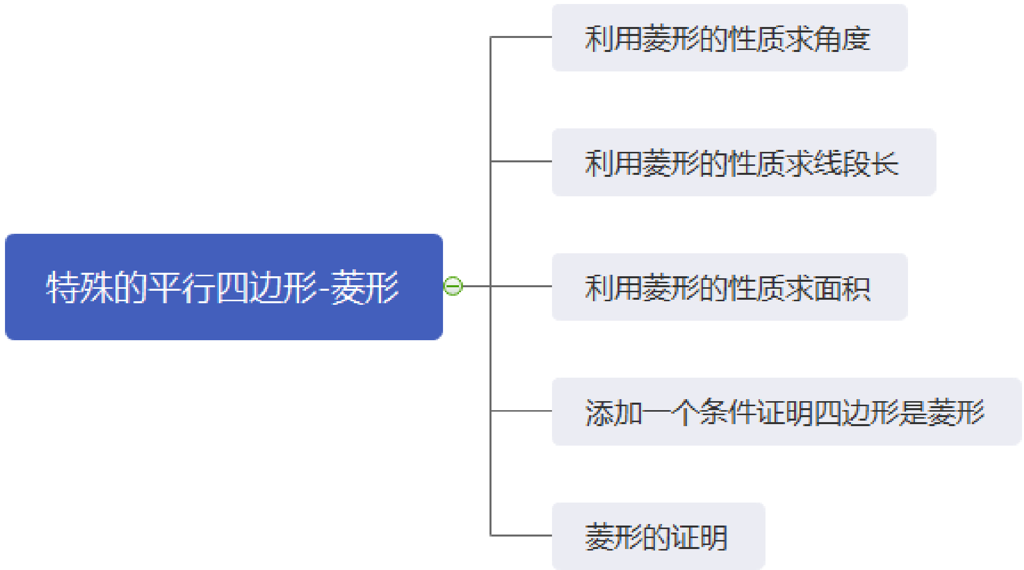
专题25 特殊的平行四边形-菱形

【考查题型】



【知识要点】

菱形的定义：有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形。

菱形的性质：

1）具有平行四边形的所有性质；

2）四条边都相等；

3）两条对角线互相垂直，且每条对角线平分一组对角。

4）菱形既是中心对称图形又是轴对称图形，菱形的对称中心是菱形对角线的交点，菱形的对称轴是菱形对角线所在的直线，菱形的对称轴过菱形的对称中心。

菱形的判定：

1）对角线互相垂直的平行四边形是菱形。

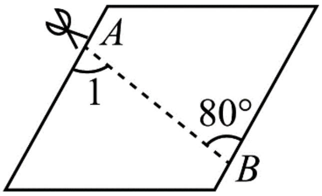
2）四条边相等的四边形是菱形。

3）一组邻边相等的平行四边形是菱形。

菱形的面积公式：菱形ABCD的对角线是AC、BD，则菱形的面积公式是：S＝底×高，S＝$\frac{1}{2}\times AC\times BD$

考查题型一　利用菱形的性质求角度

典例1．（2022·贵州贵阳·统考中考真题）如图，将菱形纸片沿着线段AB剪成两个全等的图形，则$\angle 1$的度数是（　）



A．40°　　　　B．60°　　　　C．80°　　　　D．100°

【答案】C

【分析】根据两直线平行，内错角相等可得出答案.

【详解】解：∵纸片是菱形

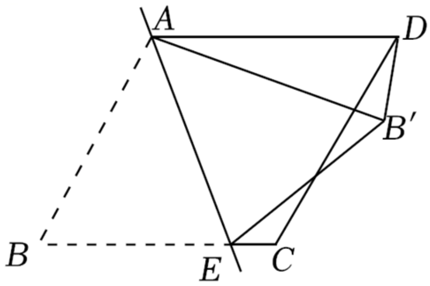
∴对边平行且相等

∴$\angle 1=80°$（两直线平行，内错角相等）

故选：C.

【点睛】本题考查了菱形的性质，解题的关键是要知道两直线平行，内错角相等.

变式 1-1．（2022·西藏·统考中考真题）如图，在菱形纸片 $ABCD$ 中，E 是 BC 边上一点，将$\triangle ABE$ 沿直线 AE 翻折，使点 B 落在 B' 上，连接 DB'．已知$\angle C=120°$，$\angle BAE=50°$，则 $\angle ADB'$ 的度数为（　　）



A．50°　　　　B．60°　　　　C．80°　　　　D．90°

【答案】C

【分析】由翻折的性质知$\angle BAE=\angle B'AE=50°$，$AB'=AB$，再由菱形的性质得$\angle BAD=120°$，$AB'=AD$，最后利用三角形内角和定理可得答案.

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle C=120°$，

∴$\angle BAD=\angle C=120°$，$AB=AD$，

∵将$\triangle ABE$ 沿直线 AE 翻折，使点 B 落在 B' 上，

∴$\angle BAE=\angle B'AE=50°$，$AB'=AB$，

∴$\angle BAB'=100°$，$AB'=AD$，

∴$\angle DAB'=20°$，

∴$\angle AB'D=\angle ADB'=$（180°-20°）÷2=80°，

故选：C.

【点睛】本题主要考查了菱形的性质，翻折的性质，三角形内角和定理等知识，求出$\angle DAB'=20°$是解题的关键．

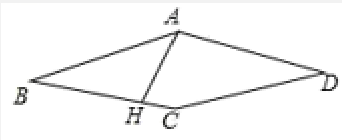
变式 1-2．（2020·湖北黄冈·中考真题）若菱形的周长为 16，高为 2，则菱形两邻角的度数之比为（　）

A． 4: 1　　　　B． 5: 1　　　　C． 6: 1　　　　D． 7: 1

【答案】B

【分析】如图，AH 为菱形 ABCD 的高，AH＝2，利用菱形的性质得到 AB＝4，利用正弦的定义得到∠B＝30°，则∠C＝150°，从而得到∠C：∠B 的比值．

【详解】解：如图，AH 为菱形 ABCD 的高，AH＝2，



∵菱形的周长为 16，

∴AB＝4，

在 Rt△ABH 中，$\sin B=\frac{AH}{AB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，

∴∠B＝30°，

∵AB∥CD，

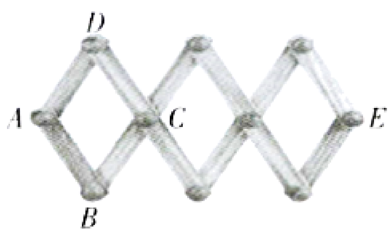
∴∠C＝150°，

∴∠C：∠B＝5：1．

故选：B．

【点睛】本题考查了菱形的性质：菱形具有平行四边形的一切性质；菱形的四条边都相等；菱形的两条对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角．也考查了正弦的定义及应用．

变式 1-3．（2020·甘肃金昌·统考中考真题）如图所示的木制活动衣帽架是由三个全等的菱形构成，根据实际需要可以调节 AE 间的距离，若 AE 间的距离调节到 $60cm$，菱形的边长 $AB=20cm$，则 $\angle DAB$ 的度数是（　）



A． 90°　　　　B． 100°　　　　C． 120°　　　　D． 150°

【答案】C

【分析】如图(见解析),先根据菱形的性质可得 $AB=BC, AD//BC$,再根据全等的性质可得 $AC=\frac{1}{3}AE=20cm$,然后根据等边三角形的判定与性质可得 $\angle B$=60°，最后根据平行线的性质即可得.

【详解】如图，连接 AC

$\because$ 四边形 ABCD 是菱形

$\therefore AB=BC=20cm, AD//BC$

$\because$ 如图所示的木制活动衣帽架是由三个全等的菱形构成， $AE=60cm$

$\therefore AC=\frac{1}{3}AE=20cm$

$\therefore AB=BC=AC$

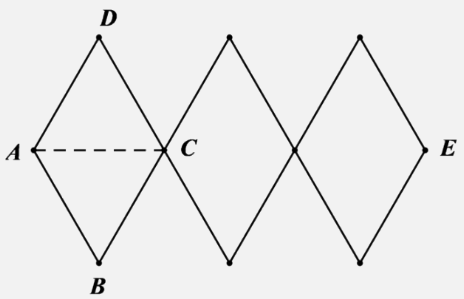
$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形

$\therefore \angle B=60^\circ$

$\because AD//BC$

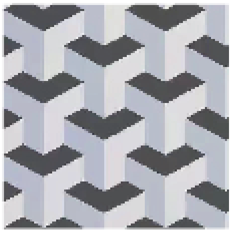
$\therefore \angle DAB=180^\circ-\angle B=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

故选：C.

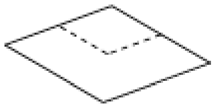


【点睛】本题考查了菱形的性质、等边三角形的判定与性质、平行线的性质等知识点，理解题意，熟练掌握菱形的性质是解题关键.

变式 1-4．（2022·山东青岛·统考中考真题）图①是艺术家埃舍尔的作品，他将数学与绘画完美结合，在平面上创造出立体效果．图②是一个菱形，将图②截去一个边长为原来一半的菱形得到图③，用图③镶嵌得到图④，将图④着色后，再次镶嵌便得到图①，则图④中 $\angle ABC$ 的度数是__________°.

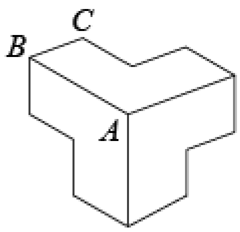


(图①)



(图②)

(图③)



(图④)

【答案】60

【分析】先确定$\angle BAD$的度数，再利用菱形的对边平行，利用平行线的性质即可求出$\angle ABC$的度数.

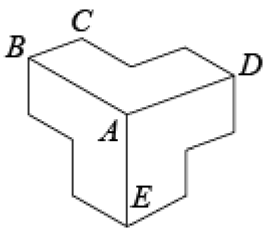
【详解】如图，$\because \angle BAD=\angle BAE=\angle DAE$，$\angle BAD+\angle BAE+\angle DAE=360°$，

$\therefore \angle BAD=\angle BAE=\angle DAE=120°$，

$\because BC\parallel AD$，

$\therefore \angle ABC=180°-120°=60°$，

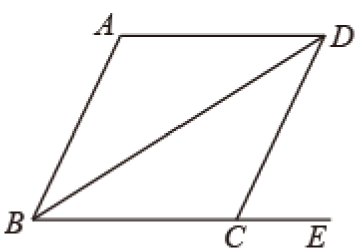
故答案为：60.



(图④)

【点睛】本题考查了菱形的性质与学生读题审题的能力，解题关键是理解题意，求出$\angle BAD$的度数.

变式 1-5.（2021·贵州黔东南·统考中考真题）如图，BD是菱形$ABCD$的一条对角线，点E在BC的延长线上，若$\angle ADB=32°$，则$\angle DCE$的度数为_________度.



【答案】64

【分析】根据菱形的性质可以求得$\angle CDB$和$\angle DBC$，再应用三角形外角的性质即可求解.

【详解】解：$\because BD$是菱形$ABCD$的一条对角线，$\angle ADB=32°$，

$\therefore \angle CDB=\angle ADB=32°$，$AD//BC$，

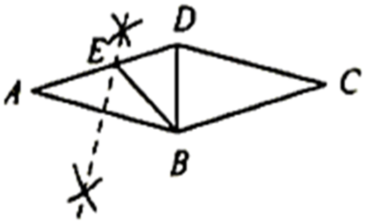
$\therefore \angle DBC = \angle ADB = 32°$，

$\therefore \angle DCE = \angle DBC + \angle CDB = 32° + 32° = 64°$．

故答案为：64．

【点睛】本题考查菱形的性质和三角形外角的性质，熟练掌握以上知识点是解题关键．

变式 1-6．（2020·广东·统考中考真题）如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle A = 30°$，取大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径，分别以点 A，B 为圆心作弧相交于两点，过此两点的直线交 AD 边于点 E（作图痕迹如图所示），连接 BE，BD，则 $\angle EBD$ 的度数为_________．



【答案】45°

【分析】根据题意知虚线为线段 AB 的垂直平分线，得 AE=BE，得 $\angle EBA = \angle EAB$；结合 $\angle A = 30°$，$ABD = \frac{1}{2}\angle ABC = 75°$，可计算 $\angle EBD$ 的度数．

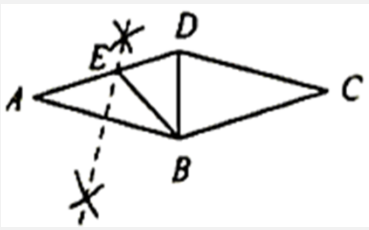
【详解】$\angle ABC = 180° - 30° = 150°$

$ABD = \frac{1}{2}\angle ABC = 75°$

$\because AE = EB$

$\therefore \angle EAB = \angle EBA$

$\therefore \angle EBD = 75° - 30° = 45°$

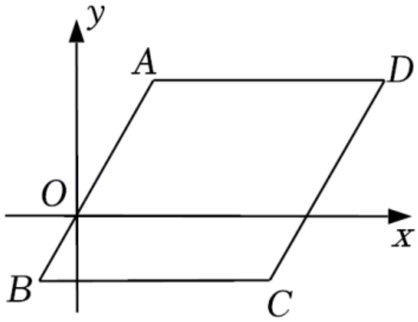


故答案为：45°．

【点睛】本题考查了菱形的性质，及垂直平分线的性质，熟知以上知识点是解题的关键．

考查题型二 利用菱形的性质求线段长

典例 2．（2022·辽宁盘锦·中考真题）如图，平面直角坐标系 xOy 中，四边形 $ABCD$ 是菱形，A，B 两点的坐标分别是（2，$2\sqrt{3}$），（﹣1，﹣$\sqrt{3}$），点 D 在第一象限，且 $AD \parallel x$ 轴，则点 D 的坐标是（　　）



A．（6，$2\sqrt{3}$）　　B．（8，$2\sqrt{3}$）　　C．（6，$\sqrt{3}$）　　D．（8，$\sqrt{3}$）

【答案】B

【分析】由 A，B 两点的坐标可得 AB 的长，即 AD 的长，进而可得点 D 的横坐标，点 D 的纵坐标则与点 A 的纵坐标相等，可得点 D 的坐标．

【详解】解：∵A，B 两点的坐标分别是（2，$2\sqrt{3}$），（－1，－$\sqrt{3}$），

∴$AB=\sqrt{(2+1)^2+(2\sqrt{3}+\sqrt{3})^2}=6$，

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$AD=AB=6$，

∴点 D 的横坐标为 2+6＝8，

∵$AD\parallel x$ 轴，

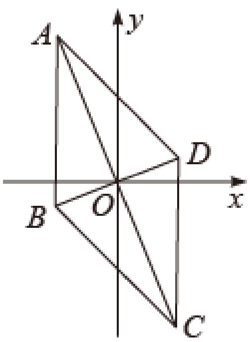
∴点 D 的纵坐标与点 A 的纵坐标相等，为 $2\sqrt{3}$，

故点 D 的坐标是（8，$2\sqrt{3}$）．

故选：B．

【点睛】本题主要考查菱形的性质，坐标与图形的性质，关键是能够熟练求解坐标与图形的结合问题．

变式 2-1．（2022·四川自贡·统考中考真题）如图，菱形 $ABCD$ 对角线交点与坐标原点 O 重合，点 $A(-2,5)$，则点 C 的坐标为（　）



A．$(5,-2)$　　B．$(2,-5)$　　C．$(2,5)$　　D．$(-2,-5)$

【答案】B

【分析】根据菱形的中心对称性，*A*、*C* 坐标关于原点对称，利用横反纵也反的口诀求解即可．

【详解】∵菱形是中心对称图形，且对称中心为原点，

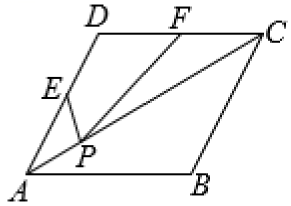
∴*A*、*C* 坐标关于原点对称，

∴*C* 的坐标为$\left(2,-5\right)$，

故选 C．

【点睛】本题考查了菱形的中心对称性质，原点对称，熟练掌握菱形的性质，关于原点对称点的坐标特点是解题的关键．

变式 2-2．(2022·四川广安·统考中考真题）如图，菱形 *ABCD* 的边长为 2，点 *P* 是对角线 *AC* 上的一个动点，点 *E*、*F* 分别为边 *AD*、*DC* 的中点，则 $PE+PF$ 的最小值是（　　）

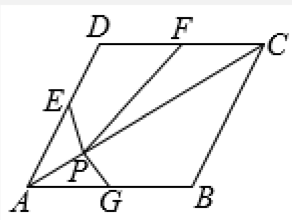


A．2　　B．$\sqrt{3}$　　C．1.5　　D．$\sqrt{5}$

【答案】A

【分析】取 *AB* 中点 *G* 点，根据菱形的性质可知 *E* 点、*G* 点关于对角线 *AC* 对称，即有 *PE=PG*，则当 *G*、*P*、*F* 三点共线时，*PE+PF=PG+PF* 最小，再证明四边形 *AGFD* 是平行四边形，即可求得 *FG=AD*．

【详解】解：取 *AB* 中点 *G* 点，连接 *PG*，如图，



∵四边形 *ABCD* 是菱形，且边长为 2，

∴*AD=DC=AB=BC*=2，

∵*E* 点、*G* 点分别为 *AD*、*AB* 的中点，

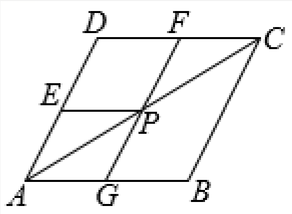
∴根据菱形的性质可知点 *E*、点 *G* 关于对角线 *AC* 轴对称，

∴*PE=PG*，

∴*PE+PF=PG+PF*，

即可知当 *G*、*P*、*F* 三点共线时，*PE+PF=PG+PF* 最小，且为线段 *FG*，

如下图，G、P、F 三点共线，连接 FG，



∵F 点是 DC 中点，G 点为 AB 中点，

$\therefore DF=\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}AB=AG$，

∵在菱形 $ABCD$ 中，$DC // AB$，

$\therefore DF // AG$，

∴四边形 $AGFD$ 是平行四边形，

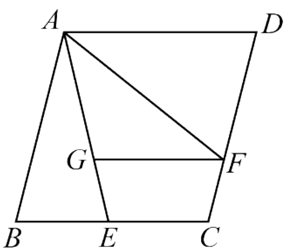
∴$FG=AD=2$，

故 $PE+PF$ 的最小值为 2，

故选：A．

【点睛】本题考查了菱形的性质、轴对称的性质、平行四边形的判定与性质等知识，找到 E 点关于 AC 的对称点是解答本题的关键．

变式 2-3．2022·浙江丽水·统考中考真题）如图，已知菱形 $ABCD$ 的边长为 4，E 是 BC 的中点，AF 平分 $\angle EAD$ 交 CD 于点 F，$FG // AD$ 交 AE 于点 G，若 $\cos B=\frac{1}{4}$，则 FG 的长是（　）

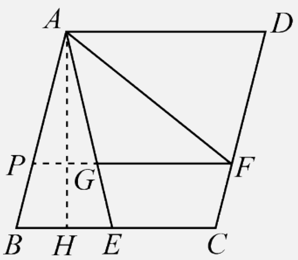


A．3　　B．$\frac{8}{3}$　　C．$\frac{2\sqrt{15}}{3}$　　D．$\frac{5}{2}$

【答案】B

【分析】过点 A 作 AH 垂直 BC 于点 H，延长 FG 交 AB 于点 P，由题干所给条件可知，$AG=FG$，$EG=GP$，利用$\angle AGP=\angle B$ 可得到 $\cos\angle AGP=\frac{1}{4}$，即可得到 FG 的长；

【详解】过点 A 作 AH 垂直 BC 于点 H，延长 FG 交 AB 于点 P，



由题意可知，$AB=BC=4$，E 是 BC 的中点，

$\therefore BE=2$，

又$\because \cos B=\frac{1}{4}$，

$\therefore BH=1$，即 H 是 BE 的中点，

$\therefore AB=AE=4$，

又$\because AF$ 是$\angle DAE$ 的角平分线，$FG \parallel AD$，

$\therefore \angle FAG=\angle AFG$，即 $AG=FG$，

又$\because PF \parallel AD$，$AP \parallel DF$，

$\therefore PF=AD=4$，

设 $FG=x$，则 $AG=x$，$EG=PG=4-x$，

$\because PF \parallel BC$，

$\therefore \angle AGP=\angle AEB=\angle B$，

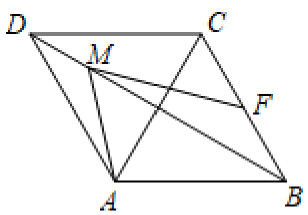
$\therefore \cos\angle AGP=\frac{\frac{1}{2}PG}{AG}=\frac{2-\frac{x}{2}}{x}=\frac{1}{4}$，

解得 $x=\frac{8}{3}$；

故选 B．

【点睛】本题考查菱形的性质、角平分线的性质、平行线的性质和解直角三角形，熟练掌握角平分线的性质和解直角三角形的方法是解决本题的关键．

变式 2-4．（2022·山东菏泽·统考中考真题）如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=2, \angle ABC=60^{\circ}$，$M$ 是对角线 BD 上的一个动点，$CF=BF$，则 $MA+MF$ 的最小值为（　）

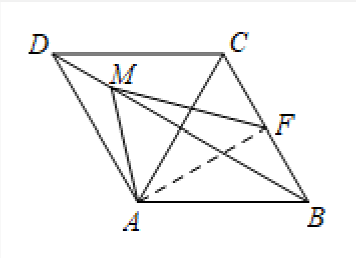


A．1　　　　　　B．$\sqrt{2}$　　　　　　C．$\sqrt{3}$　　　　　　D．2

【答案】C

【分析】连接 AF，则 AF 的长就是 $AM+FM$ 的最小值，证明△ABC 是等边三角形，AF 是高线，利用三角函数即可求解．

【详解】解：连接 AF，则 AF 的长就是 $AM+FM$ 的最小值．



∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$AB=BC$，

又∵$\angle ABC=60°$，

∴△ABC 是等边三角形，

∵$CF=BF$

∴F 是 BC 的中点，

∴$AF\perp BC$．

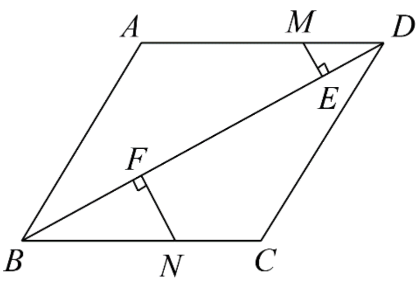
则 $AF=AB\cdot\sin60°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$．

即 $MA+MF$ 的最小值是 $\sqrt{3}$．

故选：C

【点睛】本题考查了菱形的性质，等边三角形以及三角函数，确定 AF 的长就是 $MA+MF$ 的最小值是关键．

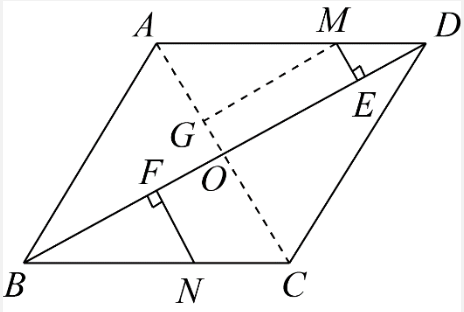
变式 2-5．(2022·陕西·统考中考真题）如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=4,BD=7$．若 M、N 分别是边 AD、BC 上的动点，且 $AM=BN$，作 $ME\perp BD,NF\perp BD$，垂足分别为 E、F，则 $ME+NF$ 的值为______．



【答案】$\frac{\sqrt{15}}{2}$

【分析】连接 AC 交 BD 于点 O，过点 M 作 $MG//BD$ 交 AC 于点 G，则可得四边形 $MEOG$ 是矩形，以及 $\Delta AGM \cong \Delta BFN$，从而得 $NF=AG$，$ME=OG$，即 $NR+ME=AO$，运用勾股定理求出 AO 的长即可.

【详解】解：连接 AC 交 BD 于点 O，如图，



$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AC\perp BD$，$BO=\frac{1}{2}BD=\frac{7}{2}$，$AD//BC$，

$\therefore \angle ADB=\angle CBD, \angle AOD=90°$,

在 $Rt\Delta ABO$ 中，$AB=4$，$BO=\frac{7}{2}$，

$\because AB^2=BO^2+AO^2$，

$\therefore AO=\sqrt{AB^2-BO^2}=\sqrt{4^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$,

过点 M 作 $MG//BD$ 交 AC 于点 G，

$\therefore \angle AMG=\angle ADB, \angle MGO+\angle MOG=90°$，

$\therefore \angle MGO=\angle MGA=90°$,

又 $ME\perp BD$,

$\therefore \angle MEO=90°$，

$\therefore$四边形 $MEOG$ 是矩形，

$\therefore ME=OG$，

又 $NF\perp BD$,

$\therefore \angle NFB=90°$,

$\therefore \angle NFB=\angle AGM$,

在 ΔNFB 和 ΔAGM 中，

$$\begin{cases} \angle NFB = \angle AGM \\ \angle NBF = \angle AMG \\ BN = AM \end{cases},$$

$\therefore \Delta NFB \cong \Delta AGM$

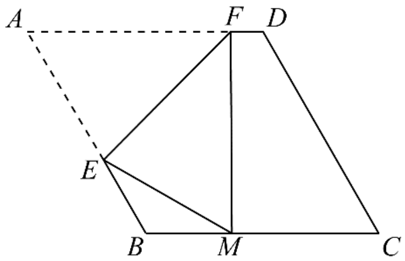
$\therefore NF = AG$，

$\therefore NF + ME = AG + OG = AO = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$，

故答案为$\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

【点睛】本题主要考查了菱形的性质以及全等三角形的判定与性质，正确作出辅助线构造全等三角形是解答本题的关键.

变式 2-6.（2022·浙江台州·统考中考真题）如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle A$=60°，AB=6．折叠该菱形，使点 A 落在边 BC 上的点 M 处，折痕分别与边 AB，AD 交于点 E，F．当点 M 与点 B 重合时，EF 的长为________；当点 M 的位置变化时，DF 长的最大值为________.



【答案】　$3\sqrt{3}$　$6-3\sqrt{3}$

【分析】当点 M 与点 B 重合时，EF 垂直平分 AB，利用三角函数即可求得 EF 的长；根据折叠的性质可知，$AF=FM$,若 DF 取最大值，则 FM 取最小值，即为边 AD 与 BC 的距离 DG，即可求解.

【详解】解：当点 M 与点 B 重合时，由折叠的性质知 EF 垂直平分 AB，

$\therefore AE=EB=\frac{1}{2}AB=3$，

在 $Rt\triangle AEF$ 中，$\angle A$=60°，AE=3，

$\tan 60° = \dfrac{EF}{AB}$，

$\therefore EF=3\sqrt{3}$；

当 AF 长取得最小值时，DF 长取得最大值，

由折叠的性质知 EF 垂直平分 AM，则 $AF=FM$，

$\therefore FM \perp BC$ 时，FM 长取得最小值，此时 DF 长取得最大值，

过点 D 作 $DG \perp BC$ 于点 C，则四边形 $DGMF$ 为矩形，

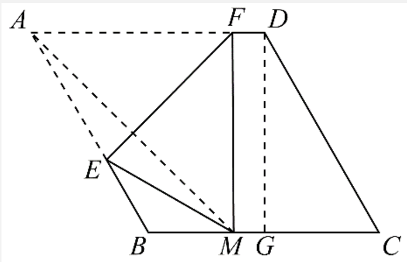
∴$FM=DG$，

在 Rt△DGC 中，$\angle C=\angle A=60°$，$DC=AB=6$，

∴$DG=DC\sin 60°=3\sqrt{3}$，

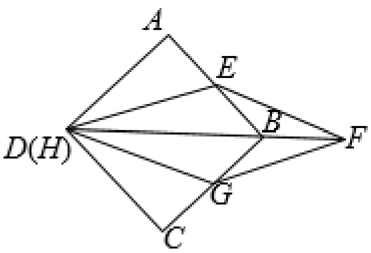
∴DF 长的最大值为 $AD-AF=AD-FM=AD-DG=6-3\sqrt{3}$，

故答案为：$3\sqrt{3}$；$6-3\sqrt{3}$．



【点睛】本题考查了菱形的性质，折叠的性质，解直角三角形，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题．

变式 2-7．（2022·贵州遵义·统考中考真题）将正方形 $ABCD$ 和菱形 $EFGH$ 按照如图所示摆放，顶点 D 与顶点 H 重合，菱形 $EFGH$ 的对角线 HF 经过点 B，点 E，G 分别在 AB，BC 上．



(1)求证：$\triangle ADE\cong\triangle CDG$；

(2)若 $AE=BE=2$，求 BF 的长．

【答案】(1)见解析

(2)$\sqrt{2}$

【分析】（1）根据正方形和菱形的性质可得 $AD=CD,\angle A=\angle C=90°,DE=DG$，根据 HL 即可得证；

（2）连接 EG 交 DF 于点 O，勾股定理求得 $EG=2\sqrt{2}$，ED，根据菱形的性质可得 $EF=2\sqrt{5}$，进而求得正方形和菱形的对角线的长度，根据 $BF=DF-DB$ 即可求解．

（1）

证明：∵ 正方形 $ABCD$ 和菱形 $EFGH$，

∴ $AD=CD,\angle A=\angle C=90°,DE=DG$，

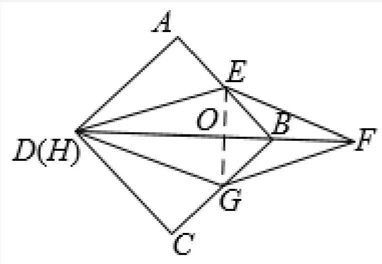
在 Rt△ADE 与 Rt△CDG 中

$$\begin{cases}AD = CD \\ DE = DG\end{cases}$$

$\therefore$ Rt△$ADE \cong$ Rt△CDG（HL）

（2）

如图，连接 EG 交 DF 于点 O，



$\because AE = BE = 2$，即 AB=4，

$\therefore CG = AE = 2, BG = CB - CG = 2$，

在 Rt△EBG 中，

$\therefore EG = \sqrt{EB^2 + BG^2} = 2\sqrt{2}$，

$\therefore EO = \sqrt{2}$，

在 Rt△ADE 中，$AD = 2AE = 4, AE = 2$，

$\therefore EF = DE = \sqrt{AE^2 + AD^2} = 2\sqrt{5}$，

在 Rt△OEF 中，$OF = \sqrt{EF^2 - OE^2} = \sqrt{20-2} = 3\sqrt{2}$，

$\therefore DF = 2OF = 6\sqrt{2}$，

$\because DB = \sqrt{2}AB = 4\sqrt{2}$，

$\therefore BF = DF - DB = 2\sqrt{2}$．

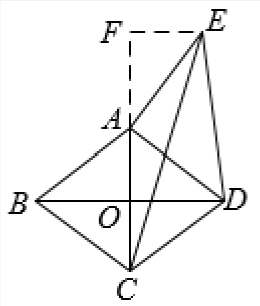
【点睛】本题考查了菱形的性质，正方形的性质，勾股定理，HL，掌握以上知识是解题的关键．

变式 2-8．（2022·黑龙江牡丹江·统考中考真题）在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 和 BD 的长分别是 6 和 8，以 AD 为直角边向菱形外作等腰直角三角形 ADE．连接 CE．请用尺规或三角板作出图形，并直接写出线段 CE 的长．

【答案】作图见解析；$CE = \sqrt{109}$ 或 $CE = 7\sqrt{2}$

【分析】分 $\angle DAE$=90° 和 $\angle ADE = 90°$ 两种情况，利用三角形全等及菱形的性质，求出相应线段长度，再利用勾股定理即可求解．

【详解】解：（1）如下图所示，当$\angle DAE$=90°时，$CE=\sqrt{109}$.



作图方法：利用三角板以AD为直角边，作$\angle DAE$=90°，取$AE=AD$，作$EF\perp AC$交CA的延长线于点F.

∵ 在菱形$ABCD$中，对角线AC和BD的长分别是6和8，

$\therefore BD\perp AC$，$OA=OC=\frac{1}{2}AC=3$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD=4$，

$\therefore \angle AOD=90°$，

$\therefore \angle OAD+\angle ODA=90°$，

又∵ $\angle DAE$=90°，

$\therefore \angle OAD+\angle FAE=90°$，

$\therefore \angle ODA=\angle FAE$，

在ΔODA和ΔFAE中，

$$\begin{cases}\angle ODA=\angle FAE\\ \angle AOD=\angle EFA\\ AD=EA\end{cases}，$$

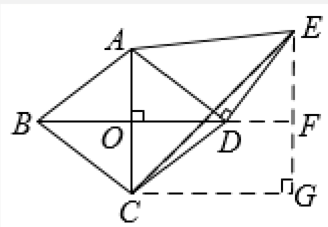
$\therefore \Delta ODA\cong\Delta FAE(\text{AAS})$，

$\therefore EF=OA=3$，$AF=OD=4$，

$\therefore CF=AF+AC=4+6=10$，

$\therefore CE=\sqrt{EF^2+CF^2}=\sqrt{3^2+10^2}=\sqrt{109}$.

（2）如下图所示，当$\angle ADE=90°$时，$CE=7\sqrt{2}$.



作图方法：利用三角板以 AD 为直角边，作 $\angle ADE=90°$，取 $AE=AD$，作 $EF\perp BD$ 交 BD 的延长线于点 F，作 $CG\perp EF$ 交 EF 的延长线于点 G.

同（1）可证 $\Delta ODA\cong\Delta FED$，

$\therefore EF=OD=4$， $DF=OA=3$，

$\therefore OF=OD+DF=4+3=7$，

$\because$ $\angle COD=\angle CGF=\angle OFG=90°$，

$\therefore$四边形 $OCGF$ 是矩形，

$\therefore FG=OC=3$， $CG=OF=7$，

$\therefore EG=EF+FG=4+3=7$，

$\therefore CE=\sqrt{CG^2+EG^2}=\sqrt{7^2+7^2}=7\sqrt{2}$.

综上， $CE=\sqrt{109}$ 或 $CE=7\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查菱形的性质、全等三角形的判定与性质、矩形的判定与性质、勾股定理解直角三角形等，解题的关键是注意存在 $\angle DAE$=90° 和 $\angle ADE=90°$ 两种情况，避免漏解.

考查题型三 利用菱形的性质求面积

典例 3.（2021·西藏·统考中考真题）已知一元二次方程 $x^2-10x+24=0$ 的两个根是菱形的两条对角线长，则这个菱形的面积为（　）

A．6　　B．10　　C．12　　D．24

【答案】C

【分析】利用因式分解法求出已知方程的解确定出菱形两条对角线长，进而求出菱形面积即可.

【详解】解：方程 $x^2-10x+24=0$，

分解得：$(x-4)(x-6)=0$，

可得 $x-4=0$ 或 $x-6=0$，

解得：$x=4$ 或 $x=6$，

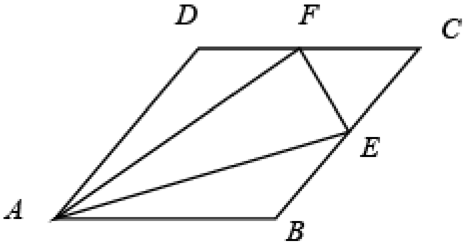
$\therefore$菱形两对角线长为 4 和 6，

则这个菱形的面积为 $\frac{1}{2}\times4\times6=12$.

故选：C.

【点睛】此题考查了求解一元二次方程和菱形的面积公式，难度一般.

变式 3-1.（2021·海南·统考中考真题）如图，在菱形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别是边 BC、CD 的中点，连接 AE、AF、EF．若菱形 $ABCD$ 的面积为 8，则△AEF 的面积为（　）

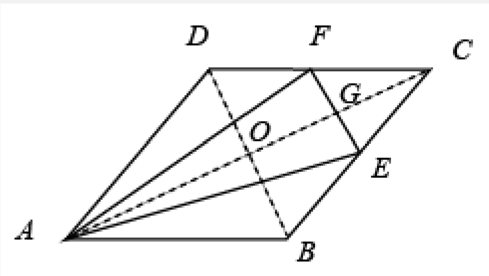


A．2　　B．3　　C．4　　D．5

【答案】B

【分析】连接 AC,BD，相交于点 O，AC 交 EF 于点 G，先根据菱形的性质可得 $AC\perp BD,OA=OC,\frac{1}{2}AC\cdot BD=8$，再根据三角形中位线定理可得 $EF//BD,EF=\frac{1}{2}BD$，然后根据相似三角形的判定与性质可得 $\frac{CG}{OC}=\frac{CF}{CD}=\frac{1}{2}$，从而可得 $AG=\frac{3}{4}AC$，最后利用三角形的面积公式即可得.

【详解】解：如图，连接 AC,BD，相交于点 O，AC 交 EF 于点 G，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，且它的面积为 8，

$\therefore AC\perp BD,OA=OC,\frac{1}{2}AC\cdot BD=8$，

$\because$ 点 E、F 分别是边 BC、CD 的中点，

$\therefore EF//BD,EF=\frac{1}{2}BD,CF=\frac{1}{2}CD$，

$\therefore EF\perp AC$，$\triangle CFG\sim\triangle CDO$，

$\therefore \frac{CG}{OC}=\frac{CF}{CD}=\frac{1}{2}$，

$\therefore CG=\frac{1}{2}OC=\frac{1}{4}AC$，

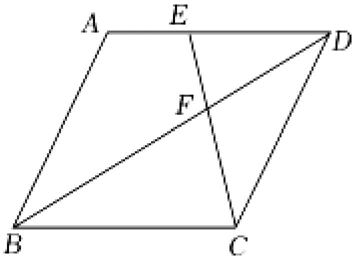
$\therefore AG=\frac{3}{4}AC$，

则 $\triangle AEF$ 的面积为 $\frac{1}{2}EF\cdot AG=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}BD\cdot\frac{3}{4}AC=\frac{3}{8}\times 8=3$，

故选：B.

【点睛】本题考查了菱形的性质、三角形中位线定理、相似三角形的判定与性质等知识点，熟练掌握菱形的性质是解题关键.

变式3-2（2022·山东淄博·统考中考真题）如图，在边长为4的菱形$ABCD$中，E为AD边的中点，连接CE交对角线BD于点F．若$\angle DEF=\angle DFE$，则这个菱形的面积为（　　）

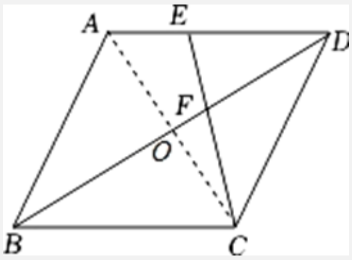


A．16　　　　B．$6\sqrt{7}$　　　　C．$12\sqrt{7}$　　　　D．30

【答案】B

【分析】连接AC交BD于O，如图，根据菱形的性质得到$AD\parallel BC$，$CB=CD=AD=4$，$AC\perp AB$，$BO=OD$，$OC=AO$，再利用$\angle DEF=\angle DFE$得到$DF=DE=2$，证明$\angle BCF=\angle BFC$得到$BF=BC=4$，则$BD=6$，所以$OB=OD=3$，接着利用勾股定理计算出OC，从而得到$AC=2\sqrt{7}$，然后根据菱形的面积公式计算它的面积．

【详解】解：连接AC交BD于O，如图，



∵四边形$ABCD$为菱形，

∴$AD\parallel BC$，$CB=CD=AD=4$，$AC\perp AB$，$BO=OD$，$OC=AO$，

∵E为AD边的中点，

∴$DE=2$，

∵$\angle DEF=\angle DFE$，

∴$DF=DE=2$，

∵$DE\parallel BC$，

∴$\angle DEF=\angle BCF$，

∵$\angle DFE=\angle BFC$，

∴$\angle BCF=\angle BFC$，

∴$BF=BC=4$，

∴BD＝BF+DF＝4+2＝6，

∴OB＝OD＝3，

在 Rt△BOC 中，$OC=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$，

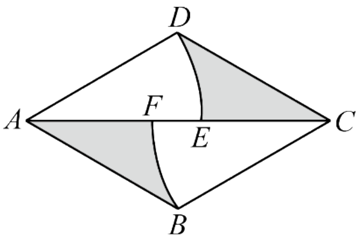
∴AC＝2OC＝$2\sqrt{7}$，

∴菱形 $ABCD$ 的面积＝$\frac{1}{2}AC$•BD＝$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{7}\times 6=6\sqrt{7}$．

故选：B．

【点睛】本题考查了菱形的性质：菱形具有平行四边形的一切性质；菱形的四条边都相等；菱形的两条对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角；菱形面积＝$\frac{1}{2}ab$（a、b 是两条对角线的长度）．

变式 3-3．（2022·重庆·统考中考真题）如图，菱形 $ABCD$ 中，分别以点 A，C 为圆心，AD，CB 长为半径画弧，分别交对角线 AC 于点 E，F．若 $AB=2$，$\angle BAD=60°$，则图中阴影部分的面积为_________．（结果不取近似值）



【答案】$2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$

【分析】连接 BD 交 AC 于点 G，证明△ABD 是等边三角形，可得 BD＝2，然后根据菱形的性质及勾股定理求出 AC，再由 $S_{阴影}$＝$S_{菱形}ABCD$－$S_{扇形}ADE$－$S_{扇形}CBF$ 得出答案．

【详解】解：连接 BD 交 AC 于点 G，

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴AB＝AD＝2，AC⊥BD，

∵$\angle BAD=60°$，

∴△ABD 是等边三角形，∠DAC＝∠BCA＝30°，

∴BD＝2，

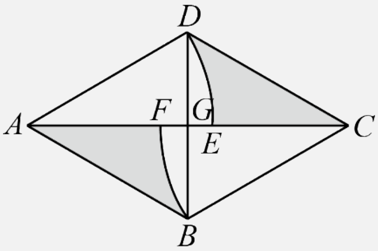
∴BG＝$\frac{1}{2}BD=1$，

∴$AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

∴AC＝$2AG=2\sqrt{3}$，

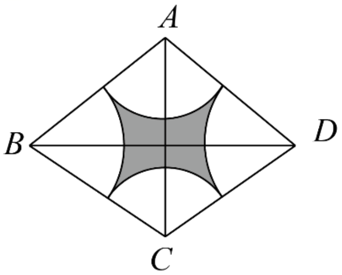
∴$S_{阴影}=S_{菱形ABCD}-S_{扇形ADE}-S_{扇形CBF}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2-\frac{30\pi\cdot2^2}{360}-\frac{30\pi\cdot2^2}{360}=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$，

故答案为：$2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$．



【点睛】本题考查了菱形的性质，等边三角形的判定和性质，勾股定理，扇形的面积公式等，在求阴影部分面积时，能够将求不规则图形的面积转化为求规则图形的面积是解题的关键．

变式 3-4．（2021·重庆·统考中考真题）如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 $AC=12$，$BD=16$，分别以点 A，B，C，D 为圆心，$\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧，与该菱形的边相交，则图中阴影部分的面积为__________．（结果保留 π）



【答案】96-25π

【分析】先根据菱形的性质得出 AB 的长和菱形的面积，再根据扇形的面积公式求出四个扇形的面积和即可得出答案

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是菱形，$AC=12$，$BD=16$，

∴$AC\perp BD$，$AO=6$，$BO=8$；

∴ $AB=\sqrt{OB^2+OA^2}=10$；

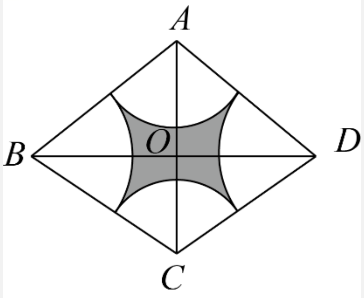
∴菱形 $ABCD$ 的面积$=\frac{1}{2}AC\times BD=\frac{1}{2}\times12\times16=96$

∵四个扇形的半径相等，都为$\frac{1}{2}AB=5$，且四边形的内角和为 360°，

∴四个扇形的面积$=\frac{360\pi\times5^2}{360}=25\pi$，

∴阴影部分的面积=96-25π；

故答案为：96-25π．



【点睛】本题考查的是扇形面积计算、菱形的性质，掌握扇形面积公式是解题的关键.

变式 3-5．（2021·四川凉山·统考中考真题）菱形 $ABCD$ 中，对角线 $AC=10$，$BD=24$，则菱形的高等于____________.

【答案】$\frac{120}{13}$

【分析】过 A 作 $AE\perp BC$，垂足为 E，根据菱形的性质求出菱形边长，再利用菱形的面积公式得到方程，解之可得 AE.

【详解】解：如图，过 A 作 $AE\perp BC$，垂足为 E，即 AE 为菱形 $ABCD$ 的高，

∵菱形 $ABCD$ 中，$AC=10$，$BD=24$，

∴$OB=\frac{1}{2}BD=12$，$OA=\frac{1}{2}AC=5$，

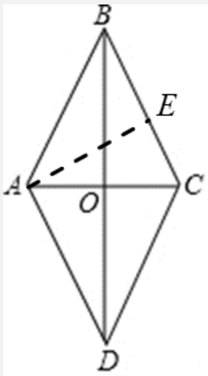
在 $Rt\triangle ABO$ 中，$AB=BC=\sqrt{12^2+5^2}=13$，

∵$S_{菱形}ABCD=\frac{1}{2}\times AC\times BD=BC\times AE$，

∴$\frac{1}{2}\times 10\times 24=13\times AE$，

解得：$AE=\frac{120}{13}$，

故答案为：$\frac{120}{13}$.



【点睛】本题考查了菱形的性质和勾股定理的应用，能熟记菱形的性质是解此题的关键，注意：菱形的四条边都相等，菱形的对角线互相平分且垂直.