（第四版）

更高更妙的初升高衔接手册

（数学）

为数学思维的养成而学

从教以来，我在五所学校任教过，接触的学生数以万计，我觉得大多数学生在学习上是属于依赖型的，老师怎么教，他就怎么学，遇到好老师会学得更好，遇到“不对味”的老师可能就“学不好”“不会学”甚至“被埋没”了. 但也有些学生，不管什么老师教，都会学得很好，甚至不用老师怎么教，也能学好. 很多人会觉得后者一定是“很聪明”的学生，然而据我了解，真实情况却不尽然. 学得好的学生中，的确有极少数“天才”，但大多数人的智力水平相差并不大. 进入高中学习阶段，同学之间最大的差异是学习能力和学习习惯的差异，而优秀的学习能力、学习习惯是靠培养、训练出来的.

现在来谈谈数学的学习. 我觉得数学学习的差异本质上是个体“数学思维”的差异. 有些同学刷了无数道数学题，但数学成绩仍不理想，遇到新的数学问题仍然无从下手，时时“望数兴叹”，每每“逢考必慌”，这其中最主要的原因，正是没有养成良好的数学思维习惯，不会用正确的数学思维解决数学问题，只会做老师讲过的题型，而不会用数学思维解决新问题.

数学思维与数学知识的关系犹如人体血与肉的关系，血液之盛衰外现于形体之荣枯. 数学思维能力的强弱直接影响着我们发现和掌握数学知识的宽度与深度. 不得不说，简单机械的题海战术对短期提高成绩也许有帮助，但对数学思维习惯的养成不利，对人的可持续学习能力、自主学习能力的提升不利.

数学思维是人脑和数学对象（空间形式、数量关系、结构特点）交互作用并按照一般思维规律认识数学内容的内在理性活动. 它既具有一般思维的根本特性，同时又有自身的个性. 这主要表现在思维活动的运演方面，它是按照客观存在数学规律的表现方式进行的，即具有数学的特点和操作方式，特别是具有作为思维载体的数学语言的简练精确和数学形式的符号化、抽象化、结构化倾向. 所以，数学学习的关键在于数学思维的学习而非简单的数学知识的叠加.

由此可见，我们在进入高中学习前务必要有意识地培养与训练数学思维，这便是“磨刀不误砍柴工”.

正是基于以上思考，本书的第二版修订，力度较大，修订量达四分之一以上，增加与调整了一些有利于提高数学思维的问题，更加侧重对数学思维的引导.

为了适合不同基础的同学学习，我利用2020年初这个难得的超长寒假，邀请了山西的张荣华，河南的刘玉宝，浙江的王凯、邓成、林威、孙军波、黄明才、苏德超、江一峰、周阳锋等省内外十余位不同名校的名师一起参与修订.同时，我自己又从头至尾进行审阅，根据积累的素材与思维培养的需要增补了一些原创题、改编题与经典题.

同时，我们还调整了原有阅读材料的内容，删去“题”，增加知识性、趣味性、可读性，补充了两讲，即第6讲“从平面到空间”与第20讲“五种思维方式的了解”.不得不提的是，原计划还想再补一讲“从平面几何到解析几何”，征稿一个月，包括我在内的四位老师连续写了四篇相关文章，但经过反复权衡，最后还是“忍痛割爱”，一篇也没采用.因为我们写的“有点难”“太高中”了，如果真放入书中很可能会给读者增加负担.我在写第20讲时，颇费了些心思，试图通过这一讲向“准高中生”介绍高中阶段将会遇到的五种解题思维：归纳猜想、配以对偶、正难则反、特殊与一般、裂项相消.同时，每种思维配两道例题与两道练习，让同学们心中有“数”，手里有“招”，学有所得，得而能悟.这样，在今后进入高中遇到一些复杂的数学问题时可以多个角度思考，运用多种思维方式寻找突破.

2021年8月，我调回了曾工作12年的杭州二中，新带了两位徒弟：陈诚、陈高翔.他俩很优秀，高中时期分别毕业于杭州二中与温州中学，当年都是全国数学竞赛一等奖并进省队的学生，本科就读于北京大学，毕业后回杭州二中当数学老师并担任学校数学竞赛教练.寒假期间，我与他俩一起对“高妙衔接”进行了再修订，补充了一些好题，增加了“第五篇 相约名校实验班——选拔测试题”，共五套50道思维训练题，每套都可作为名校自主招生选拔考试题，也可作为重点高中实验班选拔试题，每题均有详细解答，相信对同学们提升数学思维品质，增强解决数学难题的信心会大有裨益.

2023年开始，浙江省高考数学也用全国卷了，根据此变化我利用寒假对“高妙衔接”第三版进行了修订，邀请了省内几位骨干教师提供了近百道“好题”，经过反复挑选，最后选用了舟山中学正高级教师黄明才，杭州高级中学高级教师周阳锋，杭州源清中学高级教师王凯等人提供的近二十道开放题与多选题，又从杭州二中等名校分班考与学科营选拔试卷中精选与改编了十道题作为“题组六”.应该说，此次修订与新高考更贴近了，也更能突出思维养成这一主线.

同学们，在数学学习的道路上，思维决定学习行为，行为渐成学习习惯，习惯影响数学成绩.所以，从现在开始，让我们为数学思维的养成而学！

目　　录

起点更高，学习更妙

——谈如何学好高中数学

从教近三十年来，我在浙江省内五所重点高中任教过，接触过基础不同、资质各异的学生，其中有高考成绩位于浙江省第一、第二名的；有数学竞赛摘金夺银的；有保送清华、北大的；也有初中数学基础很弱、谈“数”色变的. 我想没有人是天生就能学好数学的，也没有人注定是学不好数学的. 根据教学经验，我觉得学好高中数学很大程度上取决于“起跑线”的位置，取决于你进入高中前的准备是否充分. 不得不承认，当下初、高中数学教材在内容的衔接、思想方法的自然过渡等方面还存在较大的问题.

比如初、高中数学知识脱节严重：有些公式在初中阶段已删去不讲，而高中的运算还在用，如立方和与立方差公式；因式分解在初中阶段一般只限于二次项且系数为“1”的分解，对系数不为“1”的涉及不多，而且对三次或高次多项式的因式分解几乎不作要求，但高中教材中许多化简求值都要用到，如解方程、不等式等；二次根式中对分子、分母有理化在初中阶段不作要求，而分子、分母有理化却是高中函数、不等式常用的解题技巧；初中教材对二次函数要求较低，学生处于了解水平，但二次函数却是高中教材贯穿始终的重要内容，配方、作简图、求值域、解二次不等式、判断单调区间、求最大值和最小值、研究闭区间上函数最值等内容都会用到；二次函数、二次不等式与二次方程的联系，根与系数的关系（韦达定理）在初中阶段不作要求，此类题目仅限于简单常规运算和难度不大的应用题型，而在高中阶段二次函数、二次不等式与二次方程相互转化被视为重要内容；图象的对称、平移变换在初中教材中只作简单介绍，而在高中教材讲授函数后，对其图象的上、下、左、右平移，两个函数关于原点、坐标轴、直线的对称问题为必须掌握的内容；含有参数的函数、方程、不等式在初中阶段不作要求，只作定量研究，而高中阶段这部分内容被视为重难点，方程、不等式、函数的综合考查常成为高考综合题；配方法、换元法、待定系数法等在初中阶段大大弱化，不利于高中知识的讲授……

还有数学语言与数学思维层次跃升明显：初中数学主要是以形象、通俗的语言方式进行表达，而高一数学一下子就触及集合符号语言、逻辑运算语言、函数语言、图形语言等，抽象性大大提高；在初中阶段，学生习惯于机械的、便于操作的定势方式，教学时，老师会为学生建立统一的思维模式，如解分式方程分几步，因式分解先看什么、再看什么等，而高中数学在思维形式与层次上提出了更高的要求；初中知识的系统性是较严谨的，但高中数学却不同了，它是由几块相对独立的知识拼合而成的，经常是一个知识点刚学得有点入门，马上又有新的知识出现……

所有这些造成了部分学生进入高中后对数学学习极不适应，成绩一落千丈. 高一是数学学习的一个关键时期，也是中学阶段学生成绩的分化期. 为了让广大准高中生"不输在起跑线上"，我历时数年，不断积累，不断完善，精心编写了这本《更高更妙的初升高衔接手册(数学)》，力图解决三个问题，实现两个目标.

解决初升高顺利过渡的三个问题.

一是弥补初升高脱节的知识，二是做好数学思维层面的铺垫，三是提前学习与感受一些高中的知识内容. 当然，这块内容与高中教材不同，不是高中教材的复制，不是按教材"套路"出牌，而是选择我觉得对于高中学习最重要的知识、思想与方法，用一种特殊的编排形式让学有余力的学生超前学习与掌握. 这样，一方面可以避免与课堂上教师的讲授重复；另一方面，可以为学生进入高中学习奠定"思想之基""方法之基"，让学生在学习高中的知识"招数"前，打好"内功"的基础.

实现学好高中数学的两个目标.

目标一　增加信心. 通过知识的自然衔接、思维的平稳过渡、内容的提前感知，让准高中生对数学学习更有信心.

目标二　掌握方法. 学习得法，事半功倍；学习不得法，事倍功半.

高中数学学习的"法"主要表现在三个方面.

1. 学习环节的有效落实. 制订计划、课前自学、专心上课、及时复习、独立做作业、解决疑难、系统小结和课外学习等每个环节都需要认真落实.

2. 坚持多思考、多联系、多运用. 因为多思考才能感悟数学概念、公式、法则、定理间的联系，多联系才能找出问题的内在规律；多运用、多练习，尤其是针对薄弱环节狠做题才能熟能生巧. 从某种角度来说，数学不是听会的，也不是看会的，而是做会的.

3. 坚持做好数学笔记. "好记性不如烂笔头"，在高中数学学习中，适当的笔记也很重要. 因此，请同学们准备一本数学笔记本，认真记录学习中的所思、所感、所悟. 记课堂上老师讲的内容要点，记学习中遇到的疑难问题，记学习后的归纳小结，记自己考试、练习中做错的习题的纠正.

本书共分五篇：第一篇把初中没讲或没讲清但高中需要用到的知识作进一步梳理与讲解；第二篇引导学生在教材的基础上学一点高一数学内容，感受一下高中数学的"威力"与"魅力"，有利于在进入高中的第一次大型考试(期中考试)中能大显身手；第三篇是从高中数学学习的整体需要出发，挑选一些不需太多高中基础知识，初中生可以直接学习，对培养数学思维、加强数学理解有帮助的内容进行讲解，当然，这部分内容不强求，更适合学有余力的学生；第四篇是从数学思想与方法的角度介绍数学学习必要的三种解题方法与四种数学思想；第五篇作为重点高中实验班选拔使用. 前三篇后各附了一份阅读材料，短小精悍，同学们可以了解一下教材以外的数学知识，拓展视野，更高更妙.

哲学家培根说过："读史使人明智，读诗使人灵秀，数学使人周密，科学使人深刻……"期待同学们通过这本书的学习，尽快进入高中生的角色，变得更热爱数学，更聪明，更自信. "给我三周，还你精彩三年"，在高中数学学习中让我们追求更高，学习更妙！

第一篇

查漏补缺

——初中数学的提升

数学是一门演绎的学问,从一组公设,经过逻辑的推理,获得结论.

——陈省身

我们欣赏数学,我们需要数学.

——陈省身

第 1 讲 乘法公式的加强

核心知识

我们在初中阶段已经学习了下列乘法公式：

平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；

完全平方公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

我们还可以得到下列乘法公式：

立方和公式 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$；

立方差公式 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$；

三数和平方公式 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$；

两数和立方公式 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$；

两数差立方公式 $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

在实际运用中，经常会用到公式的变形：

$a^2+b^2=(a\pm b)^2\mp 2ab$；

$ab=\frac{1}{4}[(a+b)^2-(a-b)^2]$；

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$.

典例精析

例 1 计算：$\left(x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{3}\right)^2$.

解： 原式 $=\left[x^2+(-\sqrt{2}x)+\frac{1}{3}\right]^2$

$$=(x^2)^2+(-\sqrt{2}x)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+2x^2(-\sqrt{2}x)+2x^2\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}\times(-\sqrt{2}x)$$

$$=x^4-2\sqrt{2}x^3+\frac{8}{3}x^2-\frac{2\sqrt{2}}{3}x+\frac{1}{9}.$$

说明：多项式乘法的结果一般按某个字母的降幂或升幂排列.

例 2 (1)已知 $a+b+c=4$，$ab+bc+ac=4$，求 $a^2+b^2+c^2$ 的值.

(2)已知 $x^2-3x+1=0$,求 $x^3+\frac{1}{x^3}$的值.

解:(1)$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)=8$.

(2)因为 $x^2-3x+1=x\left(x+\frac{1}{x}-3\right)=0$,且 $x\neq0$,所以 $x+\frac{1}{x}=3$,

原式$=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right]=3\times(3^2-3)=18$.

例 3　计算:(1)$(4+m)(16-4m+m^2)$;

(2)$\left(\frac{1}{5}m-\frac{1}{2}n\right)\left(\frac{1}{25}m^2+\frac{1}{10}mn+\frac{1}{4}n^2\right)$;

(3)$(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

解:(1)原式$=4^3+m^3=64+m^3$.

(2)原式$=\left(\frac{1}{5}m\right)^3-\left(\frac{1}{2}n\right)^3=\frac{1}{125}m^3-\frac{1}{8}n^3$.

(3)**方法一**　原式$=(x^2-1)[(x^2+1)^2-x^2]=(x^2-1)(x^4+x^2+1)=x^6-1$.

方法二　原式$=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)=(x^3+1)(x^3-1)=x^6-1$.

说明:在进行代数式的运算时,要观察代数式的结构是否满足乘法公式的结构.

例 4　若 $x+y+z=6,xy+yz+zx=11,xyz=6$,求$\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}$的值.

解:根据三数和平方公式,

得$\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}=\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}=\frac{(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)}{xyz}=\frac{6^2-2\times11}{6}=\frac{7}{3}$.

例 5　若 x,y 为实数,且 $x^2-2xy+3y^2-x+y+\frac{1}{4}=0$,求 x,y 的值.

解:$x^2-2xy+3y^2-x+y+\frac{1}{4}=x^2-(1+2y)x+3y^2+y+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1+2y}{2}\right)^2+2y^2=0$,

解得 $x-\frac{1+2y}{2}=0$ 且 $y=0$,所以 $x=\frac{1}{2},y=0$.

例 6　已知 $a+b+c=0$,求 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$的值.

解:因为 $a+b+c=0$,所以 $a+b=-c,b+c=-a,c+a=-b$,

所以原式$=a\cdot\frac{b+c}{bc}+b\cdot\frac{a+c}{ac}+c\cdot\frac{a+b}{ab}=\frac{a(-a)}{bc}+\frac{b(-b)}{ac}+\frac{c(-c)}{ab}=-\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$　①.

因为 $a^3+b^3=(a+b)[(a+b)^2-3ab]=-c(c^2-3ab)=-c^3+3abc$,

所以 $a^3+b^3+c^3=3abc$　②,

把②代入①得原式$=-\frac{3abc}{abc}=-3$.

说明:$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

例 7 已知 $x+y=m,x^3+y^3=n,m\neq0$,求 x^2+y^2 的值.

解: 因为 $x+y=m$,所以 $m^3=(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)=n+3m\cdot xy$,

所以 $xy=\dfrac{m^3-n}{3m}$,所以 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=m^2-2\left(\dfrac{m^3-n}{3m}\right)=\dfrac{m^2}{3}+\dfrac{2n}{3m}$.

说明:本例的实质是乘法公式(立方和、完全平方公式)的灵活变形.

例 8 若 $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$,求 x^3+3x+2 的值.

解: 根据三次方乘法公式得,

$$\begin{aligned}x^3&=\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^3\\&=2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)\\&=4+3\sqrt[3]{(-1)}\cdot x=4-3x,\end{aligned}$$

即 $x^3+3x=4$,所以 x^3+3x+2 的值为 6.

例 9 设 $x=\sqrt{2}+1$,a 是 x 的小数部分,b 是 $-x$ 的小数部分,求 a^3+b^3+3ab 的值.

解: 因为 $2<\sqrt{2}+1<3$,所以 $a=x-2=\sqrt{2}-1$,

又 $-x=-\sqrt{2}-1$,而 $-3<-\sqrt{2}-1<-2$,

所以 $b=-x-(-3)=2-\sqrt{2}$,所以 $a+b=1$,

所以 $a^3+b^3+3ab=(a+b)(a^2-ab+b^2)+3ab=a^2-ab+b^2+3ab=(a+b)^2=1$.

例 10 已知 a,b,c 为实数,且满足:$a^2+b^2+c^2=1$ ①,

$a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=-3$ ②,

求 $a+b+c$ 的值.

解:方法一 将②式因式分解,变形如下:

$a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{b}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{c}\right)=-3$,

即 $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=0$,

即 $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)=0$,即 $(a+b+c)\left(\dfrac{bc+ac+ab}{abc}\right)=0$,

所以 $a+b+c=0$ 或 $bc+ac+ab=0$.

若 $bc+ac+ab=0$,则 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(bc+ac+ab)=a^2+b^2+c^2=1$,

可得 $a+b+c=\pm1$.所以 $a+b+c$ 的值为 $0,1,-1$.

方法二　将②式变形如下：$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+3=0$，

即$\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+1\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+1\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1\right)=0$，

即$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}=0$，

即$(a+b+c)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)=0$，

即$(a+b+c)\left(\frac{bc+ac+ab}{abc}\right)=0$，

所以 $a+b+c=0$ 或 $bc+ac+ab=0$.

若 $bc+ac+ab=0$，则$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(bc+ac+ab)=a^2+b^2+c^2=1$，

可得 $a+b+c=\pm1$. 所以 $a+b+c$ 的值为 $0,1,-1$.

说明：因为有三个变量与两个方程，所以本例不可能通过求解变量的具体值获得结论，这时需通过灵活变形使问题获解.

实战演练

1. 若 $x^2+\frac{1}{2}mx+k$ 是一个完全平方式，求 k 的值.

2. 计算：

(1)$(x-3y-4z)^2$；　　(2)$(2a+1-b)^2-(a-b)(a+2b)$；

(3)$(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)^3$；　　(4)$(a-4b)\left(\frac{1}{4}a^2+4b^2+ab\right)$.

3. 已知 $a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=2$，求 $ab+bc+ac$ 的值.

4. 若 $3a^2+ab-2b^2=0(a\neq0,b\neq0)$，求$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}-\frac{a^2+b^2}{ab}$的值.

5. 已知 $a=\frac{1}{20}x+20$，$b=\frac{1}{20}x+19$，$c=\frac{1}{20}x+21$，求代数式 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$ 的值.

6. 计算：$(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$.

7. 计算：$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$.

8. 已知实数 a,b,c 满足 $a^2+b^2-4a\leqslant1$，$b^2+c^2-8b\leqslant-3$，$c^2+a^2-12c\leqslant-26$，求$(a+b+c)^2$ 的值.

9. 已知 $x^2-5x+1=0$，求 $x^3+\frac{1}{x^3}$的值.

10. 已知 $x-\frac{1}{x}=3$，求 $x^4+\frac{1}{x^4}$的值.

第 2 讲 因式分解的提升

核心知识

因式分解是代数式的一种重要的恒等变形，在分式运算、解方程及各种恒等变形中起着重要的作用. 因式分解的方法较多，除了初中课本涉及的提取公因式法和公式法外，还有十字相乘法和分组分解法等.

一、十字相乘法

1. $x^2+(p+q)x+pq$ 型

这类式子在许多问题中经常出现，其特点如下：

(1)二次项系数是 1；

(2)常数项是两个数之积；

(3)一次项系数是常数项的两个因数之和.

$x^2+(p+q)x+pq=x^2+px+qx+pq=x(x+p)+q(x+p)=(x+p)(x+q)$，

因此，$x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$.

运用这个公式，可以把某些二次项系数为 1 的二次三项式分解因式.

2. ax^2+bx+c 型

$(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)=a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2$，

反过来，$a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$.

若将二次项系数 a 分解成 a_1，a_2，将常数项 c 分解成 c_1，c_2，把 a_1，a_2，c_1，c_2 写成 $\begin{matrix} a_1 & & c_1 \\ & \times & \\ a_2 & & c_2 \end{matrix}$，这里按斜线交叉相乘，再相加，就得到 $a_1c_2+a_2c_1$，如果它正好等于 ax^2+bx+c 的一次项系数 b，那么 ax^2+bx+c 就可以分解成$(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$，其中 a_1，c_1 位于上一行，a_2，c_2 位于下一行.

这种借助画十字交叉线分解系数，从而将二次三项式分解因式的方法，叫作十字相乘法.

必须注意，分解系数及十字相乘都有多种可能的情况，所以往往要经过多次尝试，才能确定一个二次三项式能否用十字相乘法分解.

二、求根公式法

关于 x 的二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq0)$的因式分解有时也可用求根公式法.

若关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个实数根是 x_1,x_2，则二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq0)$ 就可分解为 $a(x-x_1)(x-x_2)$，其中 $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

三、分组分解法

能够直接运用公式法分解的多项式，主要是二项式和三项式. 而对于四项以上的多项式，如 $ma+mb+na+nb$ 既没有公式可用，也没有公因式可以提取. 因此，可以先将多项式分组处理. 这种利用分组来因式分解的方法叫作分组分解法. 分组分解法的关键在于如何分组.

一般地，把一个多项式因式分解，可以按照下列步骤进行：

(1)如果多项式各项有公因式，那么先提取公因式；

(2)如果各项没有公因式，那么可以尝试运用公式来分解；

(3)如果用上述方法不能分解，那么可以尝试用分组法或其他方法(如十字相乘法)来分解；

(4)分解因式必须进行到每一个多项式都不能再分解因式为止.

四、几个特殊的因式分解

1. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$；

2. $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc=(a+b)(b+c)(c+a)$；

3. $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+3abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)$；

4. $a^2b+b^2c+c^2a-ab^2-bc^2-ca^2=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

典例精析

例 1　分解因式：

(1)x^2-3x+2；　　(2)$x^2+4x-12$；

(3)$x^2-(a+b)xy+aby^2$；　　(4)$xy-1+x-y$.

解：(1)如图 2-1 所示，将二次项 x^2 分解成图中的两个 x 的积，再将常数项 2 分解成 -1 与 -2 的乘积，而图中对角线上的两个数乘积的和为 $-3x$，就是 x^2-3x+2 中的一次项，所以有 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$.

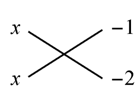

图 2-1

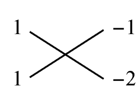

图 2-2

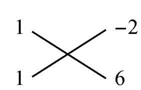

图 2-3

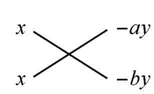

图 2-4

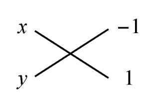

图 2-5

说明：今后在分解与本例类似的二次三项式时，可以直接将图 2-1 中的两个 x 用 1 来表示(如图 2-2 所示).

(2)由图 2-3，得 $x^2+4x-12=(x-2)(x+6)$.

(3)由图 2-4，得 $x^2-(a+b)xy+aby^2=(x-ay)(x-by)$.

(4)$xy-1+x-y=xy+(x-y)-1=(x-1)(y+1)$(如图 2-5 所示).

例 2 把下列关于 x 的二次多项式分解因式：

(1)x^2+2x-1；　(2)$x^2+4xy-4y^2$；　(3)$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$.

解：(1)令 $x^2+2x-1=0$，解得 $x_1=-1+\sqrt{2}$，$x_2=-1-\sqrt{2}$，

原式$=[x-(-1+\sqrt{2})][x-(-1-\sqrt{2})]=(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$.

(2)令 $x^2+4xy-4y^2=0$，解得 $x_1=(-2+2\sqrt{2})y$，$x_2=(-2-2\sqrt{2})y$，

原式$=[x+2(1-\sqrt{2})y][x+2(1+\sqrt{2})y]$.

(3)原式$=(x^2+x-6)(x^2+x-2)=(x+3)(x-2)(x+2)(x-1)$.

例 3 分解因式：

(1)$ab-2a-b+2$；　(2)$8x^3+4x^2-2x-1$；

(3)$x^2-xy-2y^2-2x+7y-3$；　(4)$4a^2-20ab+25b^2-36$；

(5)$x^6-y^6-2x^3+1$；　(6)$x^2(x+1)-y(xy+x)$.

解：(1)原式$=a(b-2)-(b-2)=(b-2)(a-1)$；

(2)原式$=4x^2(2x+1)-(2x+1)=(2x+1)(4x^2-1)=(2x-1)(2x+1)^2$；

(3)原式$=(x-2y)(x+y)-2x+7y-3=(x-2y)(x+y)-(2x-7y)-3$

$=(x-2y+1)(x+y-3)$；

(4)原式$=(2a-5b)^2-6^2=(2a-5b+6)(2a-5b-6)$；

(5)原式$=(x^6-2x^3+1)-y^6=(x^3-1)^2-y^6=(x^3+y^3-1)(x^3-y^3-1)$；

(6)原式$=x^3+x^2-xy^2-xy=(x^3-xy^2)+(x^2-xy)=x(x^2-y^2)+x(x-y)$

$=x(x-y)(x+y+1)$.

例 4 分解因式：

(1)x^3+9+3x^2+3x；　(2)$2x^2+xy-y^2-4x+5y-6$；　(3)x^3-3x^2+4.

解：(1)**方法一**　原式$=(x^3+3x^2)+(3x+9)=x^2(x+3)+3(x+3)=(x+3)(x^2+3)$.

方法二　原式$=(x^3+3x^2+3x+1)+8=(x+1)^3+8=(x+1)^3+2^3$

$=[(x+1)+2][(x+1)^2-(x+1)\times 2+2^2]$

$=(x+3)(x^2+3)$.

(2)**方法一**　原式$=2x^2+(y-4)x-y^2+5y-6$

$=2x^2+(y-4)x-(y-2)(y-3)=(2x-y+2)(x+y-3)$.

方法二　原式$=(2x^2+xy-y^2)-(4x-5y)-6$

$=(2x-y)(x+y)-(4x-5y)-6=(2x-y+2)(x+y-3)$.

(3)原式$=(x^3+1)-(3x^2-3)=(x+1)[(x^2-x+1)-3(x-1)]=(x+1)(x^2-4x+4)$

$=(x+1)(x-2)^2$.

说明：第(3)题是把常数 4 拆成 1 与 3 的和，将多项式分成两组，满足系数对应成比例，创造可以用公式及提取公因式的条件．本题还可以将 $-3x^2$ 拆成 x^2-4x^2，将多项式分成两组：x^3+x^2 和 $-4x^2+4$．

例 5　分解因式：

(1) $(m^2-1)(n^2-1)+4mn$；　　(2) $(x+1)^4+(x^2-1)^2+(x-1)^4$；

(3) x^3-9x+8；　　(4) x^5+x+1．

解：(1)将 $4mn$ 拆成 $2mn+2mn$，

$$\text{原式}=(m^2-1)(n^2-1)+2mn+2mn=m^2n^2-m^2-n^2+1+2mn+2mn$$
$$=(m^2n^2+2mn+1)-(m^2-2mn+n^2)$$
$$=(mn+1)^2-(m-n)^2=(mn+m-n+1)(mn-m+n+1).$$

(2)将 $(x^2-1)^2$ 拆成 $2(x^2-1)^2-(x^2-1)^2$，

$$\text{原式}=(x+1)^4+2(x^2-1)^2-(x^2-1)^2+(x-1)^4$$
$$=[(x+1)^4+2(x+1)^2(x-1)^2+(x-1)^4]-(x^2-1)^2$$
$$=[(x+1)^2+(x-1)^2]^2-(x^2-1)^2=(2x^2+2)^2-(x^2-1)^2=(3x^2+1)(x^2+3).$$

(3)**方法一**　将常数项 8 拆成 $-1+9$，

$$\text{原式}=x^3-9x-1+9=(x^3-1)-9x+9=(x-1)(x^2+x+1)-9(x-1)=(x-1)(x^2+x-8).$$

方法二　将一次项 $-9x$ 拆成 $-x-8x$，

$$\text{原式}=x^3-x-8x+8=(x^3-x)+(-8x+8)=x(x+1)(x-1)-8(x-1)=(x-1)(x^2+x-8).$$

方法三　将三次项 x^3 拆成 $9x^3-8x^3$，

$$\text{原式}=9x^3-8x^3-9x+8=(9x^3-9x)+(-8x^3+8)=9x(x+1)(x-1)-8(x-1)(x^2+x+1)$$
$$=(x-1)(x^2+x-8).$$

方法四　增加两项 $-x^2+x^2$，

$$\text{原式}=x^3-x^2+x^2-9x+8=x^2(x-1)+(x-8)(x-1)=(x-1)(x^2+x-8).$$

(4)通过添项构造我们熟悉的乘法公式，进而实现分解，

$$\text{原式}=x^5-x^2+x^2+x+1=x^2(x^3-1)+x^2+x+1=x^2(x-1)(x^2+x+1)+x^2+x+1$$
$$=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1).$$

说明：由本题可以看出，用拆项、添项的方法分解因式时，要拆哪些项、添什么项并无一定的规律，要依据对题目特点的观察，灵活变换，因此拆项添项法是因式分解的各种方法中技巧性最强的一种．

例 6　分解因式：

(1) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$；

(2)$(x^2+xy+y^2)^2-4xy(x^2+y^2)$.

解:(1)**方法一** 设 $x^2+x=y$,

原式$=(y+1)(y+2)-12=y^2+3y-10=(y-2)(y+5)=(x^2+x-2)(x^2+x+5)$

$=(x-1)(x+2)(x^2+x+5)$.

方法二 设 $x^2+x+1=u$,

原式$=u(u+1)-12=u^2+u-12=(u+4)(u-3)=(x^2+x+5)(x^2+x-2)$

$=(x-1)(x+2)(x^2+x+5)$.

(2)原式$=[(x+y)^2-xy]^2-4xy[(x+y)^2-2xy]$.

令 $x+y=u$,$xy=v$,

原式$=(u^2-v)^2-4v(u^2-2v)=u^4-6u^2v+9v^2=(u^2-3v)^2$

$=(x^2+2xy+y^2-3xy)^2=(x^2-xy+y^2)^2$.

说明:对于二元对称式,要掌握常用的换元技巧.若多项式含有两个字母,且当这两个字母互换位置时,多项式保持不变,这样的多项式叫作二元对称式.对于较难分解的二元对称式,经常令 $u=x+y$,$v=xy$,用换元法分解因式.

例 7 设 n 为正整数,且 n^4-16n^2+100 是质数,求 n 的值.

解:质数只能分解为 1 与其本身,因此可对原式进行适当的因式分解,

$n^4-16n^2+100=n^4+20n^2+100-36n^2=(n^2+6n+10)(n^2-6n+10)$.

因为 $n^2+6n+10=(n+3)^2+1\neq1$,

所以只能 $n^2-6n+10=1$,易得 $n=3$.

例 8 分解因式:$x^3+(2a+1)x^2+(a^2+2a-1)x+a^2-1$.

解:原式中 a 的最高次方低于 x 的最高次方,故不妨将原式整理成关于 a 的二次三项式,以 a 为主元来因式分解.

原式$=(x+1)a^2+(2x^2+2x)a+(x^3+x^2-x-1)$

$=(x+1)a^2+2x(x+1)a+(x+1)^2(x-1)$

$=(x+1)(x^2+2ax+a^2-1)$

$=(x+1)[(x+a)^2-1]$

$=(x+1)(x+a+1)(x+a-1)$.

说明:在多变元问题中,选择其中某个变元为主要元素,视其他变元为常量,将原式整理成以此字母为主元的多项式,有时能使原问题豁然开朗.

例 9 设 a,b,c 满足 $a+b+c=a^3+b^3+c^3=0$,n 为任意自然数,试求 $a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}$的值.

解:由 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$,得 $3abc=a^3+b^3+c^3=0$,

不妨设 $a=0$,则 $b+c=0$,

所以 $a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}=0+b^{2n+1}+(-b)^{2n+1}=0$.