

四川省绵阳市高中 2025 届高三下学期联考数学试题

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $\frac{1+i}{1-i} \cdot \bar{z} = 2-i$ （其中 $\bar{z}$ 为 z 的共轭复数），则 $|z|$ 的值为（ ）

- A. 1 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$

2. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 的一条渐近线方程是 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ，则双曲线的离心率为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

3. 甲、乙、丙三人相约晚上在某地会面，已知这三人都不会违约且无两人同时到达，则甲第一个到、丙第三个到的概率是（ ）

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{6}$

4. 已知向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 4$ ， $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上投影为 -2 ，则 $|\vec{a} - 3\vec{b}|$ 的最小值为（ ）

- A. 12 B. 10 C. $\sqrt{10}$ D. 2

5. 连接双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 及 $C_2: \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 的 4 个顶点的四边形面积为 S_1 ，连接 4 个焦点的四边形的面积为

S_2 ，则当 $\frac{S_1}{S_2}$ 取得最大值时，双曲线 C_1 的离心率为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

6. “纹样”是中国艺术宝库的瑰宝，“火纹”是常见的一种传统纹样.为了测算某火纹纹样（如图阴影部分所示）的面积，作一个边长为 3 的正方形将其包含在内，并向该正方形内随机投掷 200 个点，已知恰有 80 个点落在阴影部分据此可估计阴影部分的面积是（ ）



- A. $\frac{16}{5}$ B. $\frac{32}{5}$ C. 10 D. $\frac{18}{5}$

7. 若 P 是 $\neg q$ 的充分不必要条件, 则 $\neg p$ 是 q 的 ()

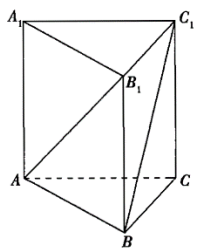
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

8. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$, $g(x) = -x + m + 2$, 若对任意 $x_1 \in [1, 3]$, 总存在 $x_2 \in [1, 3]$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$

成立, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $\left[\frac{17}{2}, 9\right]$ B. $\left(-\infty, \frac{17}{2}\right] \cup [9, +\infty)$
C. $\left[\frac{17}{4}, \frac{9}{2}\right]$ D. $\left(-\infty, \frac{17}{4}\right] \cup \left[\frac{9}{2}, +\infty\right)$

9. 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的所有棱长均相等, 侧棱 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 过 AB_1 作平面 α 与 BC_1 平行, 设平面 α 与平面 ACC_1A_1 的交线为 l , 记直线 l 与直线 AB, BC, CA 所成锐角分别为 α, β, γ , 则这三个角的大小关系为 ()



- A. $\alpha > \gamma > \beta$ B. $\alpha = \beta > \gamma$
C. $\gamma > \beta > \alpha$ D. $\alpha > \beta = \gamma$

10. 函数 $y = \frac{\sin(-x)}{x}$ ($x \in [-\pi, 0)$ 或 $x \in (0, \pi]$) 的图象大致是 ()



11. 已知随机变量 X 的分布列如下表：

X	-1	0	1
P	a	b	c

其中 $a, b, c > 0$. 若 X 的方差 $D(X) \leq \frac{1}{3}$ 对所有 $a \in (0, 1-b)$ 都成立，则 ()

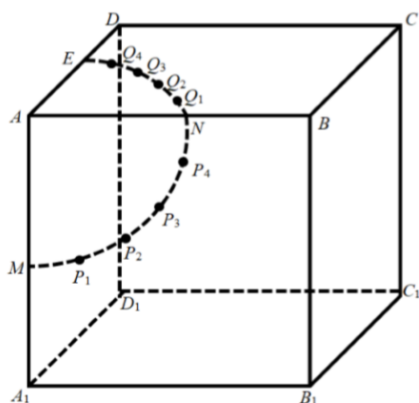
- A. $b \leq \frac{1}{3}$ B. $b \leq \frac{2}{3}$ C. $b \geq \frac{1}{3}$ D. $b \geq \frac{2}{3}$

12. 命题“ $\forall x \in (0, 1), e^{-x} > \ln x$ ”的否定是 ()

- A. $\forall x \in (0, 1), e^{-x} \leq \ln x$ B. $\exists x_0 \in (0, 1), e^{-x_0} > \ln x_0$
C. $\exists x_0 \in (0, 1), e^{-x_0} < \ln x_0$ D. $\exists x_0 \in (0, 1), e^{-x_0} \leq \ln x_0$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 如图，棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M, N, E 分别为棱 AA_1, AB, AD 的中点，以 A 为圆心，1 为半径，分别在面 ABB_1A_1 和面 $ABCD$ 内作弧 MN 和 NE ，并将两弧各五等分，分点依次为 M, P_1, P_2, P_3, P_4, N 以及 N, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, E . 一只蚂蚁欲从点 P_1 出发，沿正方体的表面爬行至 Q_4 ，则其爬行的最短距离为 _____. 参考数据： $\cos 9^\circ = 0.9877$ ； $\cos 18^\circ = 0.9511$ ； $\cos 27^\circ = 0.8910$ ）



14. 若 $\int_0^1 (a - x^2) dx = \frac{5}{3}$ ，则 $a =$ _____.

15. 圆心在曲线 $y = \frac{k}{x} (x > 0, k > 0)$ 上的圆中, 存在与直线 $2x + y + 1 = 0$ 相切且面积为 5π 的圆, 则当 k 取最大值时, 该圆的标准方程为_____.

16. 某次足球比赛中, A, B, C, D 四支球队进入了半决赛. 半决赛中, A 对阵 C, B 对阵 D , 获胜的两队进入决赛争夺冠军, 失利的两队争夺季军. 已知他们之间相互获胜的概率如下表所示.

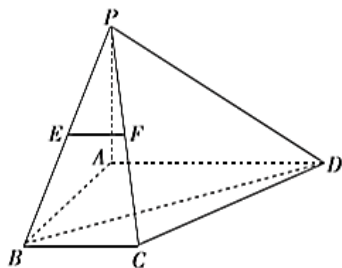
	A	B	C	D
A 获胜概率	—	0.4	0.3	0.8
B 获胜概率	0.6	—	0.7	0.5
C 获胜概率	0.7	0.3	—	0.3
D 获胜概率	0.2	0.5	0.7	—

则 A 队获得冠军的概率为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$,

$AB = BC = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}PB = 2$, E 为 PB 的中点, F 是 PC 上的点.



(1) 若 $EF \parallel$ 平面 PAD , 证明: $EF \perp$ 平面 PAB .

(2) 求二面角 $B-PD-C$ 的余弦值.

18. (12 分) 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 准线为 l , AB 为抛物线 C 过焦点 F 的弦, 已知以 AB 为直径的圆与 l 相切于点 $(-1, 0)$.

(1) 求 p 的值及圆的方程;

(2) 设 M 为 l 上任意一点, 过点 M 作 C 的切线, 切点为 N , 证明: $MF \perp NF$.

19. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 为公差为 d 的等差数列, $d > 0$, $a_4 = 4$, 且 a_1, a_3, a_9 依次成等比数列, $b_n = 2^{a_n}$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;

(2) 若 $c_n = \frac{2b_n}{S_n \cdot S_{n+1}}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

20. (12分) 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\cos \beta = -\frac{1}{3}$, $\sin(\alpha + \beta) = \frac{7}{9}$.

(1) 求 $\sin \alpha$ 的值;

(2) 求 $\tan\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)$ 的值.

21. (12分) 设 $f(x) = (a-4)\log_a x - \frac{3}{a-1}x + \frac{3}{a-1}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

(1) 证明: 当 $a = 4$ 时, $\ln x + f(x) \leq 0$;

(2) 当 $x \geq 1$ 时 $f(x) \leq 0$, 求整数 a 的最大值. (参考数据: $\ln 2 \approx 0.69, \ln 3 \approx 1.10, \ln 5 \approx 1.61, \ln 7 \approx 1.95$)

22. (10分) 已知函数 $f(x) = ax - \ln x - 1$ ($a \in \mathbb{R}$).

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性并指出相应单调区间;

(2) 若 $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1 - f(x)$, 设 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) 是函数 $g(x)$ 的两个极值点, 若 $a \geq \frac{3}{2}$, 且 $g(x_1) - g(x_2) \geq k$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

按照复数的运算法则先求出 $\bar{z}$, 再写出 z , 进而求出 $|z|$.

【详解】

$$\text{Q } \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i,$$

$$\therefore \frac{1+i}{1-i} \cdot \bar{z} = 2-i \Rightarrow i \cdot \bar{z} = 2-i \Rightarrow \bar{z} = \frac{2-i}{i} = -i(2-i) = -1-2i,$$

$$\therefore z = -1+2i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

故选: D

【点睛】

本题考查复数的四则运算、共轭复数及复数的模，考查基本运算能力，属于基础题。

2、D

【解析】

双曲线的渐近线方程是 $y = \pm \frac{1}{a}x$ ，所以 $\frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，即 $a = \sqrt{3}, b = 1$ ， $c^2 = a^2 + b^2 = 4$ ，即 $c = 2$ ， $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ，

故选 D.

3、D

【解析】

先判断是一个古典概型，列举出甲、乙、丙三人相约到达的基本事件种数，再得到甲第一个到、丙第三个到的基本事件的种数，利用古典概型的概率公式求解。

【详解】

甲、乙、丙三人相约到达的基本事件有甲乙丙，甲丙乙，乙甲丙，乙丙甲，丙甲乙，丙乙甲，共 6 种，

其中甲第一个到、丙第三个到有甲乙丙，共 1 种，

所以甲第一个到、丙第三个到的概率是 $p = \frac{1}{6}$ 。

故选：D

【点睛】

本题主要考查古典概型的概率求法，还考查了理解辨析的能力，属于基础题。

4、B

【解析】

根据 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上投影为 -2，以及 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in [-1, 0)$ ，可得 $|\vec{b}|_{\min} = 2$ ；再对所求模长进行平方运算，可将问题转化为模长和夹角运算，代入 $|\vec{a} - 3\vec{b}|_{\min}$ 即可求得 $|\vec{a} - 3\vec{b}|_{\min}$ 。

【详解】

$\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上投影为 -2，即 $|\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -2$

Q $|\vec{b}| > 0 \quad \therefore \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle < 0$

又 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in [-1, 0) \quad \therefore |\vec{b}|_{\min} = 2$

$|\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = \vec{a}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - 6|\vec{a}||\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + 9|\vec{b}|^2 = 9|\vec{b}|^2 + 64$

$\therefore |\vec{a} - 3\vec{b}|_{\min} = \sqrt{9 \times 4 + 64} = 10$

本题正确选项：B

【点睛】

本题考查向量模长的运算，对于含加减法运算的向量模长的求解，通常先求解模长的平方，再开平方求得结果；解题关键是需要通过夹角取值范围的分析，得到 $\left|\vec{b}\right|$ 的最小值。

5、D

【解析】

先求出四个顶点、四个焦点的坐标，四个顶点构成一个菱形，求出菱形的面积，四个焦点构成正方形，求出其面积，

利用重要不等式求得 $\frac{S_1}{S_2}$ 取得最大值时有 $a=b$ ，从而求得其离心率。

【详解】

双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 与 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ 互为共轭双曲线，

四个顶点的坐标为 $(\pm a, 0), (0, \pm b)$ ，四个焦点的坐标为 $(\pm c, 0), (0, \pm c)$ ，

四个顶点形成的四边形的面积 $S_1 = \frac{1}{2} \times 2a \times 2b = 2ab$ ，

四个焦点连线形成的四边形的面积 $S_2 = \frac{1}{2} \times 2c \times 2c = 2c^2$ ，

所以 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2ab}{2c^2} = \frac{ab}{a^2+b^2} \leq \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}$ ，

当 $\frac{S_1}{S_2}$ 取得最大值时有 $a=b$ ， $c=\sqrt{2}a$ ，离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$ ，

故选：D.

【点睛】

该题考查的是有关双曲线的离心率的问题，涉及到的知识点有共轭双曲线的顶点，焦点，菱形面积公式，重要不等式求最值，等轴双曲线的离心率，属于简单题目。

6、D

【解析】

直接根据几何概型公式计算得到答案.

【详解】

根据几何概型： $p = \frac{S}{9} = \frac{80}{200}$ ，故 $S = \frac{18}{5}$.

故选：D.

【点睛】

本题考查了根据几何概型求面积，意在考查学生的计算能力和应用能力.

7、B

【解析】

试题分析：通过逆否命题的同真同假，结合充要条件的判断方法判定即可。

由 p 是 $\neg q$ 的充分不必要条件知“若 p 则 $\neg q$ ”为真，“若 $\neg q$ 则 p ”为假，根据互为逆否命题的等价性知，“若 q 则 $\neg p$ ”为真，“若 $\neg p$ 则 q ”为假，故选 B.

考点：逻辑命题

8、C

【解析】

将函数 $f(x)$ 解析式化简，并求得 $f'(x)$ ，根据当 $x_1 \in [1, 3]$ 时 $f'(x) > 0$ 可得 $f(x_1)$ 的值域，由函数 $g(x) = -x + m + 2$ 在 $x_2 \in [1, 3]$ 上单调递减可得 $g(x_2)$ 的值域，结合存在性成立问题满足的集合关系，即可求得 m 的取值范围。

【详解】

$$\text{依题意 } f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x+1} = \frac{x^2 + x + 2(x+1) + 1}{x+1}$$

$$= x + \frac{1}{x+1} + 2,$$

$$\text{则 } f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2},$$

当 $x \in [1, 3]$ 时， $f'(x) > 0$ ，故函数 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上单调递增，

$$\text{当 } x_1 \in [1, 3] \text{ 时， } f(x_1) \in \left[\frac{7}{2}, \frac{21}{4} \right];$$

而函数 $g(x) = -x + m + 2$ 在 $[1, 3]$ 上单调递减，

$$\text{故 } g(x_2) \in [m-1, m+1],$$

$$\text{则只需 } \left[\frac{7}{2}, \frac{21}{4} \right] \subseteq [m-1, m+1],$$

$$\text{故 } \begin{cases} m-1 \leq \frac{7}{2} \\ m+1 \geq \frac{21}{4} \end{cases}, \text{ 解得 } \frac{17}{4} \leq m \leq \frac{9}{2},$$

$$\text{故实数 } m \text{ 的取值范围为 } \left[\frac{17}{4}, \frac{9}{2} \right].$$

故选：C.

【点睛】

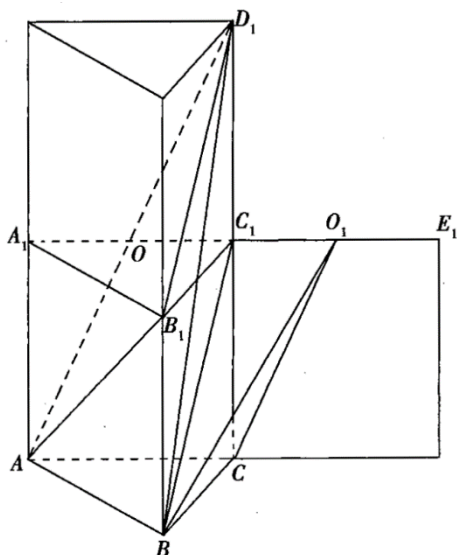
本题考查了导数在判断函数单调性中的应用，恒成立与存在性成立问题的综合应用，属于中档题.

9、B

【解析】

利用图形作出空间中两直线所成的角，然后利用余弦定理求解即可.

【详解】



如图， $D_1C_1 = CC_1$ ， $C_1E_1 = A_1C_1$ ，设 O 为 A_1C_1 的中点， O_1 为 C_1E_1 的中点，

由图可知过 AB_1 且与 BC_1 平行的平面 α 为平面 AB_1D_1 ，所以直线 l 即为直线 AD_1 ，

由题易知， $\angle D_1AB$ ， $\angle O_1CB$ 的补角， $\angle D_1AC$ 分别为 α ， β ， γ ，

设三棱柱的棱长为2，

在 $\triangle D_1AB$ 中， $D_1B = 2\sqrt{5}$ ， $AB = 2$ ， $AD_1 = 2\sqrt{5}$ ，

$$\cos \angle D_1AB = \frac{(2\sqrt{5})^2 + 4 - (2\sqrt{5})^2}{2 \times 2 \times 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}, \therefore \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{10};$$

在 $\triangle O_1BC$ 中， $O_1B = \sqrt{11}$ ， $BC = 2$ ， $O_1C = \sqrt{5}$ ，

$$\cos \angle O_1CB = \frac{(\sqrt{5})^2 + 4 - (\sqrt{11})^2}{2 \times 2 \times \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{10}, \therefore \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{10};$$

在 $\triangle D_1AC$ 中， $CD_1 = 4$ ， $AC = 2$ ， $AD_1 = 2\sqrt{5}$ ，

$$\cos \angle D_1AC = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \therefore \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$Q \cos \alpha = \cos \beta < \cos \gamma, \therefore \alpha = \beta > \gamma.$$

故选：B

【点睛】

本题主要考查了空间中两直线所成角的计算，考查了学生的作图，用图能力，体现了学生直观想象的核心素养.

10、A

【解析】

确定函数的奇偶性，排除两个选项，再求 $x = \pi$ 时的函数值，再排除一个，得正确选项.

【详解】

分析知，函数 $y = \frac{\sin(-x)}{x}$ ($x \in [-\pi, 0)$ 或 $x \in (0, \pi]$) 为偶函数，所以图象关于 y 轴对称，排除 B, C,

当 $x = \pi$ 时， $\frac{\sin x}{x} = 0$ ，排除 D,

故选：A.

【点睛】

本题考查由函数解析式选择函数图象，解题时可通过研究函数的性质，如奇偶性、单调性、对称性等，研究特殊的函数的值、函数值的正负，以及函数值的变化趋势，排除错误选项，得正确结论.

11、D

【解析】

根据 X 的分布列列式求出期望,方差,再利用 $a + b + c = 1$ 将方差变形为 $D(X) = -4\left(a - \frac{1-b}{2}\right)^2 + 1 - b$,从而可以利用二次函数的性质求出其最大值为 $1 - b \leq \frac{1}{3}$,进而得出结论.

【详解】

由 X 的分布列可得 X 的期望为 $E(X) = -a + c$,

又 $a + b + c = 1$,

所以 X 的方差 $D(X) = (-1 + a - c)^2 a + (a - c)^2 b + (1 + a - c)^2 c$

$$= (a - c)^2 (a + b + c) - 2(a - c)^2 + a + c$$

$$= -(a - c)^2 + a + c$$

$$= -(2a - 1 + b)^2 + 1 - b$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/778070124103007032>