专题23 二次函数抛物线与三角形的综合（解析版）

第一部分 典例剖析+针对训练

类型一 二次函数与直角三角形的综合

1．（2022秋•利川市期末）如图1，抛物线$y=ax^2+bx-3$交x轴于点A（4，0）和点B（﹣1，0），交y轴于点C．

（1）求此抛物线的解析式；

（2）点P为直线AC下方抛物线上一动点，连接PA，PC，求△ACP面积的最大值；

（3）如图2直线l为该抛物线的对称轴，在直线l上是否存在一点M使△BCM为直角三角形，若存在，请求出点M的坐标，若不存在，请说明理由．

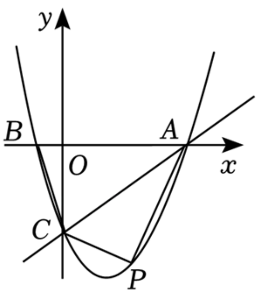


图1

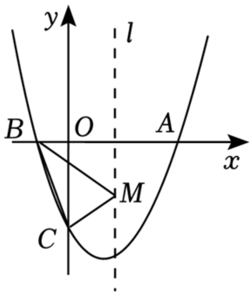


图2

思路引领：（1）用待定系数法即可求解；

（2）由△ACP面积＝$S_{\triangle PHA}+S_{\triangle PHC}=\frac{1}{2}\times PH\times AO$，即可求解；

（3）分MB、MC、BC是斜边三种情况，列出函数关系式即可求解．

解：（1）设抛物线的表达式为：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$，

则$y=a(x+1)(x-4)=a(x^2-3x-4)$，

即$-4a=-3$，

解得：$a=\frac{3}{4}$，

即抛物线的表达式为：$y=\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{4}x-3$；

（2）设直线AC的表达式为：$y=kx-3$，

将点A的坐标代入上式得：$0=4k-3$，

解得：$k=\frac{3}{4}$，

即直线 AC 的表达式为：$y=\frac{3}{4}x-3$，

过点 P 作 $PH/\!/y$ 轴交 AC 于点 H，

设点 H（x，$\frac{3}{4}x-3$），则点 P（x，$\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{4}x-3$），

则△ACP 面积＝$S_{\triangle PHA}+S_{\triangle PHC}=\frac{1}{2}\times PH\times AO=\frac{1}{2}\times 4\times[(\frac{3}{4}x-3)-(\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{4}x-3)]=-\frac{3}{2}x^2+6x$，

∴$-\frac{3}{2}<0$，故△ACP 面积有最大值，

当 $x=2$ 时，△ACP 面积的最大值为 6；

（3）存在，理由：

由抛物线的表达式知，其对称轴为 $x=\frac{3}{2}$，设点 M（$\frac{3}{2}$，m），

由勾股定理得：$BM^2=(\frac{3}{2}+1)^2+m^2$，同理可得：$BC^2=10$，$MC^2=\frac{9}{4}+(m+3)^2$，

当 MB 是斜边时，则 $(\frac{3}{2}+1)^2+m^2=10+\frac{9}{4}+(m+3)^2$，

解得：$m=-\frac{15}{6}$，即点 M（$\frac{3}{2}$，$-\frac{15}{6}$）；

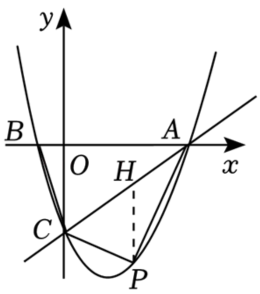
当 BC 是斜边时，则 $10=(\frac{3}{2}+1)^2+m^2+\frac{9}{4}+(m+3)^2$，

解得：方程无解；

当 MC 是斜边时，则 $(\frac{3}{2}+1)^2+m^2=10+=\frac{9}{4}+(m+3)^2$，

解得：$m=\frac{5}{6}$，即点 M（$\frac{3}{2}$，$\frac{5}{6}$），

综上，点 M 的坐标为：（$\frac{3}{2}$，$-\frac{15}{6}$）或（$\frac{3}{2}$，$\frac{5}{6}$）.



总结提升：本题考查的是二次函数综合运用，涉及到一次函数、勾股定理、图形的面积计算等，其中

（3），要用分类求解，避免遗漏．

针对训练

1．（2022秋•渝中区期末）抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 A（﹣2，0）和 B（4，0），与 y 轴交于点 C，连接 BC．点 P 是线段 BC 下方抛物线上的一个动点（不与点 B，C 重合），过点 P 作 y 轴的平行线交 BC 于 M，交 x 轴于 N，设点 P 的横坐标为 t．

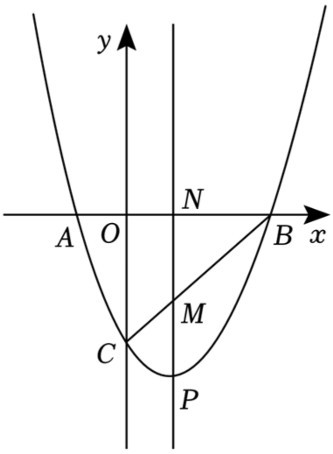
（1）求该抛物线的解析式；

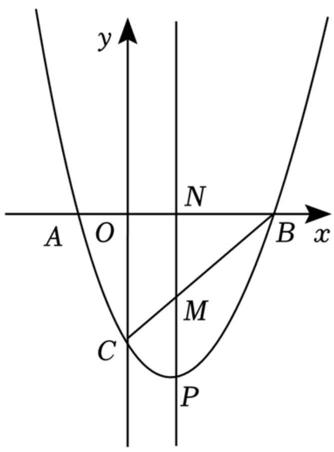
（2）用关于 t 的代数式表示线段 PM，求 PM 的最大值及此时点 M 的坐标；

（3）过点 C 作 $CH\perp PN$ 于点 H，$S_{\triangle BMN}=9S_{\triangle CHM}$，

①求点 P 的坐标；

②连接 CP，在 y 轴上是否存在点 Q，使得△CPQ 为直角三角形，若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由．





备用图

思路引领：（1）利用待定系数法即可求得答案；

（2）运用待定系数法求得直线 BC 的解析式为 $y=x-4$，设 P（t，$\frac{1}{2}t^2-t-4$），则 M（t，$t-4$），可得 $PM=\frac{1}{2}t^2+2t=-\frac{1}{2}(t-2)^2+2$，运用二次函数最值即可求得答案；

（3）①根据题意建立方程求解即可得出答案；②分两种情况：当∠CQP＝90°时，当∠CPQ＝90°时，分别求得点 Q 的坐标即可．

解：（1）∵设抛物线的表达式为：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$，

则 $y=\frac{1}{2}(x+2)(x-4)=\frac{1}{2}x^2-x-4$；

（2）在 $y=\frac{1}{2}x^2-x-4$ 中，令 $x=0$，得 $y=-4$，

∴C（0，－4），

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+c$，

则$\begin{cases}4k+c=0\\c=-4\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=1\\c=-4\end{cases}$，

∴直线 BC 的解析式为 $y=x-4$，

设 P（t，$\frac{1}{2}t^2-t-4$），则 M（t，$t-4$），

∴$PM=t-4-$（$\frac{1}{2}t^2-t-4$）$=-\frac{1}{2}t^2+2t$，

∵$PM=-\frac{1}{2}t^2+2t=-\frac{1}{2}(t-2)^2+2$，$-\frac{1}{2}<0$，

∴当 $t=2$ 时，PM 取得最大值 2，此时点 M 的坐标为（2，－2）；

（3）①如图 1，∵P（t，$\frac{1}{2}t^2-t-4$），M（t，$t-4$），N（t，0），B（4，0），C（0，－4），$CH\perp PN$，

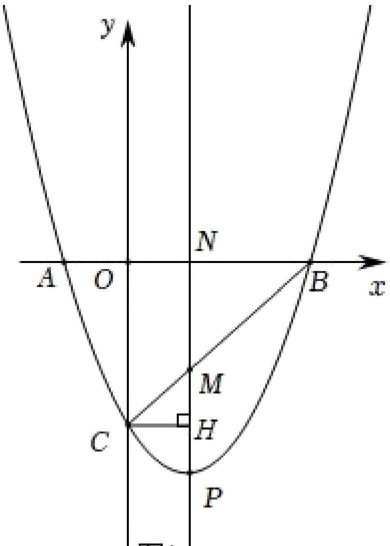


图1

∴$BN=4-t$，$MN=4-t$，$CH=t$，$MH=t-4-(-4)=t$，

∵$S_{\triangle BMN}=9S_{\triangle CHM}$，

∴$\frac{1}{2}\times(4-t)^2=9\times\frac{1}{2}t^2$，

解得：$t_1=1$，$t_2=-2$，

∵点 P 是线段 BC 下方抛物线上的一个动点，

∴$0<t<4$，

∴$t=1$，

∴P（1，$-\frac{9}{2}$）；

②存在点 Q，使得△CPQ 为直角三角形，设 Q（0，m），

∵C（0，﹣4），P（1，$-\frac{9}{2}$），

∴$CP^2=(1-0)^2+(-\frac{9}{2}+4)^2=\frac{5}{4}$，$CQ^2=(-4-m)^2$，$PQ^2=1^2+(-\frac{9}{2}-m)^2$，

当∠CQP＝90°时，如图 2，PQ⊥y 轴，

∴Q（0，$-\frac{9}{2}$）；

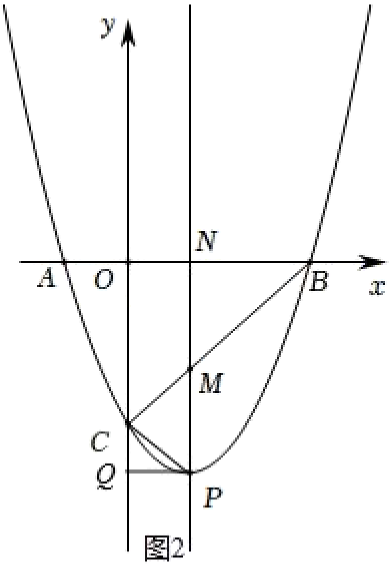


图2

当∠CPQ＝90°时，如图 3，

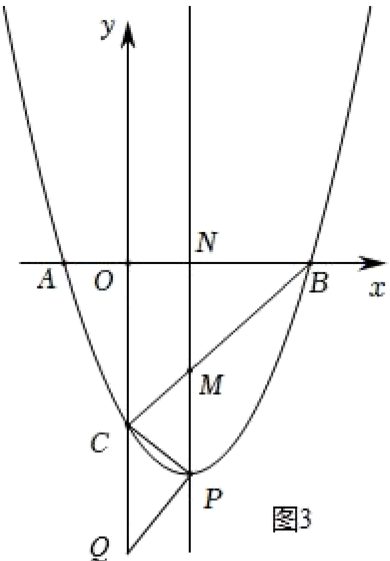


图3

在 Rt△CPQ 中，$CP^2+PQ^2=CQ^2$，

∴$\frac{5}{4}+1^2+(-\frac{9}{2}-m)^2=(-4-m)^2$，

解得：$m=-\frac{13}{2}$，

∴Q（0，$-\frac{13}{2}$）；

综上所述，点 Q 的坐标为（0，$-\frac{9}{2}$）或（0，$-\frac{13}{2}$）．

总结提升：本题是二次函数综合题，重点考查了待定系数法求函数解析式，二次函数的图象与性质，三角形面积，直角三角形的性质，勾股定理，应用二次函数的最值等，此题综合性较强，属于考试压轴题．

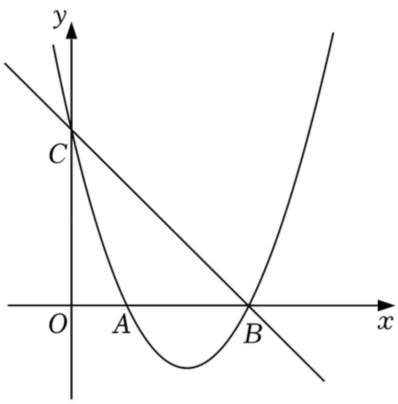
类型一 二次函数与等腰三角形的综合

典例 2（2021 秋•重庆期末）如图，已知二次函数 $y=ax^2+bx+3$ 的图象交 x 轴于点 A（1，0），B（3，0），交 y 轴于点 C．

（1）求这个二次函数的表达式；

（2）点 P 是直线 BC 下方抛物线上的一动点，求△BCP 面积的最大值；

（3）直线 $x=m$ 分别交直线 BC 和抛物线于点 M，N，当△BMN 是等腰三角形时，直接写出 m 的值．



思路引领：（1）用待定系数法求函数的解析式即可；

（2）过点 P 作 $PD/\!/y$ 轴交直线 BC 于点 D，设 P（t，t^2-4t+3），则 D（t，$-t+3$），则 $S_{\triangle BCP}=-\frac{3}{2}(t-\frac{3}{2})^2+\frac{27}{8}$，当 $t=\frac{3}{2}$时，△BCP 的面积最大值为$\frac{27}{8}$；

（3）求出 M（m，$-m+3$），N（m，m^2-4m+3），则可求 $BM^2=2(m-3)^2$，$BN^2=(m-3)^2+(m^2-4m+3)^2$，$MN^2=(m^2-3m)^2$，分三种情况讨论：当 $BM=BN$ 时，$m=2$；当 $MB=MN$ 时，$m=\pm\sqrt{2}$；当 $BN=MN$ 时，$m=1$．

解：（1）将点 A（1，0），B（3，0）代入 $y=ax^2+bx+3$，

$\therefore\begin{cases}a+b+3=0\\3^2a+3b+3=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=1\\b=-4\end{cases}$，

$\therefore y=x^2-4x+3$；

（2）令 $x=0$，则 $y=3$，

$\therefore C$（0，3），

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+m$，

$\therefore\begin{cases}m=3\\3k+m=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k=-1\\m=3\end{cases}$，

$\therefore y=-x+3$，

过点 P 作 $PD\parallel y$ 轴交直线 BC 于点 D，

设 P（t，t^2-4t+3），则 D（t，$-t+3$），

$\therefore PD=(-t+3)-(t^2-4t+3)=-t^2+3t$，

$S_{\triangle BCP}=\frac{1}{2}PD\times OB=\frac{1}{2}\times3(-t^2+3t)=-\frac{3}{2}t^2+\frac{9}{2}t=-\frac{3}{2}(t-\frac{3}{2})^2+\frac{27}{8}$，

$\therefore$ 当 $t=\frac{3}{2}$时，$\triangle BCP$ 的面积最大值为$\frac{27}{8}$；

（3）当 $x=m$ 时，$y=-m+3$，

$\therefore M$（m，$-m+3$），

当 $x=m$ 时，$y=m^2-4m+3$，

$\therefore N$（m，m^2-4m+3），

$\because B$（3，0），

$\therefore BM^2=2(m-3)^2$，$BN^2=(m-3)^2+(m^2-4m+3)^2$，$MN^2=(m^2-3m)^2$，

当 $BM=BN$ 时，$2(m-3)^2=(m-3)^2+(m^2-4m+3)^2$，

解得 $m=0$（舍）或 $m=2$；

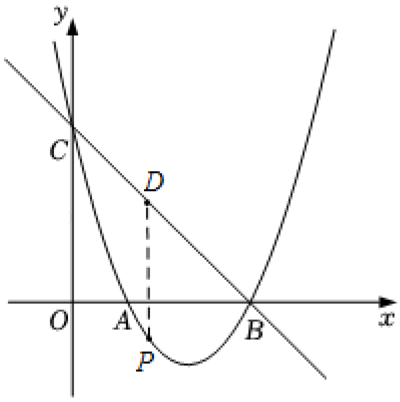
当 $MB=MN$ 时，$2(m-3)^2=(m^2-3m)^2$，

解得 $m=\pm\sqrt{2}$；

当 $BN=MN$ 时，$(m-3)^2+(m^2-4m+3)^2=(m^2-3m)^2$，

解得 $m=1$；

综上所述：m 的值为 2 或 1 或$\sqrt{2}$或$-\sqrt{2}$.



总结提升：本题考查二次函数的图象及性质，熟练掌握二次函数的图象及性质，等腰三角形的性质，分类讨论是解题的关键.

针对训练

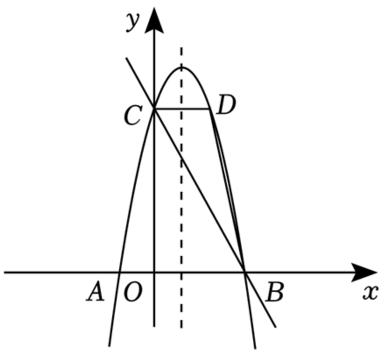
1.（2022 秋•代县期末）综合与探究

如图，抛物线 $y=ax^2+bx+4$ 经过 A（﹣1，0），B（2，0）两点，与 y 轴交于点 C，作直线 BC.

（1）求抛物线和直线 BC 的函数解析式.

（2）D 是直线 BC 上方抛物线上一点，求△BDC 面积的最大值及此时点 D 的坐标.

（3）在抛物线对称轴上是否存在一点 P，使得以点 P，B，C 为顶点的三角形是等腰三角形？若存在，请直接写出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



思路引领：（1）根据两点 A、B 的坐标解出二次函数的解析式，根据 B、C 两点的坐标解出直线的 BC 解析式；

（2）建立二次函数的关系式，求出△BDC 面积的最大值及此时点 D 的坐标

（3）分三种情况讨论即可求出点 P 的坐标.

（1）解：把 A（﹣1，0），B（2，0）代入 $y=ax^2+bx+4$ 得，$\begin{cases}0=a\times(-1)-b+4\\0=4a+2b+4\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=-2\\b=2\end{cases}$，

$\therefore y=-2x^2+2x+4$，

$\because c=4$，

$\therefore C$（0，4），

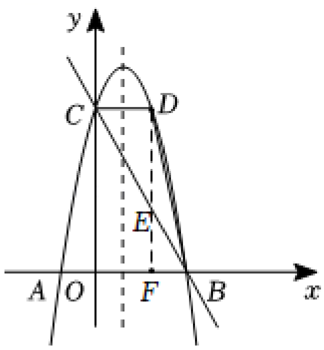
设直线 BC 的解析式为 $y=kx+4$，

把 B（2，0）代入 $y=kx+4$ 得，$0=2k+4$，

$\therefore k=-2$，

$\therefore y=-2x+4$；

（2）解：如图，过点 D 作 $DF\perp AB$ 于点 F 交 BC 于点 E，设 D（m，$-2m^2+2m+4$），E（m，$-2m+4$），



$\therefore DE=-2m^2+2m+4-(-2m+4)=-2m^2+4m$，

$\therefore S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}DE\times 2=\frac{1}{2}(-2m^2+4m)\times 2=-2m^2+4m=-2(m-1)^2+2$，

$\because a=-2<0$，

$\therefore$ 当 $m=1$ 时，$S_{\triangle BCD}$ 的最大值为 2，$-2m^2+2m+4=-2\times 1^2+2\times 1+4=4$，

$\therefore D$（1，4）；

（3）解：二次函数的对称轴为：$x=\frac{1}{2}$，设点 P 的坐标为$(\frac{1}{2}，y)$，

①当 BC 为等腰三角形的腰，$\angle C$ 为顶角时，$PC=\sqrt{\frac{1}{4}+(y-4)^2}=BC=2\sqrt{5}$，

解得$y_1=\frac{8+\sqrt{79}}{2}$或$y_2=\frac{8-\sqrt{79}}{2}$，

$\therefore P(\frac{1}{2}，\frac{8+\sqrt{79}}{2})$或$P(\frac{1}{2}，\frac{8-\sqrt{79}}{2})$；

②当 BC 为等腰三角形的底边时，BC 中点的坐标为 E（1，2），

作直线 $l_2\perp BC$ 且过 E，

设直线 l_2 方程为 $y_1=k_2x+b_2$，$\begin{cases}k_2\times(-2)=-1\\k_2+b_2=2\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k_2=\frac{1}{2}\\b_2=\frac{3}{2}\end{cases}$，

∴l_2 方程为$y_2=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$，

令$x=\frac{1}{2}$，$y_2=\frac{7}{4}$，

∴$P(\frac{1}{2}，\frac{7}{4})$；

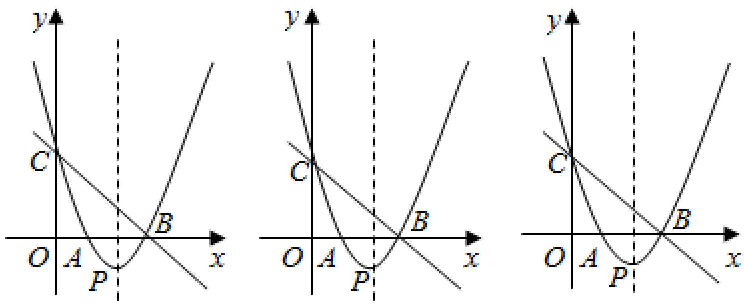
③当 BC 为等腰三角形的腰，$\angle B$ 为顶角时，$PB=\sqrt{(2-\frac{1}{2})^2+y^2}=2\sqrt{5}$，

解得$y_1=\frac{\sqrt{71}}{2}$或$y_2=-\frac{\sqrt{71}}{2}$，∴$P(\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{71}}{2})$或$P(\frac{1}{2}，-\frac{\sqrt{71}}{2})$，

综上所述，点 P 的坐标为$(\frac{1}{2}，\frac{7}{4})$或$(\frac{1}{2}，\frac{8+\sqrt{79}}{2})$或$(\frac{1}{2}，\frac{8-\sqrt{79}}{2})$或$(\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{71}}{2})$或$(\frac{1}{2}，-\frac{\sqrt{71}}{2})$.

总结提升：本题属于二次函数综合题，主要考查二次函数的解析式，一次函数的解析式，二次函数的图像与性质，二次函数与三角形的综合应用，等腰三角形的性质，掌握相关的性质是解题的关键．

2．（2022 秋•宁陵县期中）如图，直线 $y=-x+3$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 B、点 C，经过 B、C 两点的抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴的另一个交点为 A，顶点为 P．



备用图

（1）求该抛物线的解析式；

（2）在该抛物线的对称轴上是否存在点 M，使以 C，P，M 为顶点的三角形为等腰三角形？若存在，请直接写出所符合条件的点 M 的坐标；若不存在，请说明理由．

思路引领：（1）先由直线 $y=-x+3$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 B、点 C，求出点 B 和点 C 的坐标，再将点 B、点 C 的坐标代入 $y=x^2+bx+c$ 列方程组求出 b、c 的值即可；

（2）存在以 C，P，M 顶点的等腰三角形，先由抛物线的解析式求出其顶点坐标和对称轴，再按 CM 或 PC 或 PM 为底边进行分类讨论，根据勾股定理或等腰三角形的性质分别求出 PM 的长即可求得点 M 的坐标．

解：（1）直线 $y=-x+3$，当 $y=0$ 时，由 $-x+3=0$ 得，$x=3$；当 $x=0$ 时，$y=3$，

∴B（3，0），C（0，3），

把 B（3，0）、C（0，3）代入 $y=x^2+bx+c$，

得$\begin{cases}9+3b+c=0\\c=3\end{cases}$，解得$\begin{cases}b=-4\\c=3\end{cases}$，

∴该抛物线的解析式为 $y=x^2-4x+3$．

（2）存在，

理由：∵$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$，

∴该抛物线的顶点为 P（2，－1），对称轴为直线 $x=2$，

设 M（2，n），

如图 1，等腰三角形 CPM 以 CM 为底边，则 $PM=PC=\sqrt{2^2+(3+1)^2}=2\sqrt{5}$，

由$|n+1|=2\sqrt{5}$得，$n=2\sqrt{5}-1$ 或 $n=-2\sqrt{5}-1$，

∴M（2，$2\sqrt{5}-1$），M'（2，$-2\sqrt{5}-1$）；

如图 2，等腰三角形 CPM 以 PM 为底边，作 $CD\perp PM$ 于点 D，则 D（2，3），

∵$CM=CP$，

∴$DM=DP=3+1=4$，

∴$n=3+4=7$，

∴M（2，7）；

如图 3，等腰三角形 CPM 以 PC 为底边，作 $CD\perp PM$，交直线 PM 于点 D，则 D（2，3），

∴$PD=3+1=4$，

∵$\angle PDC=90°$，

∴$DM^2+CD^2=CM^2$，

∵$DM=4-PM$，$CM=PM$，

∴$(4-PM)^2+2^2=PM^2$，

解得，$PM=\frac{5}{2}$，

∴$n=-1+\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$，

∴M（2，$\frac{3}{2}$），

综上所述，点 M 的坐标为（2，$2\sqrt{5}-1$）或（2，$-2\sqrt{5}-1$）或（2，7）或（2，$\frac{3}{2}$）．

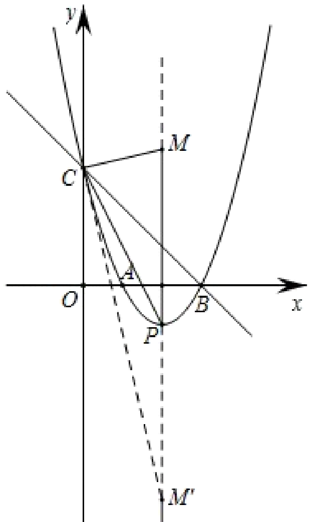


图1

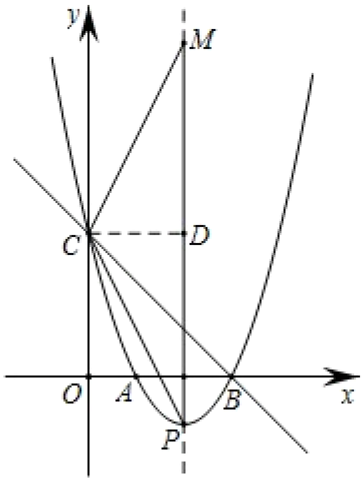


图2

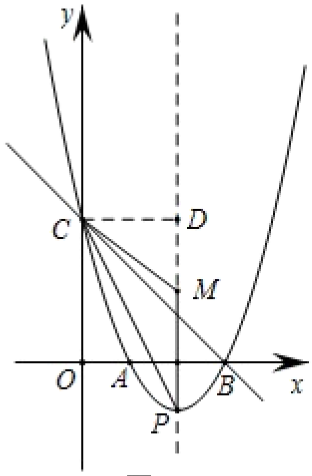


图3

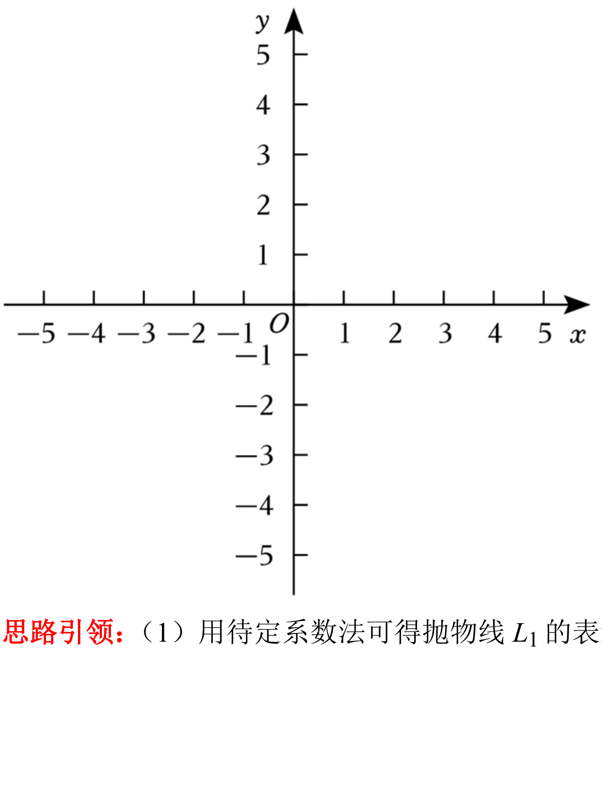
总结提升：此题重点考查二次函数的图象与性质、一次函数的图象与性质、用待定系数法求函数解析式、等腰三角形的性质、勾股定理等知识与方法，在解第（2）题时，应注意分类讨论，此题难度较大，属于考试压轴题．

类型三 二次函数与等腰直角三角形的综合

典例3（2022秋•洛川县校级期末）已知抛物线 L_1：$y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A（－5，0），B（－1，0）两点．

（1）求抛物线 L_1 的表达式；

（2）平移抛物线 L_1 得到新抛物线 L_2，使得新抛物线 L_2 经过原点 O，且与 x 轴的正半轴交于点 C，记新抛物线 L_2 的顶点为 P，若△OCP 是等腰直角三角形，求出点 P 的坐标．



思路引领：（1）用待定系数法可得抛物线 L_1 的表达式；

（2）设新抛物线 L_2 的顶点为 P（h，k），根据△OCP 是等腰直角三角形，可得$|h|=|k|$，而新抛物线 L_2 经过原点 O，有 $k=h^2$，故$|h|=h^2$，即可解得答案．

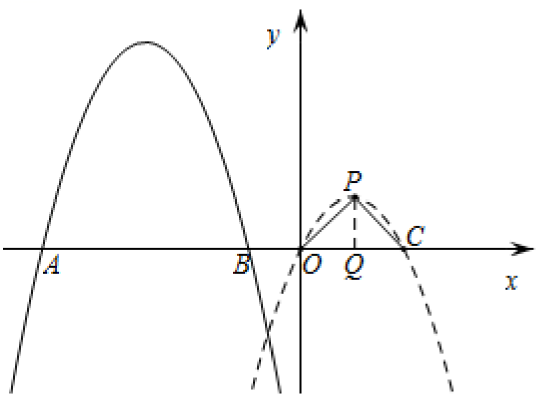
解：（1）把 A（﹣5，0），B（﹣1，0）代入 $y=-x^2+bx+c$ 得：

$\begin{cases}-25-5b+c=0\\-1-b+c=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}b=-6\\c=-5\end{cases}$，

∴抛物线 L_1 的表达式为 $y=-x^2-6x-5$；

（2）过 P 作 $PQ\perp x$ 轴于 Q，如图：



∵将抛物线 L_1 平移得到新抛物线 L_2，

∴两抛物线形状相同，

设新抛物线 L_2 的顶点为 P（h，k），则新抛物线 L_2 解析式为 $y=-(x-h)^2+k$，

∵△OCP 是等腰直角三角形，$PQ\perp x$ 轴，

∴$PQ=OQ$，即$|h|=|k|$，

又新抛物线 L_2 经过原点 O，

∴$0=-(0-h)^2+k$，即 $k=h^2$，

∴$|h|=h^2$，解得 $h=0$ 或 $h=1$ 或 $h=-1$，

$h=0$ 时，新抛物线 L_2 顶点是原点，O、C、P 重合，不能构成△OCP，故舍去，

$h=1$ 时，$k=1$，此时 P（1，1），

$h=-1$ 时，$k=1$，此时 P（﹣1，1），

∴△OCP 是等腰直角三角形，点 P 的坐标为（1，1）或（﹣1，1）．

总结提升：本题考查二次函数解析式及图象的平移，解题的关键是设出平移后抛物线解析式，根据已知列方程．

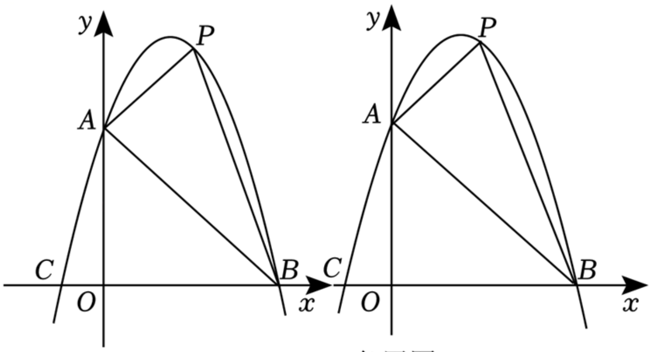
针对训练

1．（2022 秋•铁西区校级期末）已知：如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）与坐标轴分别交于点 A（0，6），B（6，0），C（－2，0），点 P 是线段 AB 上方抛物线上的一个动点．

（1）求抛物线的解析式．

（2）当△PAB 的面积最大时，求点 P 的坐标．

（3）过点 P 作 x 轴的垂线，交线段 AB 于点 D，再过点 P 作 $PE\parallel x$ 轴交抛物线于点 E，连接 DE，请问是否存在点 P 使△PDE 为等腰直角三角形？请直接写出点 P 的坐标．



备用图

思路引领：（1）由待定系数法即可求解；

（2）由 $S=\frac{1}{2}\times OB\times PD$，即可求解；

（3）由题意可知，$PD\perp PE$，若△PDE 是等腰直角三角形，则 $PE=PD$，进而求解．

解：（1）由题意得：

$\begin{cases}36a+6b+c=0\\4a-2b+c=0\\c=6\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=2\\c=6\end{cases}$，

∴抛物线的表达式为：$y=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$；

（2）∵A（0，6），

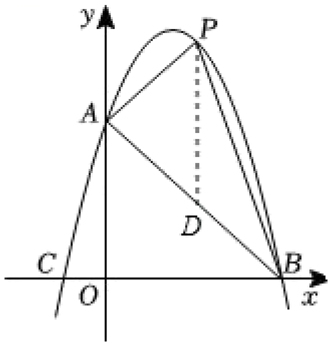
∴直线 AB 的表达式为：$y=kx+6$，

将点 B 的坐标代入上式得：$0=6k+6$，解得：$k=-1$，

∴直线 AB 的表达式为：$y=-x+6$，

点 P 的横坐标为 m，则 P（m，$-\frac{1}{2}m^2+2m+6$），

过点 P 作 x 轴的垂线，交线段 AB 于点 D，



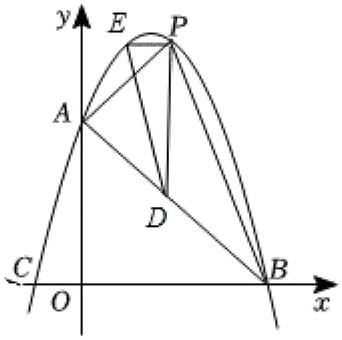
则 D（m，$-m+6$），

∴$S=\frac{1}{2}\times OB\times PD=\frac{1}{2}\times 6\times$（$-\frac{1}{2}m^2+2m+6+m-6$）$=-\frac{3}{2}$（$m-3$）$^2+\frac{27}{2}$，

∴当 $m=3$ 时，S 的值取最大，此时 P（3，$\frac{15}{2}$）；

（3）存在，理由如下：

由题意可知，$PD\perp PE$，若△PDE 是等腰直角三角形，则 $PE=PD$，



备用图

由（1）可得，$PD=-\frac{1}{2}m^2+2m+6+m-6=-\frac{1}{2}m^2+3m$，

∵$PE// x$ 轴，

∴E（$4-m$，$-\frac{1}{2}m^2+2m+6$），

∴$PE=|2m-4|$，

∴$|2m-4|=-\frac{1}{2}m^2+3m$，

解得 $m_1=-2$（舍），$m_2=4$，$m_3=5+\sqrt{17}$（舍），$m_4=5-\sqrt{17}$，

∴当△PDE 是等腰直角三角形时，点 P 的坐标为（4，6），（$5-\sqrt{17}$，$3\sqrt{17}-5$）．

总结提升：本题考查的是二次函数综合运用，涉及到一次函数、等腰三角形的性质、图形的面积计算等，本题难度不大．能够综合运用这些知识点是解题的关键．

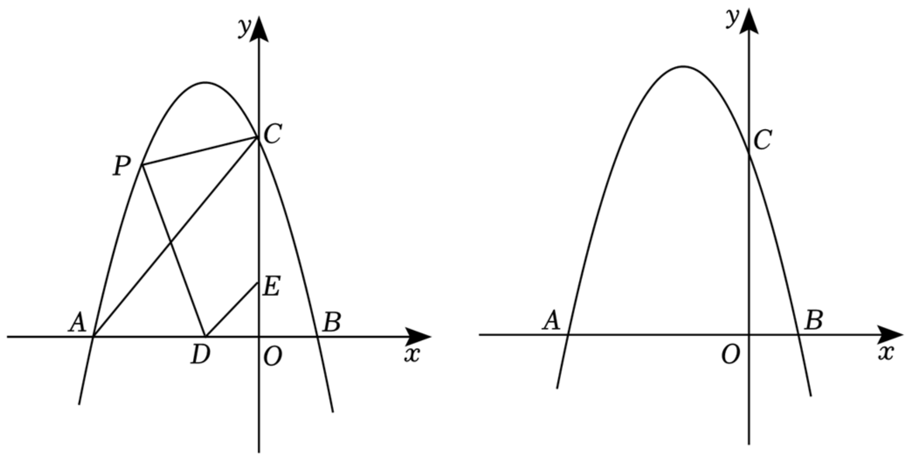
第二部分 专题提优训练

1．（2022秋•渝中区校级期末）如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 A（﹣$3\sqrt{3}$，0），B（$\sqrt{3}$，0），与 y 轴的交点为 C，且 $\tan\angle CAO=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

（1）求该抛物线的函数表达式；

（2）点 D 为 AB 的中点，过点 D 作 AC 的平行线交 y 轴于点 E，点 P 为抛物线上第二象限内的一动点，连接 PC，PD，求四边形 $PDEC$ 面积的最大值及此时点 P 的坐标；

（3）将该抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 向左平移得到抛物线 y'，使 y'经过原点，y'与原抛物线的交点为 F，点 M 为抛物线 y'对称轴上的一点，若以点 F，B，M 为顶点的三角形是直角三角形，请直接写出所有满足条件的点 M 的坐标，并把求其中一个点 M 的坐标的过程写出来.



思路引领：（1）由点 A 的坐标可知 OA 的长，根据 $\tan\angle CAO=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，即可得出点 C 的坐标以及 c，再根据点 A、B 的坐标利用待定系数法即可求出二次函数解析式；

（2）由 A、B 的坐标可得 D（$-\sqrt{3}$，0），求出直线 AC 的解析式，由 $DE\parallel AC$ 可得 DE 的解析式以及点 E 的坐标，设 P（p，$-\frac{2}{3}p^2-\frac{4}{3}\sqrt{3}p+6$），利用分割图形求面积法即可找出 $S_{四边形PDEC}$ 关于 p 的函数关系式，利用配方法以及二次函数的性质即可解决最值问题；

（3）求出抛物线 y'，可得点 F 的坐标为（$-\frac{3}{2}\sqrt{3}$，$\frac{15}{2}$），设 M（﹣$2\sqrt{3}$，m），分别表示出 MF^2，MB^2，BF^2，分三种情况，根据勾股定理即可求解.

解：（1）∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 A（﹣$3\sqrt{3}$，0），B（$\sqrt{3}$，0），

∴$OA=3\sqrt{3}$，

∵$\tan\angle CAO=\frac{OC}{OA}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，

∴$OC=6$，

∴$c=6$，

∴C（0，6），

将 A（﹣$3\sqrt{3}$，0），B（$\sqrt{3}$，0）代入 $y=ax^2+bx+6$ 中，

得：$\begin{cases}27a-3\sqrt{3}b+6=0\\3a+\sqrt{3}b+6=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=-\dfrac{2}{3}\\b=-\dfrac{4}{3}\sqrt{3}\end{cases}$.

∴所求抛物线解析式为：$y=-\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}\sqrt{3}x+6$.

（2）连接 OP，

∵A（﹣$3\sqrt{3}$，0），B（$\sqrt{3}$，0），点 D 为 AB 的中点，

∴D（$-\sqrt{3}$，0），

设直线 AC 的解析式为 $y=kx+t$，

∵A（﹣$3\sqrt{3}$，0），C（0，6），

∴$\begin{cases}-3\sqrt{3}k+t=0\\t=6\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\\t=6\end{cases}$，

∴直线 AC 的解析式为 $y=\frac{2}{3}\sqrt{3}x+6$，

∵$DE\parallel AC$，

∴设 DE 的解析式为 $y=\frac{2}{3}\sqrt{3}x+q$，

∴$\frac{2}{3}\sqrt{3}\times$（$-\sqrt{3}$）$+q=0$，

∴$q=2$，

∴DE 的解析式为 $y=\frac{2}{3}\sqrt{3}x+2$，

∴点 E（0，2），

设 P（p，$-\frac{2}{3}p^2-\frac{4}{3}\sqrt{3}p+6$），

∴$S_{\text{四边形}PDEC}=S_{\triangle POD}+S_{\triangle POC}-S_{\triangle DOE}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}$（$-\frac{2}{3}p^2-\frac{4}{3}\sqrt{3}p+6$）$+\frac{1}{2}\times6\cdot$（﹣$p$）$-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times2$

$=-\frac{\sqrt{3}}{3}p^2-5p+2\sqrt{3}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{3}$（$p+\frac{5}{2}\sqrt{3}$）$^2+\frac{33}{4}\sqrt{3}$，