

高考仿真重难点训练 05 三角函数图像变换 求参数问题

一、选择题

1. 将函数 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象向左平移 m ($m > 0$) 个单位, 所得图象关于原点对称, 则 m 的值可以是 ().

A. $\frac{\pi}{3}$

B. π

C. $\frac{4\pi}{3}$

D. $\frac{5\pi}{3}$

【答案】D

【分析】先求平移后图象的解析式, 然后根据正弦函数的对称性可得.

【解析】将函数 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象向左平移 m 个单位,

得 $y = 2\sin\left(2\left(x+m\right) - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(2x + 2m - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象,

因为 $y = 2\sin\left(2x + 2m - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象关于原点对称,

所以 $2m - \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $m = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

当 $k=3$ 时, 得 $m = \frac{5\pi}{3}$,

使 $m = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$, $m = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} = \pi$, $m = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} = \frac{4\pi}{3}$ 的整数 k 不存在.

故选: D

2. 将函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数 $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right)$ 的图象, 则 φ 的值为 ().

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{2\pi}{3}$

【答案】B

【分析】先根据平移求出平移后的函数解析式, 利用函数相等可求答案.

【解析】将 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到的解析式为 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3} + \varphi\right)$,

由题意 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3} + \varphi\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right)$,

所以 $\varphi - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

故选：B.

3. 设函数 $f(x) = a\cos\omega x (a \neq 0, \omega > 0)$ ，若将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3\omega}$ 个单位长度后在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有且仅有两个零点，则 ω 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right)$ B. $[2, 4)$ C. $\left[\frac{7}{3}, 4\right)$ D. $\left[2, \frac{13}{3}\right)$

【答案】A

【分析】由平移变换法则得 $g(x) = a\cos\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，由题意 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有且仅有两个零点，由此可列出关于 ω 的不等式组，解出不等式组即可得解.

【解析】将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3\omega}$ 个单位长度后的图象所对应的函数表达式为

$$g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{3\omega}\right) = a\cos\left[\omega\left(x + \frac{\pi}{3\omega}\right)\right] = a\cos\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right),$$

注意到 $\omega > 0$ ，则当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时， $\omega x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{3}\right]$ ，

由题意 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有且仅有两个零点，

这意味着 $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{3}\right], \frac{5\pi}{2} \notin \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{3}\right]$ ，且显然 $\frac{5\pi}{2} > \frac{\pi}{3}$ ，

也就是说 $\begin{cases} \frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{3} \geq \frac{3\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{2} \end{cases}$ ，解得 $\frac{7}{3} \leq \omega < \frac{13}{3}$.

故选：A.

4. 函数 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi) \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ 的图像关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 中心对称，将函数 $f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图像，则函数 $g(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 内的零点个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】D

【分析】正弦函数的图像与性质、三角函数图像的平移变换

【解析】Q 函数 $f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 中心对称， $\therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = 0$ ， $\therefore \frac{2\pi}{3} + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ，

又 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ， $\therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$ ，则 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

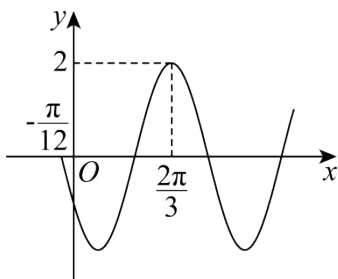
将函数 $f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到函数 $g(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像，

令 $2x - \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ，得 $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ ， $\therefore$ 函数 $g(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 内的零点有 $x = -\frac{5\pi}{6}, x = -\frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{2\pi}{3}$

, 共 4 个.

故选: D.

5. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$) 的部分图象如图所示, 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 若 $g(x)$ 在区间 $[0, t]$ 上的值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$, 则 t 的取值范围为 ()



A. $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}\right]$

B. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$

C. $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}\right]$

D. $\left[\frac{5\pi}{12}, \pi\right]$

【答案】C

【分析】先由图象求出函数 $f(x)$, 再由平移变换得函数 $g(x)$, 结合整体法求值域, 从而求 t 的取值范围.

【解析】设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 由图象可知 $A = 2, \frac{3}{4}T = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$,

所以 $T = \pi$, 则 $\omega = 2$, 故 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$,

又 $f(x)$ 的图象过点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 2\right)$, 所以 $2 \times \frac{2\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

所以 $\varphi = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 又 $|\varphi| < \pi$, 所以 $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$,

则 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$,

则 $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{5\pi}{6}\right) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

当 $x \in [0, t]$ 时, $2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, 2t - \frac{\pi}{3}\right]$,

当 $2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3}$ 时, 即 $x = 0$ 或 $x = \frac{5\pi}{6}$ 时, $g(x) = -\sqrt{3}$,

当 $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ 时, 即 $x = \frac{5\pi}{12}$ 时, $g(x) = 2$,

所以 t 的取值范围为 $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

故选: C.

6. 设函数 $f(x)$ 的图象与函数 $y = 2\cos\pi x \left(x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right)$ 的图象关于 x 轴对称, 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{1}{2}$

个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，则函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 的图象与 $y = g(x)$ 的图象的所有交点的横坐标之和为 ()

- A. 8 B. 6 C. 4 D. 2

【答案】C

【分析】利用轴对称求得函数 $f(x)$ ，利用三角函数平移变换得到函数 $g(x)$ ，再利用函数的对称中心计算得到结果.

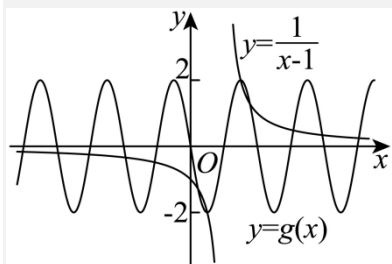
【解析】由题意得 $f(x) = -2\cos\pi x \left(x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right] \right)$ ，则 $g(x) = -2\cos\left[\pi\left(x - \frac{1}{2}\right) \right] = -2\sin\pi x \left(x \in [0, 2] \right)$.

函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 的图象由函数 $y = \frac{1}{x}$ 图形向右平移 1 个单位得到.

由函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 的图象与 $y = g(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称，在定义域内有 4 个交点.

所以函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 的图象与 $y = g(x)$ 的图象的所有交点的横坐标之和为 $2 \times 2 = 4$

故选：C.



7. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$)，将 $f(x)$ 图象上所有的点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变) 得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{12}\right)$ 上恰有一个极值点，则 ω 的取值不可能是 ()

- A. 1 B. 3 C. 5 D. 7

【答案】A

【分析】利用三角恒等变换得到 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，结合伸缩变换得到 $g(x) = 2\sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$, $\omega > 0$ ，整体法得到 $2\omega x + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\omega\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$ ，根据极值点个数得到不等式，求出 $1 < \omega \leq 7$ ，得到答案.

【解析】因为 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\sin\omega x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x + \frac{1}{2}\sin\omega x$
 $= \sin\omega x + \sqrt{3}\cos\omega x = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$,

又将 $f(x)$ 图象上所有的点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变) 得到函数 $g(x)$ 的图象，

所以 $g(x) = 2\sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{3}\right), \omega > 0$.

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{12}\right)$ 时, $2\omega x + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\omega\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$,

又因为 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{12}\right)$ 上恰有一个极值点,

所以 $\frac{\pi}{2} < \frac{\omega\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2}$, 解得 $1 < \omega \leq 7$.

故选: A.

8. 将函数 $f(x) = 2\cos 2x$ 的图象向右平移个 $\frac{\pi}{6}$ 单位后得到函数 $g(x)$ 的图象, 若函数 $g(x)$ 在区间 $[0, \frac{a}{3}]$ 和

$[2a, \frac{7\pi}{6}]$ 上均单调递增, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$

B. $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$

C. $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

D. $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}]$

【答案】A

【分析】根据函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像变换规律推得 $g(x)$ 的解析式, 再根据三角函数的性质求出函数的单调增区间, 再结合函数 $g(x)$ 在区间 $[0, \frac{a}{3}]$ 和 $[2a, \frac{7\pi}{6}]$ 上均单调递增, 列出关于 a 的不等式组进行求解即可.

【解析】根据题意, 将函数 $f(x) = 2\cos 2x$ 的图象向右平移个 $\frac{\pi}{6}$ 单位后得到函数 $g(x)$ 的图象, 则

$$g(x) = 2\cos 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

根据函数 $g(x)$ 的单调增区间满足 $-\pi + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$, 解得 $-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

当 $k=0$ 时, 函数的增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$, 当 $k=1$ 时, 函数的增区间为 $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right]$.

若满足函数 $g(x)$ 在区间 $[0, \frac{a}{3}]$ 和 $[2a, \frac{7\pi}{6}]$ 上均单调递增, 则

$$\begin{cases} 0 < \frac{a}{3} \leq \frac{\pi}{6} \\ \frac{2\pi}{3} \leq 2a < \frac{7\pi}{6} \end{cases}, \text{ 解得 } a \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right].$$

故选: A.

【点睛】本题主要考查函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像变换规律以及根据三角函数的单调性求参数范围.

二、多选题

9. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) (\omega > 0)$ 且对于 $\forall x \in \mathbb{R}$ 都有 $f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 成立. 现将函数

$f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$

个单位长度，再把所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变）得到函数 $g(x)$ 的图象，则下列说法正确的是（ ）

A. 函数 $g\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+g\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$

B. 函数 $g(x)$ 相邻的对称轴距离为 π

C. 函数 $g\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$ 是偶函数

D. 函数 $g(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增

【答案】 ABCD

【解析】先利用已知条件求出 $f(x)$ 的周期 $T=\pi$ ，即可得 $\omega=2$ ，再利三角函数图象的平移伸缩变换得 $g(x)$ 的解析式，在逐一判断四个选项的正误即可得正确选项.

【解析】因为对于 $\forall x \in \mathbb{R}$ 都有 $f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 成立

所以 $f(x)=-f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-f(x+\pi)$,

所以 $f(x)=-(-f(x+\pi))=f(x+\pi)$ 对于 $\forall x \in \mathbb{R}$ 都成立,

可得 $f(x)$ 的周期 $T=\pi$, 所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$,

所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,

将函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 可得

$y=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 再把所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍可得 $g(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$,

对于选项 A:

$g\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+g\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-x-\frac{\pi}{6}\right)+2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin(-x)+2\sin x=0$,

故选项 A 正确;

对于选项 B: 函数 $g(x)$ 周期为 $T=\frac{2\pi}{1}=2\pi$, 所以相邻的对称轴距离为 $\frac{T}{2}=\pi$, 故选项 B 正确;

对于选项 C: $g\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos x$ 是偶函数, 故选项 C 正确;

对于选项 D: 当 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$, $0 \leq x-\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}$, 所以函数 $g(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增, 故选项 D 正确,

故选: ABCD

【点睛】关键点点睛: 本题解题的关键点是由 $f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ 恒成立得出

$f(x)=f(x+\pi)$ 可得 ω 的值, 求出 $f(x)$ 的解析式.

10. 函数 $f(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ ，都有 $2f(x) - 3f(-x) = 5\sin 2x + \cos 2x$ ，则关于函数 $g(x) = f(x) + 1$

的命题正确的是 ()

- A. 函数 $g(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递增
- B. 直线 $x = -\frac{\pi}{8}$ 是函数 $g(x)$ 图像的一条对称轴
- C. 点 $\left(\frac{5\pi}{8}, 0\right)$ 是函数 $g(x)$ 图像的一个对称中心
- D. 将函数 $g(x)$ 图像向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位, 可得到 $y = 1 - \sqrt{2}\cos 2x$ 的图像

【答案】BD

【分析】对于题干条件, 用 $-x$ 替代 x 得到新的方程, 联立先算出 $f(x)$ 表达式, 从而得出 $g(x)$ 的表达式, 然后根据正弦函数的性质逐一判断每个选项.

【解析】由 $2f(x) - 3f(-x) = 5\sin 2x + \cos 2x$, 用 $-x$ 替代 x 得到

$$2f(-x) - 3f(x) = 5\sin(-2x) + \cos(-2x) = \cos 2x - 5\sin 2x,$$

$$\text{联立上述两式得到, } f(x) = \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{则 } g(x) = f(x) + 1 = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1.$$

A 选项, $x \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ 时, $2x - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{13\pi}{12}\right)$, 根据正弦函数的单调性,

$y = \sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上递增, 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{12}\right)$ 上递减,

根据复合函数的单调性可知 $g(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ 上先递增后递减, A 选项错误;

B 选项, $x = -\frac{\pi}{8}$ 时, $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$, 取到了最小值,

故 $x = -\frac{\pi}{8}$ 是函数 $g(x)$ 图像的一条对称轴, B 选项正确;

C 选项, $x = \frac{5\pi}{8}$ 时, $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, 则 $\left(\frac{5\pi}{8}, 0\right)$ 是 $y = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的对称中心,

故 $\left(\frac{5\pi}{8}, 1\right)$ 是函数 $g(x)$ 图像的一个对称中心, C 选项错误;

D 选项, 函数 $g(x)$ 图像向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位, 得到

$$g\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 1 - \sqrt{2} \cos 2x, \text{ D 选项正确.}$$

故选: BD

11. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调, 且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, 当 $x = \frac{\pi}{12}$

时, $f(x)$ 取到最大值 4, 若将函数 $f(x)$ 的图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍得到函数 $g(x)$ 的图象, 则下列说法正确的是 ()

A. $\omega = 2$

B. 点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称中心

C. $g(x)$ 是区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上的增函数

D. 函数 $y = g(x) - \sqrt{x + \frac{\pi}{3}}$ 的零点个数为 7

【答案】 ABCD

【分析】 根据单调性求得 $0 < \omega \leq 3$, 再由已知得出对称轴和对称中心求出周期, 代入最值即可求出解析式, 数形结合可判断零点.

【解析】 因为 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调, 所以 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{T}{2}$, $\frac{T}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega}$, 解得 $0 < \omega \leq 3$,

$$\text{又 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -f\left(\frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{所以 } x = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{7\pi}{12} \text{ 为对称轴, 且 } \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\pi}{3}, \text{ 则 } \left(\frac{\pi}{3}, 0\right) \text{ 为一个对称中心, 故 B 正确;}$$

$$\text{由于 } 0 < \omega \leq 3, \text{ 所以 } x = \frac{7\pi}{12} \text{ 与 } \left(\frac{\pi}{3}, 0\right) \text{ 为同一周期内相邻的对称轴和对称中心,}$$

$$\text{则 } T = 4\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) = \pi, \text{ 所以 } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2, \text{ 故 A 正确,}$$

因为 $f(x)$ 的最大值为 4, 所以 $A = 4$,

$$\text{则 } f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 4\sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 4, \text{ 则 } \varphi + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 即 } \varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 取 } \varphi = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{则 } g(x) = 4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$$

当 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时, $x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, 根据正弦函数的单调性可得 $g(x)$ 是区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上的增函数, 故 C 正确;

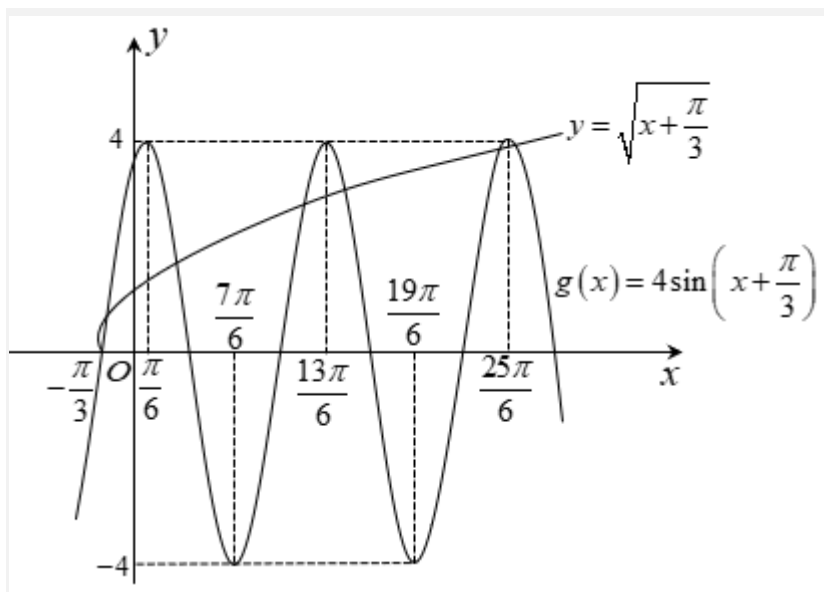
$$\text{因为 } g(x) = 4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ 在 } \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right) \text{ 处的切线斜率为 } g'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 4\cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 4,$$

$$y = \sqrt{x + \frac{\pi}{3}} \text{ 在 } \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right) \text{ 处切线斜率不存在, 即切线方程为 } x = -\frac{\pi}{3},$$

所以 $x = -\frac{\pi}{3}$ 右侧 $g(x)$ 图象较缓, 如图所示,

同时 $\sqrt{x + \frac{\pi}{3}} > 4$ 时, $x > 16 - \frac{\pi}{3}$, 所以函数 $y = g(x) - \sqrt{x + \frac{\pi}{3}}$ 的零点有 7 个, 故 D 正确.

故选: ABCD.



三、填空题

12. 设 $a > 0$ ，已知函数 $f(x) = \ln(x^2 + ax + 2)$ 的两个不同的零点 x_1 、 x_2 ，满足 $|x_1 - x_2| = 1$ ，若将该函数图像向右平移 $m(m > 0)$ 个单位后得到一个偶函数的图像，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\frac{5}{2}$

【分析】 根据 $|x_1 - x_2| = 1$ 可求 a ，再求出平移后图像对应的解析式，根据其偶函数可求参数的值。

【解析】 令 $f(x) = 0$ ，故 $\ln(x^2 + ax + 2) = 0$ 即 $x^2 + ax + 2 = 1$ ，

故 $x^2 + ax + 1 = 0$ ，由题设有 $\begin{cases} a - 4 > 0 \\ \frac{\sqrt{a-4}}{1} = 1 \end{cases}$ ，故 $a = 5$ 。

故 $f(x) = \ln(x^2 + 5x + 2)$ ，

将 $f(x)$ 图像向右平移 $m(m > 0)$ 个单位后所得图像对应的解析式为：

$$g(x) = \ln[(x-m)^2 + 5(x-m) + 2],$$

整理得到： $g(x) = \ln[x^2 + (5-2m)x + m^2 - 5m + 2]$ ，

因为 $g(x)$ 为偶函数，故 $g(-x) = g(x)$ ，

所以 $x^2 + (5-2m)x + m^2 - 5m + 2 = x^2 - (5-2m)x + m^2 - 5m + 2$ ，

故 $(5-2m)x = -(5-2m)x$ 对无穷多个 x 恒成立，故 $5-2m = 0$ ，

故 $m = \frac{5}{2}$.

故答案为: $\frac{5}{2}$

13. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$), $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{3}{2}$ 为 $f(x)$ 的两个相邻零点, 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则函数 $y = f(x)g(x) + f(x) + g(x)$ 的值域为_____.

【答案】 $\left[-1, \frac{1}{2} + \sqrt{2}\right]$

【分析】 根据两个相邻零点求函数的周期得出 ω , 即求出 $f(x)$, 根据平移变换求出 $g(x)$, 令 $\cos \pi x + \sin \pi x = t$, 结合二次函数求值域得出结果.

【解析】 由题意知 $f(x)$ 的最小正周期 $T = 2\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$, 又 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 所以 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = 0$, 所以 $\frac{\pi}{2} + \varphi = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 即 $\varphi = -\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 又 $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{2}$, 所以 $f(x) = \cos \pi x$,

所以 $g(x) = f\left(x - \frac{1}{2}\right) = \sin \pi x$,

故 $y = \cos \pi x \sin \pi x + \cos \pi x + \sin \pi x$.

令 $t = \cos \pi x + \sin \pi x = \sqrt{2} \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$, 则 $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, 且 $\cos \pi x \sin \pi x = \frac{t^2 - 1}{2}$,

所以 $y = \frac{t^2 - 1}{2} + t = \frac{1}{2}(t + 1)^2 - 1$,

当 $t = -1$ 时, $y_{\min} = -1$; 当 $t = \sqrt{2}$ 时, $y_{\max} = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$,

所以所求函数的值域为 $\left[-1, \frac{1}{2} + \sqrt{2}\right]$.

故答案为: $\left[-1, \frac{1}{2} + \sqrt{2}\right]$.

14. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 相邻两零点的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, 将 $f(x)$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 再将所得图象上的所有点保持纵坐标不变, 横坐标伸长为原来的 2 倍后得到函数 $g(x)$ 的图象. 若存在非负实数 a 使得, $F(x) = f(x) + ag(x)$ 在 $(0, n\pi)$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 内恰好有 8 个零点, 则所有符合条件的 n 值组成的集合为_____.

【答案】 $\{4, 5, 7, 8\}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/777004015015010050>