

湖北省襄阳第四中学 2023 年高三下期 3 月月考数学试题

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $a = \log_2 3$, $b = \log_4 6$, $c = 5^{-0.1}$, 则 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

2. 椭圆是日常生活中常见的图形，在圆柱形的玻璃杯中盛半杯水，将杯体倾斜一个角度，水面的边界即是椭圆.现有一高度为 12 厘米，底面半径为 3 厘米的圆柱形玻璃杯，且杯中所盛水的体积恰为该玻璃杯容积的一半（玻璃厚度忽略不计），在玻璃杯倾斜的过程中（杯中的水不能溢出），杯中水面边界所形成的椭圆的离心率的取值范围是 ()

- A. $\left[0, \frac{\sqrt{5}}{6}\right]$ B. $\left[\frac{\sqrt{5}}{5}, 1\right)$ C. $\left[0, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right]$ D. $\left[\frac{2\sqrt{5}}{5}, 1\right)$

3. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 和点 $D(2, 0)$, 直线 $x = ty - 2$ 与抛物线 C 交于不同两点 A, B , 直线 BD 与抛物线 C 交于另一点 E . 给出以下判断：

- ①以 BE 为直径的圆与抛物线准线相离；
②直线 OB 与直线 OE 的斜率乘积为 -2 ；
③设过点 A, B, E 的圆的圆心坐标为 (a, b) , 半径为 r , 则 $a^2 - r^2 = 4$.

其中，所有正确判断的序号是 ()

- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

4. 已知复数 $z = (1+i)(3-i)(i$ 为虚数单位) , 则 z 的虚部为 ()

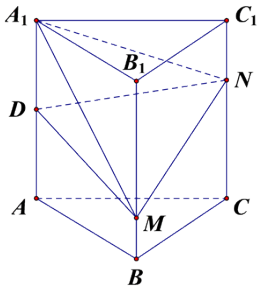
- A. 2 B. $2i$ C. 4 D. $4i$

5. 设 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a \cdot a_n^2 + b$, $n \in \mathbb{N}^*$, 则 ()

- A. 对于任意 a , 都存在实数 M , 使得 $a_n < M$ 恒成立
B. 对于任意 b , 都存在实数 M , 使得 $a_n < M$ 恒成立
C. 对于任意 $b \in (2 - 4a, +\infty)$, 都存在实数 M , 使得 $a_n < M$ 恒成立
D. 对于任意 $b \in (0, 2 - 4a)$, 都存在实数 M , 使得 $a_n < M$ 恒成立

6. 如图，正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 各条棱的长度均相等， D 为 AA_1 的中点， M, N 分别是线段 BB_1 和线段 CC_1

的动点（含端点），且满足 $BM = C_1N$ ，当 M, N 运动时，下列结论中不正确的是



- A. 在 $\triangle DMN$ 内总存在与平面 ABC 平行的线段
- B. 平面 $DMN \perp$ 平面 BCC_1B_1
- C. 三棱锥 $A_1 - DMN$ 的体积为定值
- D. $\triangle DMN$ 可能为直角三角形

7. 正四棱锥 $P - ABCD$ 的五个顶点在同一个球面上，它的底面边长为 $\sqrt{6}$ ，侧棱长为 $2\sqrt{3}$ ，则它的外接球的表面积为（ ）

- A. 4π
- B. 8π
- C. 16π
- D. 20π

8. 已知集合 $A = \{x | x \leq a, a \in R\}$ ， $B = \{x | 2^x < 16\}$ ，若 $A \supseteq B$ ，则实数 a 的取值范围是（ ）

- A. $\emptyset$
- B. R
- C. $(-\infty, 4]$
- D. $(-\infty, 4)$

9. 若不等式 $a \ln(x+1) - x^3 + 2x^2 > 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的解集中有且仅有三个整数，则实数 a 的取值范围是（ ）

- A. $\left[\frac{9}{2 \ln 2}, \frac{32}{\ln 5} \right]$
- B. $\left(\frac{9}{2 \ln 2}, \frac{32}{\ln 5} \right)$
- C. $\left(\frac{9}{2 \ln 2}, \frac{32}{\ln 5} \right]$
- D. $\left(\frac{9}{2 \ln 2}, +\infty \right)$

10. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线与直线 $6x - 3y + 1 = 0$ 垂直，则该双曲线的离心率为（ ）

- A. 2
- B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$
- D. $2\sqrt{3}$

11. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $3a_5 = 7a_{10}$ ，且 $a_1 < 0$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n (n \in N^*)$ 中最小的是（ ）

- A. S_7 或 S_8
- B. S_{12}
- C. S_{13}
- D. S_{14}

12. 已知函数 $f(x)$ 满足当 $x \leq 0$ 时， $2f(x-2) = f(x)$ ，且当 $x \in (-2, 0]$ 时， $f(x) = |x+1| - 1$ ；当 $x > 0$ 时，

$f(x) = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$. 若函数 $f(x)$ 的图象上关于原点对称的点恰好有 3 对，则 a 的取值范围是（ ）

- A. $(625, +\infty)$ B. $(4, 64)$ C. $(9, 625)$ D. $(9, 64)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} y \geq 0 \\ 2x - y + 3 \geq 0 \\ x + y - 1 \leq 0 \end{cases}$ ，则 $z = 2y - x$ 的最小值是_____

14. 已知 $A(-4, 0)$, $P(a, a+4)$ ，圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ ，直线 PM , PN 分别与圆 O 相切，切点为 M , N ，若 $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{RN}$ ，则 $|AR|$ 的最小值为_____.

15. 若函数 $f(x) = x \ln(x + \sqrt{a + x^2})$ 为偶函数，则 $a =$ _____.

16. 在一次体育水平测试中，甲、乙两校均有 100 名学生参加，其中：甲校男生成绩的优秀率为 70%，女生成绩的优秀率为 50%；乙校男生成绩的优秀率为 60%，女生成绩的优秀率为 40%. 对于此次测试，给出下列三个结论：

- ①甲校学生成绩的优秀率大于乙校学生成绩的优秀率；
②甲、乙两校所有男生成绩的优秀率大于甲、乙两校所有女生成绩的优秀率；
③甲校学生成绩的优秀率与甲、乙两校所有学生成绩的优秀率的大小关系不确定. 其中，所有正确结论的序号是_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 以直角坐标系 xOy 的原点为极点， x 轴的非负半轴为极轴，且两坐标系取相同的长度单位. 已知曲线 C 的

参数方程： $\begin{cases} x = 4 + 3\cos\theta \\ y = 3 + 3\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数)，直线 l 的极坐标方程： $\theta = \alpha$ ($\alpha \in [0, \pi)$, $\rho \in R$)

(1) 求曲线 C 的极坐标方程；

(2) 若直线 l 与曲线 C 交于 A 、 B 两点，求 $|OA| + |OB|$ 的最大值.

18. (12 分) 在某社区举行的 2020 迎春晚会上，张明和王慧夫妻俩参加该社区的“夫妻蒙眼击鼓”游戏，每轮游戏中张明和王慧各蒙眼击鼓一次，每个人击中鼓则得积分 100 分，没有击中鼓则扣积分 50 分，最终积分以家庭为单位计分.

已知张明每次击中鼓的概率为 $\frac{3}{4}$ ，王慧每次击中鼓的概率为 $\frac{2}{3}$ ；每轮游戏中张明和王慧击中与否互不影响，假设张明

和王慧他们家庭参加两轮蒙眼击鼓游戏.

(1) 若家庭最终积分超过 200 分时，这个家庭就可以领取一台全自动洗衣机，问张明和王慧他们家庭可以领取一台全自动洗衣机的概率是多少？

(2) 张明和王慧他们家庭两轮游戏得积分之和 ξ 的分布列和数学期望 $E(\xi)$.

19. (12 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$ ， $a_1 = 25$ ，且 a_1 ， a_{11} ， a_{13} 成等比数列.

(1) 求使不等式 $a_n \geq 0$ 成立的最大自然数 n ;

(2) 记数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $-\frac{13}{25} \leq T_n \leq \frac{12}{25}$.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \left(1 - \frac{4}{x}\right)e^x, g(x) = \frac{a}{x} - 1 (a \in \mathbf{R})$ (e 是自然对数的底数, $e \approx 2.718 \dots$).

(1) 求函数 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程;

(2) 若函数 $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ 在区间 $[4, 5]$ 上单调递增, 求实数 a 的取值范围;

(3) 若函数 $h(x) = f(x) + (x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 且 $h(x_1) < m$ 恒成立, 求满足条件的 m 的最小值 (极值点是指函数取极值时对应的自变量的值).

21. (12 分) 已知 $f(x) = x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 - k \ln x - 1 (k \in \mathbf{R})$.

(1) 若 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 求 k 的取值范围;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点, 判断函数 $f(x)$ 零点的个数.

22. (10 分) a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边. 已知 $a=3, c \sin C = a \sin A + b \sin B$, 且 $B=60^\circ$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 D, E 是 BC 边上的三等分点, 求 $\sin \angle DAE$.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. A

【解析】

先利用换底公式将对数都化为以 2 为底, 利用对数函数单调性可比较 a, b , 再由中间值 1 可得三者的大小关系.

【详解】

$a = \log_2 3 \in (1, 2), b = \log_4 6 = \log_2 \sqrt{6} \in (1, \log_2 3), c = 5^{-0.1} \in (0, 1)$, 因此 $a > b > c$, 故选: A.

【点睛】

本题主要考查了利用对数函数和指数函数的单调性比较大小, 属于基础题.

2. C

【解析】

根据题意可知当玻璃杯倾斜至杯中水刚好不溢出时，水面边界所形成椭圆的离心率最大，由椭圆的几何性质即可确定此时椭圆的离心率，进而确定离心率的取值范围.

【详解】

当玻璃杯倾斜至杯中水刚好不溢出时，水面边界所形成椭圆的离心率最大.

此时椭圆长轴长为 $\sqrt{12^2 + 6^2} = 6\sqrt{5}$ ，短轴长为 6，

$$\text{所以椭圆离心率 } e = \sqrt{1 - \left(\frac{6}{6\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } e \in \left(0, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right].$$

故选：C

【点睛】

本题考查了椭圆的定义及其性质的简单应用，属于基础题.

3. D

【解析】

对于①，利用抛物线的定义，利用 $d = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{|BF| + |EF|}{2} > \frac{|BE|}{2} = R$ 可判断；

对于②，设直线 DE 的方程为 $x = my + 2$ ，与抛物线联立，用坐标表示直线 OB 与直线 OE 的斜率乘积，即可判断；

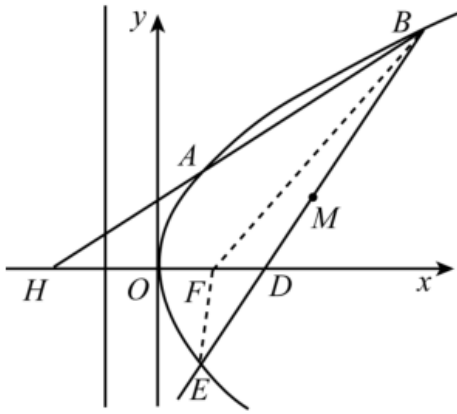
对于③，将 $x = ty - 2$ 代入抛物线 C 的方程可得， $y_A y_1 = 8$ ，从而， $y_A = -y_2$ ，利用韦达定理可得

$|BE|^2 = 16m^4 + 48m^2 + 32$ ，再由 $r^2 = |MN|^2 + \left(\frac{|BE|}{2}\right)^2$ ，可用 m 表示 r^2 ，线段 BE 的中垂线与 x 轴的交点（即圆心

N ）横坐标为 $2m^2 + 4$ ，可得 a ，即可判断.

【详解】

如图，设 F 为抛物线 C 的焦点，以线段 BE 为直径的圆为 M ，则圆心 M 为线段 BE 的中点.



设 B ， E 到准线的距离分别为 d_1 ， d_2 ， $\odot M$ 的半径为 R ，点 M 到准线的距离为 d ，

显然 B ， E ， F 三点不共线，

$$\text{则 } d = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{|BF| + |EF|}{2} > \frac{|BE|}{2} = R. \text{ 所以①正确.}$$

由题意可设直线 DE 的方程为 $x = my + 2$ ，

代入抛物线 C 的方程，有 $y^2 - 4my - 8 = 0$ ．

设点 B ， E 的坐标分别为 (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) ，

$$\text{则 } y_1 + y_2 = 4m, \quad y_1 y_2 = -8.$$

$$\text{所以 } x_1 x_2 = (my_1 + 2)(my_2 + 2) = m^2 y_1 y_2 + 2m(y_1 + y_2) + 4 = 4.$$

$$\text{则直线 } OB \text{ 与直线 } OE \text{ 的斜率乘积为 } \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -2. \text{ 所以②正确.}$$

将 $x = ty - 2$ 代入抛物线 C 的方程可得， $y_A y_1 = 8$ ，从而， $y_A = -y_2$ ．根据抛物线的对称性可知，

A ， E 两点关于 x 轴对称，所以过点 A ， B ， E 的圆的圆心 N 在 x 轴上．

$$\text{由上，有 } y_1 + y_2 = 4m, \quad x_1 + x_2 = 4m^2 + 4,$$

$$\text{则 } |BE|^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 + (y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2 = 16m^4 + 48m^2 + 32.$$

所以，线段 BE 的中垂线与 x 轴的交点（即圆心 N ）横坐标为 $2m^2 + 4$ ，所以 $a = 2m^2 + 4$ ．

$$\text{于是， } r^2 = |MN|^2 + \left(\frac{|BE|}{2}\right)^2 = \left(2m^2 + 4 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 + 4m^4 + 12m^2 + 8,$$

$$\text{代入 } x_1 + x_2 = 4m^2 + 4, \quad y_1 + y_2 = 4m, \text{ 得 } r^2 = 4m^4 + 16m^2 + 12,$$

$$\text{所以 } a^2 - r^2 = (2m^2 + 4)^2 - (4m^4 + 16m^2 + 12) = 4.$$

所以③正确.

故选: D

【点睛】

本题考查了抛物线的性质综合, 考查了学生综合分析, 转化划归, 数形结合, 数学运算的能力, 属于较难题.

4. A

【解析】

对复数 z 进行乘法运算, 并计算得到 $z = 4 + 2i$, 从而得到虚部为 2.

【详解】

因为 $z = (1+i)(3-i) = 4 + 2i$, 所以 z 的虚部为 2.

【点睛】

本题考查复数的四则运算及虚部的概念, 计算过程要注意 $i^2 = -1$.

5. D

【解析】

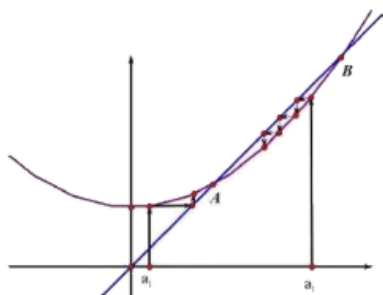
取 $a = b = 1$, 可排除 AB; 由蛛网图可得数列 $\{a_n\}$ 的单调情况, 进而得到要使 $a_n < M$, 只需 $2 < \frac{1 + \sqrt{1 - 4ab}}{2a}$, 由此

可得到答案.

【详解】

取 $a = b = 1$, $a_{n+1} = a_n^2 + 1$, 数列 $\{a_n\}$ 恒单调递增, 且不存在最大值, 故排除 AB 选项;

由蛛网图可知, $ax^2 + b = x$ 存在两个不动点, 且 $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4ab}}{2a}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4ab}}{2a}$,



因为当 $0 < a_1 < x_1$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 单调递增, 则 $a_n < x_1$;

当 $x_1 < a_1 < x_2$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 则 $x_1 < a_n \leq a_1$;

所以要使 $a_n < M$, 只需要 $0 < a_1 < x_2$, 故 $2 < \frac{1 + \sqrt{1 - 4ab}}{2a}$, 化简得 $b < 2 - 4a$ 且 $b > 0$.

故选：D.

【点睛】

本题考查递推数列的综合运用，考查逻辑推理能力，属于难题.

6. D

【解析】

A 项用平行于平面 ABC 的平面与平面 MDN 相交，则交线与平面 ABC 平行；

B 项利用线面垂直的判定定理；

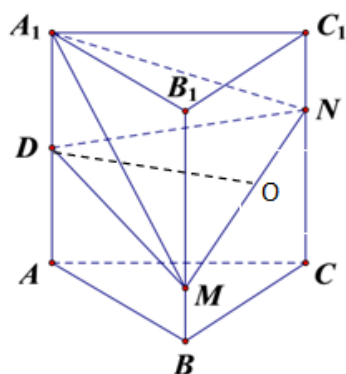
C 项三棱锥 $A_1 - DMN$ 的体积与三棱锥 $N - A_1DM$ 体积相等，三棱锥 $N - A_1DM$ 的底面积是定值，高也是定值，则体积是定值；

D 项用反证法说明三角形 DMN 不可能是直角三角形.

【详解】

A 项，用平行于平面 ABC 的平面截平面 MND，则交线平行于平面 ABC，故正确；

B 项，如图：



当 M、N 分别在 BB_1 、 CC_1 上运动时，若满足 $BM=CN$ ，则线段 MN 必过正方形 BCC_1B_1 的中心 O，由 DO 垂直于平面 BCC_1B_1 可得平面 $DMN \perp$ 平面 BCC_1B_1 ，故正确；

C 项，当 M、N 分别在 BB_1 、 CC_1 上运动时， ΔA_1DM 的面积不变，N 到平面 A_1DM 的距离不变，所以棱锥 $N-A_1DM$ 的体积不变，即三棱锥 A_1-DMN 的体积为定值，故正确；

D 项，若 ΔDMN 为直角三角形，则必是以 $\angle MDN$ 为直角的直角三角形，但 MN 的最大值为 BC_1 ，而此时 DM, DN 的长大于 BB_1 ，所以 ΔDMN 不可能为直角三角形，故错误.

故选 D

【点睛】

本题考查了命题真假判断、棱柱的结构特征、空间想象力和思维能力，意在考查对线面、面面平行、垂直的判定和性质的应用，是中档题.

7. C

【解析】

如图所示，在平面 $ABCD$ 的投影为正方形的中心 E ，故球心 O 在 PE 上，计算长度，设球半径为 R ，则

$$(PE - R)^2 + BE^2 = R^2, \text{ 解得 } R = 2, \text{ 得到答案.}$$

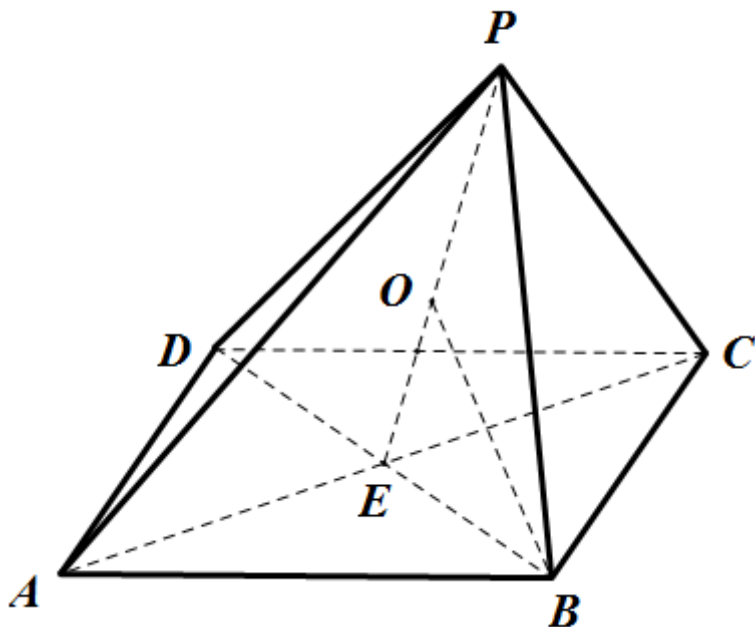
【详解】

如图所示： P 在平面 $ABCD$ 的投影为正方形的中心 E ，故球心 O 在 PE 上，

$$BD = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{3}, \text{ 故 } BE = \frac{1}{2}BD = \sqrt{3}, \quad PE = \sqrt{PB^2 - BE^2} = 3,$$

设球半径为 R ，则 $(PE - R)^2 + BE^2 = R^2$ ，解得 $R = 2$ ，故 $S = 4\pi R^2 = 16\pi$ 。

故选：C。



【点睛】

本题考查了四棱锥的外接球问题，意在考查学生的空间想象能力和计算能力。

8. D

【解析】

先化简 $B = \{x | 2^x < 16\} = \{x | x < 4\}$ ，再根据 $A = \{x | x \leq a, a \in R\}$ ，且 $A \subseteq B$ 求解。

【详解】

因为 $B = \{x | 2^x < 16\} = \{x | x < 4\}$ ，

又因为 $A = \{x | x \leq a, a \in R\}$ ，且 $A \subseteq B$ ，

所以 $a < 4$ 。

故选：D

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/776221023105010235>