

专题 02 一元二次方程（难点）

一、单选题

1. 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 - 2ax + b + 1 = 0$ ($ab \neq 0$) 有两个相等的实数根 k ，则下列选项成立的是 ()

A. 若 $-1 < a < 0$ ，则 $\frac{k}{a} > \frac{k}{b}$

B. 若 $\frac{k}{a} > \frac{k}{b}$ ，则 $0 < a < 1$

C. 若 $0 < a < 1$ ，则 $\frac{k}{a} < \frac{k}{b}$

D. 若 $\frac{k}{a} < \frac{k}{b}$ ，则 $1 < a < 0$

【答案】B

【分析】根据一元二次方程的根的情况利用判别式求得 a 与 b 的数量关系，再代入方程求 k 的值，然后结合 a 的取值范围和分式加减法运算法则计算求解.

【解析】解：∵关于 x 的一元二次方程 $ax^2 - 2ax + b + 1 = 0$ ($ab \neq 0$) 有两个相等的实数根 k ,

$$\therefore \Delta = (-2a)^2 - 4a(b+1) = 0,$$

$$4a^2 - 4ab - 4a = 0,$$

$$\text{又} \because ab \neq 0,$$

$$\therefore ab + 1 = 0, \text{ 即 } a = b + 1,$$

$$\therefore ax^2 - 2ax + a = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = x_2 = 1,$$

$$\therefore k = 1,$$

$$\frac{k}{a} - \frac{k}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a-1} = -\frac{1}{a(a-1)}$$

$$\text{当 } \frac{k}{a} > \frac{k}{b} \text{ 时, 即 } \frac{k}{a} - \frac{k}{b} > 0,$$

$$\text{即 } -\frac{1}{a(a-1)} > 0,$$

$$\therefore a(a-1) < 0,$$

$$\text{即 } \begin{cases} a < 0 \\ a-1 > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a > 0 \\ a-1 < 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } 0 < a < 1$$

$$\text{当 } \frac{k}{a} < \frac{k}{b} \text{ 时, 即 } \frac{k}{a} - \frac{k}{b} < 0,$$

$$\text{即 } -\frac{1}{a(a-1)} < 0,$$

$$\therefore a(a-1) > 0,$$

$$\text{即 } \begin{cases} a > 0 \\ a-1 > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a < 0 \\ a-1 < 0 \end{cases}$$

解得： $a > 1$ 或 $a < 0$ 。

故选：B。

【点睛】本题考查一元二次方程的根的判别式，根据一元二次方程根的情况求得 a 与 b 之间的等量关系是解题关键。

2. 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，下列说法：

①若 $a + b + c = 0$ ，则方程必有一根为 $x = 1$ ；②若方程 $ax^2 + c = 0$ 有两个不相等的实根，则方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 无实根；③若方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 两根为 x_1, x_2 且满足 $x_1 \neq x_2 \neq 0$ ，则方程 $cx^2 + bx + a = 0 (c \neq 0)$ ，必有实根 $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ ；④若 x_0 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根，则 $b^2 - 4ac = (2ax_0 + b)^2$ 其中正确的 ()

A. ①②

B. ①④

C. ②③④

D. ①③④

【答案】D

【分析】根据一元二次方程根的判别式及根的定义以及求根公式逐个判断排除。

【解析】解：①若 $a + b + c = 0$ ，则 $x = 1$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解，故①正确；

②方程 $ax^2 + c = 0$ 有两个不相等的实根，

$$\therefore \Delta = 0 - 4ac > 0,$$

$$\therefore -4ac > 0$$

则方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ，

$\therefore$ 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 必有两个不相等的实根，

故②错误；

③ $\because$ 方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 两根为 x_1, x_2 且满足 $x_1 \neq x_2 \neq 0$ ，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac \geq 0,$$

$$\text{令 } x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$\therefore$ 方程 $cx^2 + bx + a = 0 (c \neq 0)$ 有两个实数根，令两根分别为 x'_1, x'_2

$$\therefore x'_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} = \frac{1}{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} = \frac{1}{x_2},$$

$$x'_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} = \frac{1}{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} = \frac{1}{x_1},$$

∴方程 $cx^2 + bx + a = 0 (c \neq 0)$ ，必有实根 $\frac{1}{x_1}$ ， $\frac{1}{x_2}$ ，

故③正确；

④若 x_0 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根，

则由求根公式可得： $x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ，

$$\therefore 2ax_0 + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}，$$

$$\therefore b^2 - 4ac = (2ax_0 + b)^2，$$

故④正确。

故正确的有①③④，

故选：D。

【点睛】本题考查一元二次方程根的判断，根据方程形式，判断根的情况是求解本题的关键。

3. 若方程 $x^2 + 2px - 3p - 2 = 0$ 的两个不相等的实数根 x_1 、 x_2 满足 $x_1^3 + x_1^3 = 4 - (x_2^2 + x_2^3)$ ，则实数 p 的所有值之和为（ ）

- A. 0 B. $-\frac{3}{4}$ C. -1 D. $-\frac{5}{4}$

【答案】B

【分析】先根据一元二次方程解的定义和根与系数的关系得到 $x_1^2 + 2px_1 - 3p - 2 = 0$ ， $x_1 + x_2 = -2p$ ，进而推出 $x_1^3 = 3px_1 + 2x_1 - 2px_1^2$ ，则 $x_1^3 + x_1^2 = 3px_1 + 2x_1 - 2px_1^2 + x_1^2$ ， $x_2^3 + x_2^2 = 3px_2 + 2x_2 - 2px_2^2 + x_2^2$ ，即可推出 $(3p+2)(x_1+x_2) + (1-2p)(x_1^2+x_2^2) = 4$ ，然后代入 $x_1+x_2 = -2p$ ， $x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 4p$ 得到 $2p(4p+3)(p+1) = 0$ ，再根据判别式求出符号题意的值即可得到答案。

【解析】解：∵ x_1 、 x_2 是方程 $x^2 + 2px - 3p - 2 = 0$ 的两个相等的实数根，
∴ $x_1^2 + 2px_1 - 3p - 2 = 0$ ， $x_1 + x_2 = -2p$ ， $x_1x_2 = -3p - 2$ ，

$$\therefore x_1^2 + 2px_1 = 3p + 2，$$

$$\therefore x_1^3 + 2px_1^2 = 3px_1 + 2x_1，$$

$$\therefore x_1^3 = 3px_1 + 2x_1 - 2px_1^2，$$

$$\therefore x_1^3 + x_1^2 = 3px_1 + 2x_1 - 2px_1^2 + x_1^2，$$

同理得 $x_2^3 + x_2^2 = 3px_2 + 2x_2 - 2px_2^2 + x_2^2$,

$$\therefore x_1^2 + x_1^3 = 4 - (x_2^2 + x_2^3),$$

$$\therefore x_1^2 + x_1^3 + (x_2^2 + x_2^3) = 4,$$

$$\therefore 3px_1 + 2x_1 - 2px_1^2 + x_1^2 + 3px_2 + 2x_2 - 2px_2^2 + x_2^2 = 4,$$

$$\therefore (3p+2)(x_1+x_2) + (1-2p)(x_1^2+x_2^2) = 4,$$

$$\therefore (3p+2)(-2p) + (1-2p)[(-2p)^2 - 2(-3p-2)] = 4,$$

$$\therefore -6p^2 - 4p + (1-2p)(4p^2 + 6p + 4) = 4,$$

$$\therefore -6p^2 - 4p + 4p^2 + 6p + 4 - 2p(4p^2 + 6p + 4) = 4,$$

$$\therefore -2p^2 + 2p - 2p(4p^2 + 6p + 4) = 0,$$

$$\therefore -2p(4p^2 + 6p + 4 + p - 1) = 0,$$

$$\therefore 2p(4p^2 + 7p + 3) = 0,$$

$$\therefore 2p(4p+3)(p+1) = 0,$$

$$\text{解得 } p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -\frac{3}{4},$$

$$\therefore \Delta = (2p)^2 + 4(3p+2) > 0,$$

$$\therefore p^2 + 3p + 2 > 0,$$

$$\therefore (p+1)(p+3) > 0,$$

$\therefore p = -1$ 不符合题意,

$$\therefore p_1 + p_3 = -\frac{3}{4}$$

$\therefore$ 符合题意,

故选 B.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程根与系数的关系，根的判别式，一元二次方程解的定义，熟知一元二次方程的解是使方程左右两边相等的未知数的值是解题的关键.

4. 下列给出的四个命题，真命题的有（ ）个

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/776203000103010235>