专题 6.5　线段与角中的常见思想方法的应用【八大题型】

【浙教版】

题型先知

举一反三

【题型 1　线段中的整体思想】

【例 1】（2022·全国·七年级专题练习）线段 AB＝16，C，D 是线段 AB 上的两个动点（点 C 在点 D 的左侧），且 CD＝2，E 为 BC 的中点．

图1

图2

(1)如图 1，当 AC＝4 时，求 DE 的长．

(2)如图 2，F 为 AD 的中点．点 C，D 在线段 AB 上移动的过程中，线段 EF 的长度是否会发生变化，若会，请说明理由；若不会，请求出 EF 的长．

【答案】(1)$DE=4$

(2)$EF=7$

【分析】（1）首先根据题意求出 BC 的长度，然后由 E 为 BC 的中点求出 BE 的长度，最后即可求出 DE 的长；

（2）由题意可得$AD+BC=AB+CD$，由 F 为 AD 的中点和 E 为 BC 的中点表示出$FD+CE=\frac{1}{2}(AD+BC)$，代入$EF=FD+CE-CD$，即可求出 EF 长．

【详解】（1）∵AB＝16，CD＝2，AC＝4，

∴$BC = AB - AC = 16 - 4 = 12$，$AD = AC + CD = 6$,

∵E 为 BC 的中点，

∴$BE = \frac{1}{2}BC = 6$，

∴$DE = AB - AD - BE = 16 - 6 - 6 = 4$；

（2）线段 EF 的长度不会发生变化，$EF = 7$，

∵AB＝16，CD＝2，

∴$AD + BC = AB + CD = 16 + 2 = 18$，

∵F 为 AD 的中点，E 为 BC 的中点，

∴$FD + CE = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2} \times 18 = 9$，

∴$EF = FD + CE - CD = 9 - 2 = 7$．

【点睛】此题考查了线段的和差计算以及有关线段中点的计算问题，解题的关键是正确分析题目中线段之间的数量关系．

【变式 1-1】（2022·黑龙江大庆·期末）如图 1，已知点 C 在线段 AB 上，且$AM = \frac{1}{3}AC$，$BN = \frac{1}{3}BC$．

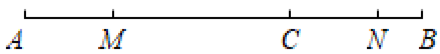


图1

(1)若$AC = 12$，$CB = 6$，求线段 MN 的长．

(2)若 C 为线段 AB 上任意一点，且满足$AC + BC = a$，其他条件不变，求线段 MN 的长．

【答案】(1)12

(2)$\frac{2}{3}a$

【分析】（1）若 AC=12，CB=6，求线段 MN 的长；

（2）若点 C 为线段 AB 上任意一点，且满足 AC+BC=a，请直接写出线段 MN 的长；

（1）

解：因为$AM = \frac{1}{3}AC$，$BN = \frac{1}{3}BC$，$AC = 12$，$CB = 6$，

所以$AM = \frac{1}{3} \times 12 = 4$，$BN = \frac{1}{3} \times 6 = 2$．

$AB=AC+BC=12+6=18$.

所以$MN=AB-AM-NB=18-4-2=12$.

（2）

解：因为$AM=\frac{1}{3}AC$，$BN=\frac{1}{3}BC$，$AC+BC=a$，

所以：$AM+BN=\frac{1}{3}(AC+BC)=\frac{1}{3}a$，

所以$MN=AB-(AM+BN)=AC+BC-(AM+BN)=a-\frac{1}{3}a=\frac{2}{3}a$.

【点睛】本题考查了两点间的距离，利用 $AM=\frac{1}{3}AC$．$BN=\frac{1}{3}BC$，得出 AM 的长，BN 的长是解题关键．

【变式 1-2】（2022·四川德阳·七年级期末）如图，点 C 是线段 AB 上的一点，点 M、N、P 分别是线段 AC，BC，AB 的中点．

(1)若 AB=10cm，求线段 MN 的长；

(2)若 AC=3cm，CP=1cm，求线段 PN 的长．

【答案】(1)MN＝5cm

(2)$PN=\frac{3}{2}$cm

【分析】（1）根据线段中点的性质可得 $MC=\frac{1}{2}AC$，$CN=\frac{1}{2}BC$．再根据 $MN=MC+CN=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}$（$AC+BC$）代入计算即可得出答案；

（2）先根据题意可计算出 AP 的长度，由线段中点的性质可得 AB＝2AP，CB＝AB﹣AC，$CN=\frac{1}{2}CB$，再根据 PN＝CN﹣CP 代入计算即可得出答案．

(1)

解：∵M、N 分别是 AC、BC 的中点，

∴$MC=\frac{1}{2}AC$，$CN=\frac{1}{2}BC$，

∴$MN=MC+CN=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}$（$AC+BC$）$=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times10=5$（cm）．

(2)

解：∵AC＝3，CP＝1，

∴$AP=AC+CP=4$，

∵点 P 是线段 AB 的中点，

∴$AB=2AP=8$，$CB=AB-AC=5$，

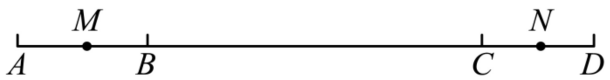
∵点 N 是线段 CB 的中点，

∴$CN=\frac{1}{2}CB=\frac{5}{2}$（cm），

∴$PN=CN-CP=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$（cm）．

【点睛】本题主要考查了两点间距离的计算，熟练掌握两点间的距离计算方法进行求解是解决本题的关键．

【变式 1-3】（2022·湖南长沙·七年级期末）如图，已知 B、C 在线段 AD 上，M 是 AB 的中点，N 是 CD 的中点，且$AB=CD$．



(1)如图线段 AD 上有 6 个点，则共有______条线段；

(2)比较线段的大小：AC______BD（填“>”、“=”或“<”）；

(3)若$AD=12$，$BC=8$，求 MN 的长度．

【答案】(1)15

(2)=

(3)10

【分析】（1）根据线段有两个端点，得出所有线段的条数；

（2）依据 $AB=CD$，即可得到 $AB+BC=CD+BC$，进而得出 $AC=BD$；

（3）依据线段的和差关系以及中点的定义，即可得到 MN 的长度．

(1)

∵线段 AD 上有 6 个点，

∴图中共有线段条数为 6×（6−1）÷2=15；

故答案为：15；

(2)

∵$AB=CD$，

∴$AB+BC=CD+BC$，

即 $AC=BD$；

故答案为：＝；

(3)

$\because AD=12$，$BC=8$，

$\therefore AB+CD=AD-BC=4$，

$\because M$ 是 AB 的中点，N 是 CD 的中点，

$\therefore BM=\frac{1}{2}AB$，$CN=\frac{1}{2}CD$，

$\therefore BM+CN=\frac{1}{2}(AB+CD)=\frac{1}{2}\times 4=2$，

$\therefore MN=BM+CN+BC=2+8=10$．

【点睛】本题主要考查了两点间的距离以及线段的和差关系，利用中点性质转化线段之间的倍分关系，在不同情况下灵活选用它的不同表示方法，有利于解题的简洁性．

【题型 2　线段中的方程思想】

【例 2】（2022·河南信阳·七年级期末）如图，A，B，C，D四点在同一条直线上．

(1)若$AB=CD$，

①比较线段的大小：AC______BD；（填“>”“=”或“<”）

②若$BC=\frac{3}{4}AC$，且$AC=24\text{cm}$，则AD的长为______cm；

(2)若线段AD被点B，C分成了3:4:5三部分，且AB的中点M和CD的中点N之间的距离是 20cm，求AD的长．

【答案】(1)①=；②30

(2)30cm

【分析】(1)①根据等式的性质，得出答案；②求出 BC 的值，再求出 AB、CD 的长，进而求出 AD 的长即可；

(2)根据线段的比，线段中点的意义，设未知数，列方程求解即可．

（1）

①$\because AB=CD$，

$\therefore AB+BC=CD+BC$，

即，$AC=BD$，

故答案为： =；

②$\because BC=\frac{3}{4}AC$，且 $AC=24$cm，

$\therefore BC=\frac{3}{4}\times24=18$(cm)，

$\therefore AB=CD=AC-BC=24-18=6$ (cm)

$\therefore AD=AC+CD=24+6=30$ (cm)

故答案为：30；

（2）

解：如图 1 所示，

图1

$\because$线段AD被点 B，C分成了3:4:5三部分，

设$AB=3x$，则$BC=4x$，$CD=5x$，

因为M是AB的中点，N是CD的中点，

所以$BM=\frac{1}{2}AB=\frac{3}{2}x$，$CN=\frac{1}{2}CD=\frac{5x}{2}$，

所以$\frac{3}{2}x+4x+\frac{5}{2}x=20$；

得$x=\frac{5}{2}$；

所以$AD=3x+4x+5x=12x=12\times\frac{5}{2}=30\text{cm}$.

【点睛】本题考查线段的和差及其中点的有关计算，理解线段中点的意义是正确计算的前提，以及根据已知，用方程思想解决问题是解题关键.

【变式 2-1】（2022·山东枣庄东方国际学校七年级阶段练习）如图，点 A、B 在线段EF上，点 M、N 分别是线段EA、BF的中点，$EA:AB:BF=1:2:3$，若$MN=6\text{cm}$，求线段EF的长.

【答案】EF的长为9cm.

【分析】由于 EA：AB：BF=1：2：3，可以设 $EA=x$，$AB=2x$，$BF=3x$，而 M、N 分别为 EA、BF 的中点，那

么线段 MN 可以用 x 表示，而 MN=6cm，由此即可得到关于 x 的方程，解方程即可求出线段 EF 的长度．

【详解】解：设$EA=x\text{cm}$

$\because EA:AB:BF=1:2:3$，

$\therefore AB=2x\text{cm}$，$BF=3x\text{cm}$，

而 M、N 分别为EA、BF的中点，

$\therefore MA=\frac{1}{2}EA$，$NB=\frac{1}{2}BF$，

$\therefore MN=MA+AB+BN=\frac{1}{2}x+2x+\frac{3}{2}x=4x\text{cm}$，

$\because MN=6\text{cm}$，

$\therefore 4x=6$，

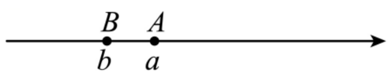
$\therefore x=\frac{3}{2}$，

$\therefore EF=EA+AB+BF=6x=9\text{cm}$．

$\therefore EF$的长为9cm．

【点睛】本题考查了两点间的距离．利用线段中点的性质转化线段之间的倍分关系是解题的关键，同时，灵活运用线段的和、差、倍、分转化线段之间的数量关系也是十分关键的一点．

【变式 2-2】（2022·山东泰安·期中）如图，已知数轴上有两点 A，B，它们的对应数分别是 a，b，其中 a＝12．



(1)在 B 左侧作线段 BC＝AB，在 B 的右侧作线段 BD＝3AB（要求尺规作图，不写作法，保留作图痕迹）

(2)若点 C 对应的数是 c，点 D 对应的数是 d，且 AB＝40，求 c，d 的值．

(3)在（2）的条件下，设点 M 是 BD 的中点，N 是数轴上一点，且 CN＝4DN，请直接写出 MN 的长．

【答案】(1)见解析

(2)c＝－68，d＝92

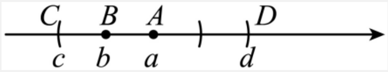
(3)MN＝28 或$\frac{340}{3}$

【分析】（1）利用圆规量得 AB 的长度，以点 B 为圆心，AB 为半径画弧，交点 B 左边的坐标轴于一点，即为点 C；再点 A 为圆心，AB 为半径画弧，交点 A 右边的坐标轴于一点，再以此点为圆心，AB 为半径画弧，交圆心右边的坐标轴于另一点，则此交点为点 D；

（2）根据线段之间的等量关系求得 AC、AD 的长度，从而得出点所表示的数；

（3）分两种情况分析：①点 N 在线段 CD 上；②点 N 在线段 CD 的延长线上．

【详解】（1）解：线段 BC、BD 为所求线段，如图所示：



（2）解：∵AB＝40，BC＝AB，

∴AC＝2AB＝80，

∵a＝12，

∴c＝12－80＝－68，

∵BD＝3AB，

∴BD＝120，

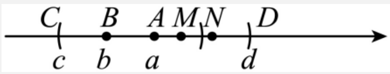
∴AD＝80，

设 d 为 x 则，x－12＝80，

解得：x＝92，

∴d＝92．

（3）解：①当点 N 在线段 CD 上时，



由（2）得 CD＝92﹣（﹣68）＝160，点 B 对应的数为 12﹣40＝﹣28，

∴BD＝92﹣（﹣28）＝120，

∵点 M 是 BD 的中点，

∴点 M 对应的数为 92﹣60＝32，

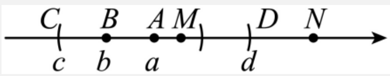
∵CN＝4DN，

∴DN＝$\frac{1}{5}CD=32$，

∴点 N 对应的数为$92-32=60$，

∴MN＝$60-32=28$；

②当点 N 在线段 CD 的延长线上时，



∵CN＝4DN，

∴CD＝3DN=160，

$\therefore DN=\frac{160}{3}$，

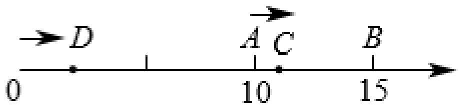
$\therefore$点 N 对应的数为$92+\frac{160}{3}=\frac{436}{3}$，

$\therefore MN=\frac{436}{3}-32=\frac{340}{3}$；

故 MN 的长为 28 或$\frac{340}{3}$.

【点睛】本题主要考查了数轴与有理数的关系和线段中点的有关计算，解题关键是抓住线段之间的关系，体现了数形结合思想.

【变式 2-3】（2022·山西晋城·七年级期末）如图，数轴上点 A、B 对应着数 10、15．C、D 两点同时从点 A、原点 O 出发分别以1cm/s和2cm/s的速度沿数轴向右运动．设运动时间为ts．



(1)当$t=2$时，请说明$BC=\frac{1}{2}AD$；

(2)当$t>5$，且$CD=AB$时，求 t 的值；

(3)取线段CD的中点 M，当$BM=\frac{1}{4}OA$时，求 t 的值．

【答案】(1)$BC=\frac{1}{2}AD$

(2)$t=15$

(3)$t=5$或$t=\frac{25}{3}$

【分析】（1）分别计算出 BC 和 AD 即可等到$BC=\frac{1}{2}AD$；

（2）先计算得到 CD 的关于 t 的表达式，再根据$CD=AB$求出 t 即可；

（3）根据 M 在点 B 前面和后面两种情况分别计算出BM关于 t 的表达式，再根据$BM=\frac{1}{4}OA$即可计算出 t.

（1）

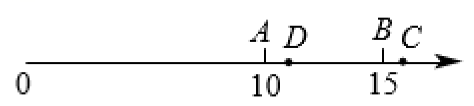
当$t=2$时，$AC=1\times t=2, BC=OB-(OA+AC)=15-10-2=3$ ，

$OD=2\times t=4, AD=OA-OD=10-4=6$，

$\therefore BC=\frac{1}{2}AD$;

（2）

当 D 在 C 后面时，如下图所示，



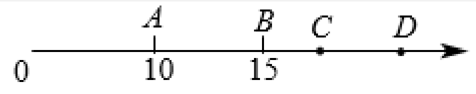
$OD=2t,OC=OA+AC=10+t$，$CD=OC-OD=10-t,AB=15-10=5$

$\because CD=AB$，

$\therefore 10-t=5$，

$\therefore t=5$（舍去），

点 D 在点 C 的前面时，如下图所示，



$CD=OD-OC=2t-(10+t)=t-10,$

$\because CD=AB$，

$\therefore t-10=5$，

即 $t=15$．

（3）

当点 M 在点 B 左边时，

$$BM=OB-OM$$

$$=OB-OD-DM$$

$$=15-2t-\frac{1}{2}(10+t-2t)$$

$$=10-\frac{3}{2}t$$

又 $\because BM=\frac{1}{4}OA$，

$\therefore 10-\frac{3}{2}t=\frac{1}{4}\times 10$

即 $t=5$；

当点 M 在点 B 右边时，

$$BM=OM-OB$$

$$=OD+DM-OB$$

$$=2t+\frac{1}{2}(10+t-2t)-15$$

$$=\frac{3}{2}t-10$$

又$\because BM=\frac{1}{4}OA$

$$\frac{3}{2}t-10=\frac{1}{4}\times 10$$

即$t=\frac{25}{3}$，

$\therefore t=5$或$t=\frac{25}{3}$.

【点睛】本题考查数轴上的点及线段的长度，解题的关键是根据题意建立等式.

【题型 3　线段中的分类讨论思想】

【例 3】（2022·全国·七年级专题练习）已知线段AB上有两点 C、D，使得$AC:CD:DB=1:2:3$，M 是线段AC的中点，点 N 是线段AB上的点，且满足$DN=\frac{1}{4}DB$，$AB=24$，求MN的长.

【答案】7 或13

【分析】设$AC=x$，则$CD=2x$，$DB=3x$，根据题意得$x+2x+3x=24$，计算得$x=4$，即可得$AC=4$，$CD=8$，$DB=12$，$CB=20$，根据点 M 是线段AC的中点得$MC=\frac{1}{2}AC=2$，根据$DB=12$，$DN=\frac{1}{4}DB$得$DN=3$，分以下两种情况：①当点 N 在线段CD上时，　②当点 N 在线段DB上时，进行计算即可得.

【详解】解：设$AC=x$，则$CD=2x$，$DB=3x$，

$\because AB=24$，

$\therefore x+2x+3x=24$，

$$6x=24$$

解得$x=4$，

$\therefore AC=4$，$CD=8$，$DB=12$，$CB=20$，

$\because$点 M 是线段AC的中点，

$\therefore MC=\frac{1}{2}AC=2$，

$\because DB=12$，$DN=\frac{1}{4}DB$，

$\therefore DN=\frac{1}{4}\times 12=3$，

分以下两种情况：

①当点 N 在线段CD上时，$MN=MC+CD-DN=2+8-3=7$，

②当点 N 在线段DB上时，$MN=MC+CD+DN=2+8+3=13$，

综上所述，线段MN的长度为 7 或13.

【点睛】本题考查了一元一次方程的应用，两点间的距离的计算，线段的中点的性质，解题的关键是掌握线段中点的性质，分类讨论.

【变式 3-1】（2022·福建省永春第一中学七年级阶段练习）如图，在数轴上 A 点表示数 a，B 点表示数 b，AB 表示 A 点和 B 点之间的距离，且 a、b 满足$(a+1)^2+|b-3|=0$.

(1)填空：a=________，b=________，AB=________；

(2)若数轴上存在一点 C，且 AC＝$2BC$，求 C 点表示的数；

(3)若在原点 O 处放一挡板，一小球甲从点 A 处以 1 个单位/秒的速度向左运动，同时另一小球乙从点 B 处以 2 个单位/秒的速度也向左运动，在碰到挡板后（忽略球的大小，可看作一点）以原来的速度向相反的方向运动，设运动的时间为 t（秒）.

①分别表示甲、乙两小球到原点的距离（用 t 表示）；

②求甲、乙两小球到原点的距离相等时经历的时间.

【答案】(1)－1，3，4

(2)$\frac{5}{3}$或7

(3)①甲：$t+1$；乙：$3-2t$或$2t-3$；②$t=\frac{2}{3}$秒或$t=4$秒

【分析】（1）先根据非负数的性质求出 a、b 的值，再根据两点间的距离公式求得 A、B 两点之间的距离；

（2）分 C 点在线段 AB 上和线段 AB 的延长线上两种情况讨论即可求解；

（3）①甲球到原点的距离=甲球运动的路程+OA 的长，乙球到原点的距离分两种情况：（Ⅰ）当 $0<t\le\frac{3}{2}$时，乙球从点 B 处开始向左运动，一直到原点 O，此时 OB 的长度-乙球运动的路程即为乙球到原点的距离；（Ⅱ）当 $t>\frac{3}{2}$时，乙球从原点 O 处开始向右运动，此时乙球运动的路程-OB 的长度即为乙球到原点的距离；

②分两种情况：（Ⅰ）$0<t\le\frac{3}{2}$，（Ⅱ）$t>\frac{3}{2}$，根据甲、乙两小球到原点的距离相等列出关于 t 的方程，解方程即可.

（1）

因为$(a+1)^2+|b-3|=0$，

所$a+1=0,b-3=0$，

所以$a=-1,b=3$；

所以 AB 的距离$=|b-a|=4$，

故答案为：－1，3，4；

（2）

设数轴上点 C 表示的数为 c.

因为$AC=2BC$，

所以$|c-a|=2|c-b|$，即$|c+1|=2|c-3|$.

因为$AC=2BC>BC$，

所以点 C 不可能在 BA 的延长线上，则 C 点可能在线段 AB 上和线段 AB 的延长线上.

①当 C 点在线段 AB 上时，则有$-1<c<3$，

得$c+1=2(3-c)$，解得$c=\frac{5}{3}$；

②当 C 点在线段 AB 的延长线上时，则有$c>3$，

得$c+1=2(c-3)$，解得$c=7$.

故当$AC=2BC$时，$c=\frac{5}{3}$或$c=7$；

（3）

①因为甲球运动的路程为：$1\times t=t,OA=1$，

所以甲球与原点的距离为：$t+1$；

乙球到原点的距离分两种情况：

（I）当$0<t\leq\frac{3}{2}$时，乙球从点 B 处开始向左运动，一直到原点 O，

因为$OB=3$，乙球运动的路程为：$2\times t=2t$，

所以乙球到原点的距离为：$3-2t$；

（II）当$t>\frac{3}{2}$时，乙球从原点 O 处开始一直向右运动，此时乙球到原点的距离为：$2t-3$；

②当$0<t\leq\frac{3}{2}$时，得$t+1=3-2t$，

解得$t=\frac{2}{3}$；

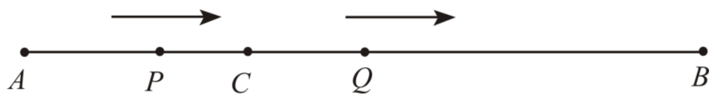
当$t>\frac{3}{2}$时，得$t+1=2t-3$，

解得$t=4$.

故当$t=\frac{2}{3}$秒或$t=4$秒时，甲乙两小球到原点的距离相等.

【点睛】本题考查了一元一次方程的应用，非负数的性质，方程的解法，数轴，两点间的距离，有一定难度，运用分类讨论思想、方程思想及数形结合思想是解题的关键.

【变式 3-2】（2022·全国·七年级专题练习）如图，点 C 是线段 AB 上的一点，线段 AC=8m，$AB=\frac{3}{2}BC$．机器狗 P 从点 A 出发，以 6m/s 的速度向右运动，到达点 B 后立即以原来的速度返回；机械猫 Q 从点 C 出发，以 2m/s 的速度向右运动，设它们同时出发，运动时间为 xs．当机器狗 P 与机械猫 Q 第二次相遇时，机器狗和机械猫同时停止运动.



备用图1

备用图2

(1)BC=______m，AB=______m；

(2)试通过计算说明：当 x 为何值时，机器狗 P 在点 A 与机械猫 Q 的中点处？

(3)当 x 为何值时，机器狗和机械猫之间的距离 PQ=2m？请直接写出 x 的值.

【答案】(1)16，24.

(2)当 $x=\frac{4}{5}$，即运动$\frac{4}{5}$秒时，机器狗 P 在点 A 与机械猫 Q 的中点处.

(3)当 $x=\frac{3}{2}$或 $x=\frac{5}{2}$或 $x=\frac{19}{4}$，即运动 $x=\frac{3}{2}$或 $x=\frac{5}{2}$或 $x=\frac{19}{4}$秒时，机器狗和机械猫之间的距离 PQ=2m.

【分析】（1）由$AB=\frac{3}{2}BC$且 AC=8cm 得 8+BC=$\frac{3}{2}BC$，先求出 BC 的长，然后再求出 AB 的长即可；

（2）先确定机器狗 P 在点 A 与机械猫 Q 的中点处只存在一种情况，即机器狗 P 与机械猫 Q 第一次相遇之前，再根据线段 AP=$\frac{1}{2}AQ$ 列方程求出 x 的值即可；

（3）分三种情况，一是点 P 在线段 AQ 上，可根据 AP+2=AQ 列方程求出 x 的值；二是点 P 在线段 BQ 上且点 P 到达点 B 之前，可根据 AP-2=AQ 列方程求出 x 的值；三是点 P 在线段 BQ 上且点 P 从点 B 返回时，可

根据 $2AB$ 减去点 P 运动的距离等于 $AQ+2$ 列方程求出 x 的值即可.

【详解】（1）解：$\because AB=\frac{3}{2}BC$，$AB=AC+BC$，$AC=8m$，

$\therefore 8+BC=\frac{3}{2}BC$，解得：$BC=16m$，

$\therefore AB=\frac{3}{2}\times16=24m$.

故答案为：16，24.

（2）解：由题意可得：：机器狗 P 在点 A 与机械猫 Q 的中点处只存在一种情况，即机器狗 P 与机械猫 Q 第一次相遇之前，

$\therefore 6x=\frac{1}{2}(8+2x)$，解得 $x=\frac{4}{5}$.

答：当 $x=\frac{4}{5}$，即运动$\frac{4}{5}$秒时，机器狗 P 在点 A 与机械猫 Q 的中点处.

（3）解：当点 P 在线段 AQ 上且 $PQ=2m$ 时，则 $6x+2=8+2x$，解得 $x=\frac{3}{2}$;

当点 P 在线段 BQ 上且 $PQ=2m$ 时，则 $6x-2=8+2x$ 或 $24\times2-6x=8+2x+2$，解得 $x=\frac{5}{2}$或 x

$\frac{19}{4}$.

答：当 $x=\frac{3}{2}$或 $x=\frac{5}{2}$或 $x=\frac{19}{4}$，即运动 $x=\frac{3}{2}$或 $x=\frac{5}{2}$或 $x=\frac{19}{4}$秒时，机器狗和机械猫之间的距离 $PQ=2m$.

【点睛】本题主要考查了解一元一次方程、一元一次方程的应用、线段上的动点问题的求解等知识点，正确地用含 x 的代数式表示线段 AP 和 AQ 的长是解答本题的关键.

【变式 3-3】（2022·江西省丰城中学七年级期中）已知数轴上 A 点表示的数是 a，B 点表示的数是 b，且 a，b 满足式子$(a+3)^2+|b-6|=0$.

(1)写出$a=$______，$b=$______.

(2)将数轴上线段AB剪下来，并把AB这条线段沿着某点折叠，然后在重叠部分某处剪一刀得到三条线段，若这三条线段的长度之比为 1：2：2，求折痕处对应的点所表示的数.

【答案】(1)−3；6

(2)$\frac{3}{5}$或$\frac{3}{2}$或$\frac{12}{5}$

【分析】（1）根据绝对值的非负性与偶次方的非负性，非负数的性质得出$a+3=0$，$b-6=0$，再解方程即可求解.

（2）设折痕处点表示数为x，被剪处为点 C、D，分三种情况：①当$AC:CD:DB=1:2:2$时，②当

$AC:CD:DB=2:1:2$时，③当$AC:CD:DB=2:2:1$时，分别求解好戏可．

（1）

解：$\because(a+3)^2+|b-6|=0$，

又$\because(a+3)^2\geq0$，$|b-6|\geq0$，

$\therefore a+3=0$，$b-6=0$，

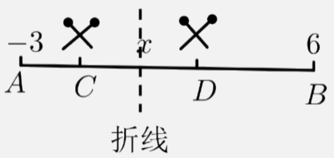
$\therefore a=-3$，$b=6$．

故答案为：-3；6．

（2）

解：设折痕处点表示数为x，

①当$AC:CD:DB=1:2:2$时，

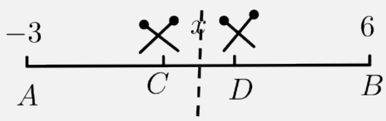


$AB=5AC=9$，

$\therefore AC=\frac{9}{5}$,

$\therefore x=-3+2\times\frac{9}{5}=\frac{3}{5}$.

②当$AC:CD:DB=2:1:2$时，



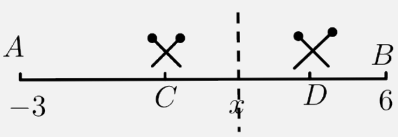
则$AB=5CD=9$，

$\therefore CD=\frac{9}{5}$,

$\therefore AC+\frac{1}{2}CD=\frac{5}{2}CD=\frac{5}{2}\times\frac{9}{5}=\frac{9}{2}$,

$\therefore x=-3+\frac{9}{2}=\frac{3}{2}$.

③当$AC:CD:DB=2:2:1$时，



则$AB=5DB=9$，

$\therefore DB=\frac{9}{5}$，

$\therefore AC+\frac{1}{2}CD=3DB=3\times\frac{9}{5}=\frac{27}{5}$.

$\therefore x=-3+\frac{27}{5}=\frac{12}{5}$.

∴综上，折痕处表示的数为：$\frac{3}{5}$或$\frac{3}{2}$或$\frac{12}{5}$.

【点睛】本题考查用数轴上的点表示有理数，非负数的性质，线段和差倍分，熟练掌握偶次方与绝对值的非负性，分类讨论思想的应用是解题的关键.

【题型 4　线段中的数形结合思想】

【例 4】（2022·广东东莞·七年级期末）如图，C 是线段 AB 上一点，AB＝12cm，AC＝4cm，P、Q 两点分别从 A、C 出发以 1cm/s、2cm/s 的速度沿直线 AB 向右运动，运动的时间为 ts.

(1)当 t＝1s 时，CP＝_______cm，QB＝_______cm；

(2)当运动时间为多少时，PQ 为 AB 的一半？

(3)当运动时间为多少时，BQ＝AP？

【答案】(1)3，6；

(2)运动时间为 2s 时，PQ 为 AB 的一半；

(3)运动时间为$\frac{8}{3}s$或 8s 时，BQ=AP

【分析】（1）根据$CP=AC-AP$，$QB=AB-AQ$的关系，由 P、Q 两点分别从 A、C 出发以 1cm/s、2cm/s 的速度沿直线 AB 向右运动，求解当$t=1s$对应的长度即可；

（2）通过建立一元一次方程进行求解即可；

（3）通过分类讨论的思想，当点Q到点B的左边或右边时，通过建立一元一次方程进行求解.

(1)

解：$\because CP=AC-AP$，

当$t=1s$，$AP=1cm$，

$\therefore CP=4-1=3cm$，

$\because QB=AB-AQ$，

当$t=1s$，$CQ=2cm$，

$\therefore QB=12-4-2=6cm$，

故答案为：3，6；

(2)

解：设运动t秒时，PQ是AB的一半，

当点P到点C的左边时，

$\therefore PQ=PC+CQ=4-t+2t=6$，

解得：$t=2$，

当点P到点C的右边时，PQ的距离大于AB的一半，不满足题意，

故运动时间为 2s 时，PQ是AB的一半；

(3)

解：当点Q到点B的左边时，

设运动t秒时，$BQ=AP$，

则$8-2t=t$，

解得：$t=\frac{8}{3}$，

当点Q到点B的右边时，

设运动t秒时，$BQ=AP$，

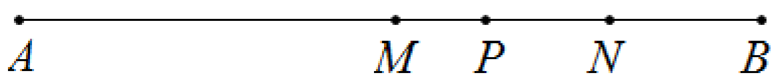
则$2t-8=t$，

解得：$t=8$，

故运动时间为$\frac{8}{3}s$或 8s 时，$BQ=AP$．

【点睛】本题考查了数轴上的动点问题，一元一次方程，两点间的距离，解题的关键是通过数形结合及分类讨论的思想进行求解．

【变式 4-1】（2022·山东德州·七年级期末）已知，线段$AB=20$，M是线段AB的中点，P是线段AB上任意一点，N是线段PB的中点．



（1）当P是线段AM的中点时，求线段NB的长；

（2）当线段$MP=1$时，求线段NB的长；

（3）若点P在线段BA的延长线上，猜想线段PA与线段MN的数量关系，并画图加以证明.

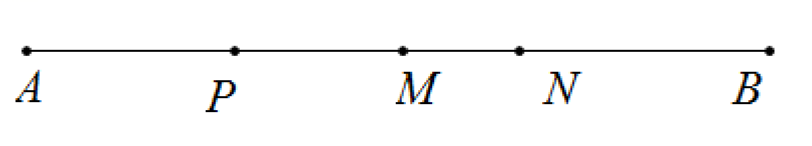
【答案】（1）7.5；（2）4.5 或 5.5；（3）$PA=2MN$，画图证明见解析.

【分析】（1）画出符合题意的图形，先求解$AM=10$， 再求解$AP=5$， 可得$PB=15$， 再利用中点的含义可得答案；

（2）分两种情况讨论：当P在M左边时，当P在M右边时，先求解PB, 再利用中点的含义可得答案；

（3）当P在线段BA延长线上时，如图，设$PA=t$，求解$NB=10+\frac{1}{2}t$，再求解$MN=NB-MB=\frac{1}{2}t$，从而可得结论.

【详解】解：（1）如图，$\because M$是线段AB的中点，$AB=20$



$\therefore MA=\frac{1}{2}AB=10$

$\because P$是线段AM的中点，

$\therefore AP=\frac{1}{2}AM=5$

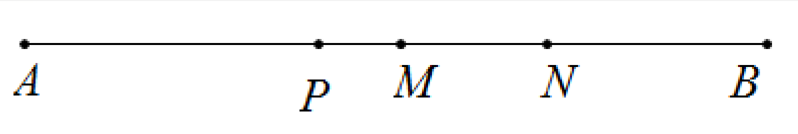
$\therefore PB=AB-AP=20-5=15$

$\because N$是线段PB的中点

$\therefore NB=\frac{1}{2}PB=7.5$

（2）$\because MP=1$，

$\therefore$当P在M左边时，如图，

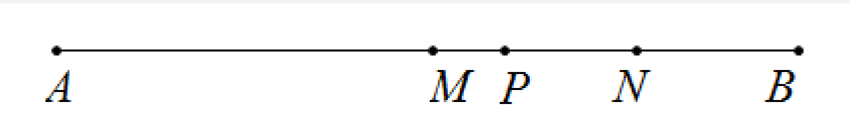


$BP=MB+MP=11$，

$\because N$是线段PB的中点，

$\therefore NB=\frac{1}{2}PB=5.5$，

如图，当P在M右边时，$BP=MB-MP=9$，

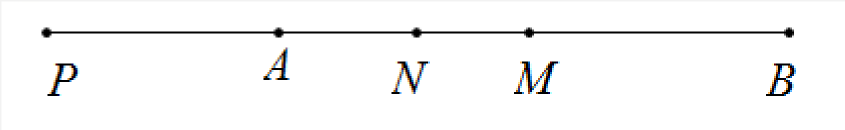


∵N是线段PB的中点，

∴$NB=\frac{1}{2}PB=4.5$.

（3）线段PA和线段MN的数量关系是：$PA=2MN$，理由如下：

当P在线段BA延长线上时，如图，设$PA=t$，



则$PB=20+t$

∵N是线段PB的中点

∴$NB=\frac{1}{2}PB=10+\frac{1}{2}t$

∵M是线段AB的中点，$AB=20$

∴$MB=\frac{1}{2}AB=10$

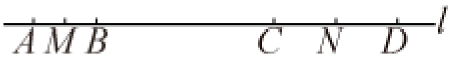
∴$MN=NB-MB=\frac{1}{2}t$

又∵$PA=t$

∴$PA=2MN$

【点睛】本题考查的是线段的和差关系，线段的中点的含义，整式的加减运算，分类思想的运用，掌握以上知识是解题的关键.

【变式 4-2】（2022·全国·七年级专题练习）如图，已知直线 l 上有两条可以左右移动的线段：$AB=m$，$CD=n$，且 m，n 满足$|m-4|+(n-8)^2=0$，点 M，N 分别为 AB，CD 中点.



(1)求线段 AB，CD 的长；

(2)线段 AB 以每秒 4 个单位长度向右运动，线段 CD 以每秒 1 个单位长度也向右运动．若运动 6 秒后，$MN=4$，求此时线段 BC 的长；

(3)若 $BC=24$，将线段 CD 固定不动，线段 AB 以每秒 4 个单位速度向右运动，在线段 AB 向右运动的某一个时间段 t 内，始终有 $MN+AD$ 为定值．求出这个定值，并直接写出 t 在哪一个时间段内.

【答案】(1)线段 AB 的长是 4，线段 CD 的长是 8

(2)16 或 8

(3)当$7.5\le t\le 9$时，$MN+AD$ 为定值，定值为 6

【分析】（1）利用绝对值和平方的非负性求出 m 和 n 的值即可；

（2）分M'在N'的左侧和M'在N'的右侧两种情况，根据线段的和差关系列出方程，即可求解；

（3）由题意，运动 t 秒后，$MN=|30-4t|$，$AD=|36-4t|$，分段讨论即可求解．

（1）

解：$\because |m-4|+(n-8)^2=0$，

$\therefore |m-4|=0$，$(n-8)^2=0$，

$\therefore m=4$，$n=8$，

$\therefore AB=4$，$CD=8$，

即线段 AB 的长是 4，线段 CD 的长是 8；

（2）

解：$\because AB=4$，$CD=8$，

$\therefore MB=\frac{1}{2}AB=2$，$CN=\frac{1}{2}CD=4$，

设运动后点 M 对应点为M'，点 N 对应点为N'，分两种情况，

若 6 秒后，M'在N'的左侧时：$MN+NN'=MM'+M'N'$，

$\therefore MB+BC+CN+NN'=MM'+M'N'$，

即$2+BC+4+6\times 1=6\times 4+4$，

解得$BC=16$．

若 6 秒后，M'在N'的右侧时：$MM'=MN+NN'+M'N'$，

$\therefore MM'=MB+BC+CN+NN'+M'N'$，

即$6\times 4=2+BC+4+6\times 1+4$，

解得$BC=8$．

即线段 BC 的长为 16 或 8；

（3）

解：$\because BC$＝24，$AB=4$，$CD=8$，

$\therefore MN=BC+\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}CD=24+2+4=30$，$AD=BC+AB+CD=24+4+8=36$，

$\because$线段 CD 固定不动，线段 AB 以每秒 4 个单位速度向右运动，

$\therefore$运动 t 秒后，$MN=|30-4t|$，$AD=|36-4t|$，

当$0 \le t < 7.5$时，$MN + AD = 30 - 4t + 36 - 4t = 66 - 8t$；

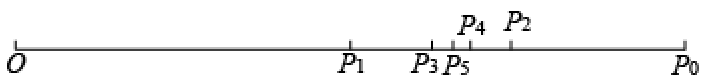
当$7.5 \le t \le 9$时，$MN + AD = 4t - 30 + 36 - 4t = 6$；

当$t > 9$时，$MN + AD = 4t - 30 + 4t - 36 = 8t - 66$；

故当$7.5 \le t \le 9$时，$MN+AD$ 为定值，定值为 6．

【点睛】本题考查非负数的性质，一元一次方程的应用，线段的和差关系，以及数轴上的动点问题，解题的关键是掌握分类讨论思想．

【变式 4-3】（2022·河南周口·七年级期末）学习了线段的中点之后，小明利用数学软件 *GeoGebra* 做了 n 次取线段中点实验：如图，设线段 $OP_0 = 1$．第 1 次，取 OP_0 的中点 P_1；第 2 次，取 P_0P_1 的中点 P_2；第 3 次，取 P_1P_2 的中点 P_3，第 4 次，取 P_2P_3 的中点 P_4；…



(1)请完成下列表格数据．

次数	$P_{i-1}P_i$	线段 OP_i 的长
第 1 次	$P_0P_1 = \frac{1}{2}$	$OP_1 = OP_0 - P_0P_1 = 1 - \frac{1}{2}$
第 2 次	$P_1P_2 = \frac{1}{2^2}$	$OP_2 = OP_1 + P_1P_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$
第 3 次	$P_2P_3 = \frac{1}{2^3}$	$OP_3 = OP_2 - P_2P_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3}$
第 4 次	$P_3P_4 = \frac{1}{2^4}$	$OP_4 = OP_3 + P_3P_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$
第 5 次		
…	…	…

(2)小明对线段 OP_4 的表达式进行了如下化简：

因为$OP_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$，

所以$2OP_4 = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right) = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$.

两式相加，得$3OP_4 = 2 + \frac{1}{2^4}$.

所以$OP_4=\frac{2}{3}+\frac{1}{3\times2^4}$.

请你参考小明的化简方法，化简 OP_5 的表达式．

(3)类比猜想：$P_{n-1}P_n=$__________，$OP_n=$________________，随着取中点次数 n 的不断增大，OP_n的长最终接近的值是__________．

【答案】(1)$P_4P_5=\frac{1}{2^5}$，$OP_5=OP_4-P_4P_5=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}$

(2)$OP_5=\frac{2}{3}-\frac{1}{3\times2^5}$

(3)$\frac{1}{2^n}$，$\frac{2}{3}+\frac{(-1)^n}{3\times2^n}$，$\frac{2}{3}$

【分析】（1）根据表中的规律可求出P_4P_5，根据$OP_5=OP_4-P_4P_5$可得出答案；

（2）参照小明对线段OP_4的表达式的化简可得OP_5的表达式；

（3）根据类比猜想可得答案．

（1）

解：$P_4P_5=\frac{1}{2^5}$，$OP_5=OP_4-P_4P_5=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}$；

故答案为：$P_4P_5=\frac{1}{2^5}$，$OP_5=OP_4-P_4P_5=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}$；

（2）

解：因为$OP_5=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}$，

所以$2OP_5=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}\right)\ =2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}$.

两式相加，得$3OP_5=2-\frac{1}{2^5}$.

所以$OP_5=\frac{2}{3}-\frac{1}{3\times2^5}$；

（3）

解：$P_{n-1}P_n=\frac{1}{2^n}$，$OP_n=\frac{2}{3}+\frac{(-1)^n}{3\times2^n}$，随着取中点次数 n 的不断增大OP_n的长最终接近的值是$\frac{2}{3}$.

故答案为：$\frac{1}{2^n}$，$\frac{2}{3}+\frac{(-1)^n}{3\times2^n}$，$\frac{2}{3}$.

【点睛】本题考查规律型：图形的变化类，找到规律并会表现出来是解题关键．

【题型 5　角中的整体思想】

【例 5】（2022·山西·七年级期末）数学课上，李老师出示了如下题目．

将一副三角板按如图 1 所示方式摆放，分别作出$\angle AOC$，$\angle BOD$的平分线OM，ON，然后提出问题：求$\angle MON$的度数．

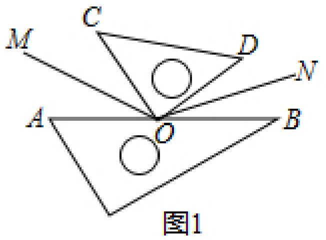


图1

小明与同桌小丽讨论后，进行了如下解答：

特殊情况，探索思路

将三角板分别按图 2，图 3 所示的方式摆放，OM和ON仍然是$\angle AOC$和$\angle BOD$的平分线，其中，按图 2 方式摆放时，可以看成是ON，OD，OB在同一直线上．按图 3 方式摆放时，$\angle AOC$和$\angle BOD$相等．

（1）请你直接写出计算结果：图 2 中$\angle MON$的度数为______，图 3 中$\angle MON$的度数为______；

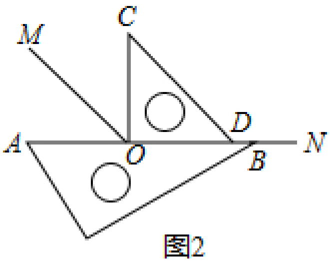


图2

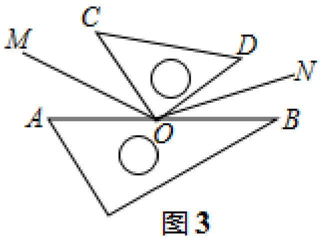


图 3

特例启发，解答题目

（2）请你完成李老师出示的题目的解答过程；

拓展结论，设计新题

（3）若将李老师出示的题目中条件“分别作出$\angle AOC$，$\angle BOD$的平分线OM，ON”改为“分别作出射线OM，ON，使$\angle AOM=\frac{3}{4}\angle AOC$，$\angle DON=\frac{1}{4}\angle BOD$”，请你直接写出$\angle MON$的度数．

【答案】（1）135°；135°；（2）答案见解析；（3）112.5°

【分析】（1）根据角平分线的定义和角的和差即可得到结论；

（2）根据已知条件得到∠AOC+∠BOD=180°-∠COD=90°，根据角平分线的定义得到∠MOC+∠NOD $=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle BOD=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOD)=45°$，于是得到结论；

（3）根据已知条件得到∠AOC+∠BOD=180°-∠COD=90°，根据角平分线的定义得到∠MOC+∠NOD $=\frac{1}{4}(\angle AOC+\angle BOD)=22.5°$，于是得到结论．

【详解】（1）解：图 2 中，$\angle \mathrm{MON}=\frac{1}{2}\times 90^{\circ}+90^{\circ}=135^{\circ}$,

图 3 中，$\angle \mathrm{MDN}=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle BOD+\angle COD$

$$=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOD)+90^{\circ}$$

$$=\frac{1}{2}\times 90^{\circ}+90^{\circ}$$

$=135^{\circ}$；

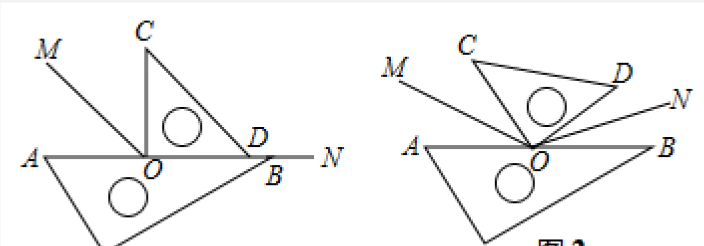


图2 图3

故答案为：135°，135°；

（2）图 1 中，∵∠COD=90°，

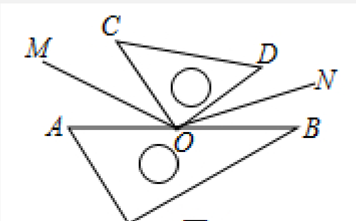


图1

∴∠AOC+∠BOD=180°-∠COD=90°，

∵OM 和 ON 是∠AOC 和∠BOD 的角平分线，

∴$\angle \mathrm{MOC}+\angle \mathrm{NOD}=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle BOD=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOD)=45^{\circ}$，

∴∠MON=（∠MOC+∠NOD）+∠COD=45°+90°=135°；

（3）∵∠COD=90°，

∴∠AOC+∠BOD=180°-∠COD=90°，

∵$\angle AOM=\frac{3}{4}\angle AOC$，$\angle DON=\frac{1}{4}\angle BOD$，

∴$\angle \mathrm{MOC}=\frac{1}{4}\angle \mathrm{AOC}$，

∴$\angle \mathrm{MOC}+\angle \mathrm{NOD}=\frac{1}{4}\angle AOC+\frac{1}{4}\angle BOD=\frac{1}{4}(\angle AOC+\angle BOD)=22.5^{\circ}$，

∴∠MON=（∠MOC+∠NOD）+∠COD=22.5°+90°=112.5°；

故答案为：112.5°.