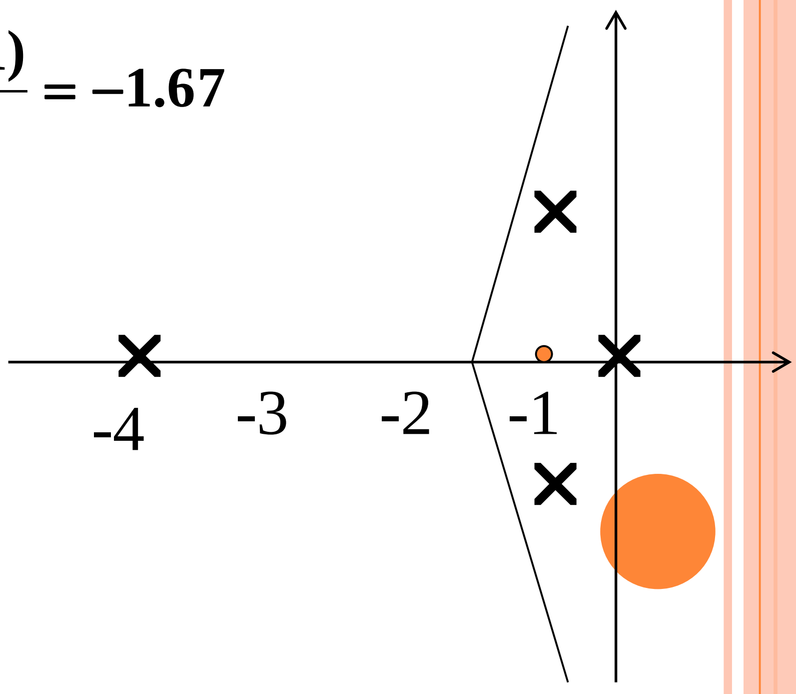
$$\sigma_a=\frac{0+(-4)+(-1+j)+(-1-j)-(-1)}{4-1}=-1.67$$

与实轴的交角为

$$\phi_a=\frac{(2l+1)\pi}{n-m}=\frac{1}{3}\pi=60^\circ \qquad (l=0)$$

$$\phi_a=\frac{(2l+1)\pi}{n-m}=\frac{3}{3}\pi=180^\circ \qquad (l=1)$$

$$\phi_a=\frac{(2l+1)\pi}{n-m}=\frac{5}{3}\pi=300^\circ \qquad (l=2)$$



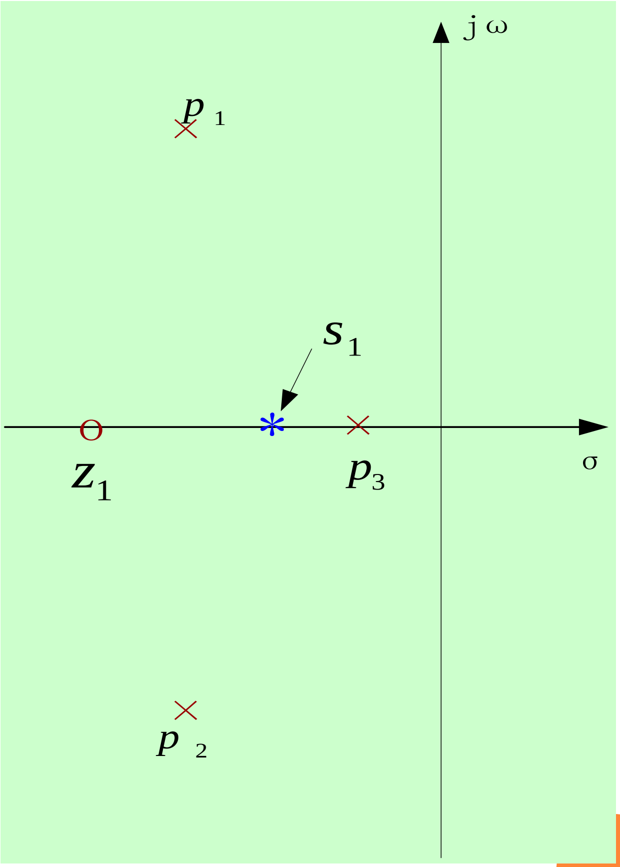
4)实轴上的根轨迹

在实轴上存在根轨迹的条件是，其右边开环零点和开环极点数目之和为奇数。

设系统开环零、极点分布如图所示。为在实轴上确定属于根轨迹的线段，首先在 和 之间任选一个试验点 。

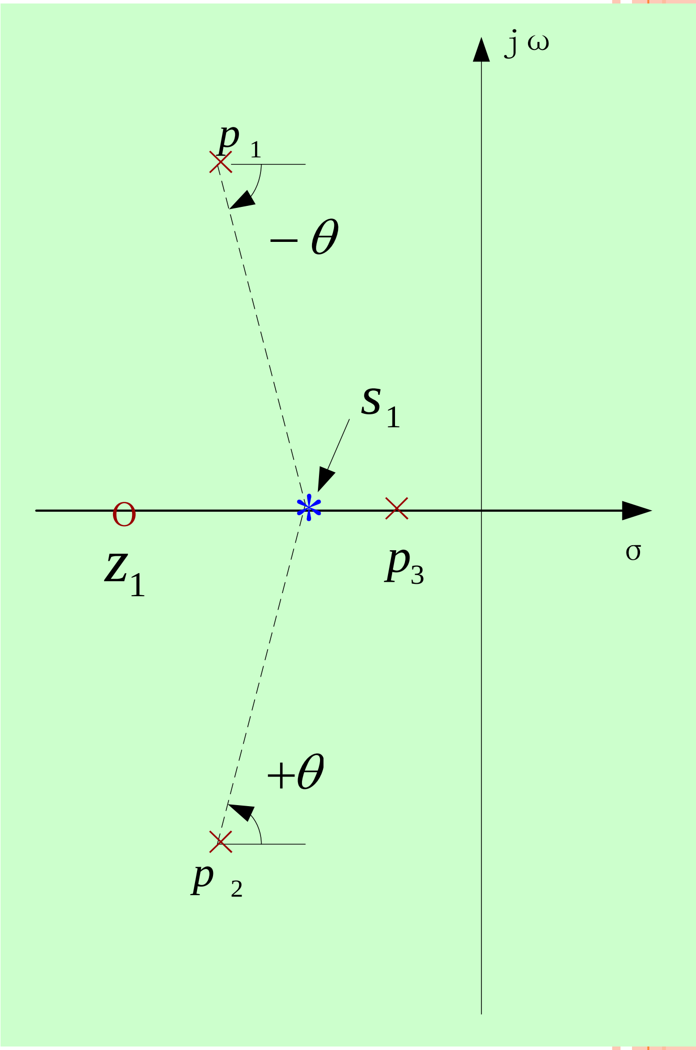
p_3

z_1 s_1



1．共轭复数极点到 s_1 的幅角之和为 0°，相互抵消，因此开环共轭复数极点、零点对实轴上根轨迹的位置没有影响，仅取决于实轴上的开环零、极点。

2．若实轴上的某一段是根轨迹，一定满足相角条件。试验点左侧的开环零、极点提供的相角为 0°,而右侧的相角为 **180°**。s_1 点满足相角条件，所以 $p_3 \sim z_1$ 之间是根轨迹。



$$\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i)=\pm(2q+1)180^\circ$$

相角条件

5）根轨迹的分离点

当从K零变到无穷大时，根轨迹可能出现先会合后分离（如图4-7），这样的点称分离点。分离点对应重闭环极点。

显然，位于实轴上的两个相邻的开环极点之间一定有分离点，因为任何一条根轨迹不可能开始于一个开环极点终止于另一个开环极点。同理，位于实轴上的两个相邻的开环零点之间也一定有分离点。

当然，分离点也可以是复数，两个相邻的开环复极点（或零点）之间可能有分离点，对实际系统，依据规则1到4一般就能确定有无分离点。

基于分离点是重闭环极点的事实可以证明，分离点的座标d，是下列代数方程的解：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}$$

没有开环零点时的处理方法

必须说明的是，方程只是必要条件而非充分条件，也就是说它的解不一定是分离点，是否是分离点还要看其它规则。