# 第 14 讲 应用一元二次方程

## 模块导航

模块一　思维导图串知识

模块二　基础知识全梳理（吃透教材）

模块三　核心考点举一反三

模块四　小试牛刀过关测

## 素养目标

1．通过分析具体问题中的数量关系，建立方程模型并解决实际问题，总结运用方程解决实际问题的一般步骤；

2．通过列方程解应用题，进一步提高逻辑思维能力、分析问题和解决问题的能力；

## 模块一 思维导图串知识




## 模块二 基础知识全梳理

### 知识点一、列一元二次方程解应用题的一般步骤

**1. 利用方程解决实际问题的关键是寻找等量关系.**

**2. 解决应用题的一般步骤：**

审(审题目，分清已知量、未知量、等量关系等)；

设(设未知数，有时会用未知数表示相关的量)；

列(根据题目中的等量关系，列出方程)；

解(解方程，注意分式方程需检验，将所求量表示清晰)；

验（检验方程的解能否保证实际问题有意义）

答(写出答案，切忌答非所问).

**要点：** 列方程解实际问题的三个重要环节：

一是整体地、系统地审题；二是把握问题中的等量关系；三是正确求解方程并检验解的合理性.

## 知识点二、一元二次方程应用题的主要类型

### 1. 平均变化率问题

列一元二次方程解决增长(降低)率问题时，要理清原来数、后来数、增长率或降低率，以及增长或降低的次数之间的数量关系. 如果列出的方程是一元二次方程，那么应在原数的基础上增长或降低两次.

(1)增长率问题：平均增长率公式为 $a(1+x)^n=b$ (a 为原来数，x 为平均增长率，n 为增长次数，b 为增长后的量.)

(2)降低率问题：平均降低率公式为 $a(1-x)^n=b$ (a 为原来数，x 为平均降低率，n 为降低次数，b 为降低后的量.)

### 2. 数字问题

(1)任何一个多位数都是由数位和数位上的数组成. 数位从右至左依次分别是：个位、十位、百位、千位……，它们数位上的单位从右至左依次分别为：1、10、100、1000、……，数位上的数字只能是 0、1、2、……、9 之中的数，而最高位上的数不能为 0. 因此，任何一个多位数，都可用其各数位上的数字与其数位上的单位的积的和来表示，这也就是用多项式的形式表示了一个多位数. 如：一个三位数，个位上数为 a，十位上数为 b，百位上数为 c，则这个三位数可表示为：100c+10b+a.

(2)几个连续整数中，相邻两个整数相差 1.

如：三个连续整数，设中间一个数为 x，则另两个数分别为 x-1，x+1.

几个连续偶数(或奇数)中，相邻两个偶数(或奇数)相差 2.

如：三个连续偶数(奇数)，设中间一个数为 x，则另两个数分别为 x-2，x+2.

### 3. 利息问题

(1)概念：

本金：顾客存入银行的钱叫本金. 利息：银行付给顾客的酬金叫利息. 本息和：本金和利息的和叫本息和.

期数：存入银行的时间叫期数. 利率：每个期数内的利息与本金的比叫利率.

(2)公式:利息=本金×利率×期数 利息税=利息×税率 本金×(1+利率×期数)=本息和

本金×[1+利率×期数×(1-税率)]=本息和(收利息税时)

### 4. 利润(销售)问题

利润(销售)问题中常用的等量关系： 利润=售价-进价(成本) 总利润=每件的利润×总件数

$$\text{利润率}=\frac{\text{利润}}{\text{进价(或成本)}}\times 100\%,\ \text{标价}\times\frac{\text{打折数}}{10}=\text{售价}$$

$$\text{进价}\times(1+\text{利润率})=\text{标价}\times\frac{\text{打折数}}{10}$$

### 5. 形积问题

此类问题属于几何图形的应用问题，解决问题的关键是将不规则图形分割或组合成规则图形，根据图形的面积或体积公式，找出未知量与已知量的内在关系并列出方程.

## 模块三 核心考点举一反三

## 考点一：用一元二次方程解决增长率问题

例 1．（2023 上·河南洛阳·九年级统考期中）受益于国家支持新能源汽车发展和“一带一路”发展战略等多重利好因素，我市某汽车零部件生产企业的利润逐年提高，据统计，2020 年利润为 2 亿元，2022 年利润为 2.88 亿元．

(1)求该企业从 2020 年到 2022 年利润的年平均增长率；

(2)若 2023 年保持前两年利润的年平均增长率不变，该企业 2023 年的利润能否超过 3.4 亿元？为什么？

【答案】(1)该企业从 2020 年到 2022 年利润的年平均增长率为 20%

(2)能，该企业 2023 年的利润能超过 3.4 亿元，理由见详解

【分析】本题主要考查一元二次方程的应用，增长率的问题．以及实数的混合运算．

（1）设该企业从 2020 年到 2022 年利润的年平均增长率为 $x$，根据题意列方程，解方程即可．

（2）由（1）得出平均增长率，然后计算 2023 年的利润，然后比较一下即可得出结论．

【详解】（1）解：解：设该企业从 2020 年到 2022 年利润的年平均增长率为 $x$，根据题意列方程：

$2(x+1)^2=2.88$

解得：$x_1=0.2=20\%$，$x_2=-2.2$（不合题意，舍去）

$\therefore x=20\%$

答：该企业从 2020 年到 2022 年利润的年平均增长率为 20%

（2）能，理由：若 2023 年保持前两年利润的年平均增长率不变，该企业 2023 年的利润为：

$2.88\times(1+20\%)=3.456>3.4$

∴该企业 2023 年的利润能超过 3.4 亿元

**【变式 1-1】**（2023 上·广东肇庆·九年级统考期末）新能源汽车节能、环保，越来越受消费者喜爱，我国新能源汽车近几年出口量逐年增加，2021 年出口量为 20 万台，2023 年出口量增加到 45 万台．

(1)求 2021 年到 2023 年新能源汽车出口量的年平均增长率是多少？

(2)按照这个增长速度，预计 2024 年我国新能源汽车出口量为多少？

【答案】(1)2021 年到 2023 年新能源汽车出口量的年平均增长率是 50%；

(2)预计 2024 年我国新能源汽车出口量为 67.5 万辆．

【分析】本题考查了一元二次方程的应用，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键．

（1）根据 2021 年某款新能源车销售量为 20 万辆，到 2023 年销售量为 45 万辆，若年增长率 $x$ 不变，可得关于 $x$ 的一元二次方程；

（2）利用（1）中所求，进而利用 2024 年出口量＝2023 年出口量×(1＋增长率），即可得出答案．

【详解】（1）解：设年平均增长率为 $x$，

根据题意可列方程：$20(1+x)^2=45$，

解得：$x_1=0.5$，$x_2=-2.5$（不合题意舍去），

答：2021 年到 2023 年新能源汽车出口量的年平均增长率是 50%；

（2）解：由（1）得，$45\times(1+50\%)=67.5$（万），

答：预计 2024 年我国新能源汽车出口量为 67.5 万辆.

**【变式 1-2】**（2023 上·辽宁·九年级沈阳市第七中学校联考期末）随着新能源技术的提高，新能源汽车节能、环保，越来越受消费者喜爱．沈阳某4S店新能源汽车销售量自 2023 年起逐月增加，据统计，该4S店 1 月份销售新能源汽车 50 辆，3 月份销售了 72 辆.

(1)求该4S店这两个月的月平均增长率；

(2)若月平均增长率保持不变，求该4S店 4 月份卖出多少辆新能源汽车．（答案若含有小数则只取整数部分，不四舍五入）

【答案】(1)月平均增长率为20%

(2)4 月份卖 86 台

【分析】此题主要考查了一元二次方程的应用，正确列出方程解题关键.

（1）设该4S店这两个月的月平均增长率为$x$，利用增长率公式得出方程求出答案；

（2）用四月份的销售量=三月份的销售量+四月份的增长量得出结论.

【详解】（1）解：设该4S店这两个月的月平均增长率为$x$，

根据题意得：$50(x+1)^2=72$，

解得：$x_1=\frac{1}{5}=20\%$，$x_2=-\frac{11}{5}$（不合题意，舍去），

答：该4S店这两个月的月平均增长率为20%；

（2）解：$72\times(1+20\%)\approx86$（辆），

答：4 月份卖 86 台.

**【变式 1-3】**（2023 上·天津·九年级统考期末）为了振兴乡村经济，某村委会干部带领村民在网上直播推销农产品，八月份销售蜂蜜 400 瓶，九、十两月这种蜂蜜销售量持续增加，十月份的销售量达到 576 瓶.

(1)设九、十两月的销售量的月平均增长率 $x$，九月份销售量为_____，十月份销售量为_____，（均用含 $x$ 的式子表示）

(2)列方程求九、十两个月的销售量月平均增长率.

【答案】(1)$400(1+x)$；$400(1+x)^2$

(2)九、十两个月的销售量月平均增长率为20%

【分析】本题考查了一元二次方程的应用，根据题意列出方程解答即可；弄清题意准确列出方程是解题的关键.

【详解】（1）解：设九、十两月的销售量的月平均增长率 $x$，

由题意得，九月份销售量为$400(1+x)$，十月份销售量为$400(1+x)^2$；

故答案为：$400(1+x)$；$400(1+x)^2$

（2）依题意，得$400(1+x)^2=576$，

解得：$x_1=0.2$，$x_2=-2.2$（不符合题意，舍去）．

答：九、十两个月的销售量月平均增长率为20%．

## 考点二：用一元二次方程解决传播问题



例2.（2023上·新疆昌吉·九年级校考阶段练习）有一只鸡患了某种传染病，如果不加以控制，则经过两轮传染后将有81只鸡患上该种传染病．

(1)求平均一只鸡传染几只鸡？

(2)按此传播速度，经过3轮传染后共有多少只鸡受到传染？

【答案】(1)平均一只鸡传染8只鸡

(2)经过3轮传染后共有729只鸡受到传染，

【分析】本题考查了一元二次方程的应用；

（1）设每轮传染中1只鸡传染$x$只鸡，则第一轮传染中有$x$只鸡被传染，第二轮传染中有$x(1+x)$只鸡被传染，根据“有一只鸡患了某种传染病，如果不加以控制，则经过两轮传染后将有81只鸡患上该种传染病”，即可得出关于$x$的一元二次方程，解之即可得出$x$的值，

（2）将$x=8$，代入$81+81x$中即可求出结论．

【详解】（1）解：设每轮传染中1只鸡传染$x$只鸡，则第一轮传染中有$x$只鸡被传染，第二轮传染中有$x(1+x)$只鸡被传染，

依题意得：$1+x+x(1+x)=81$，

整理得：$(1+x)^2=81$，

解得：$x_1=8$，$x_2=-10$（不符合题意，舍去），

答：平均一只鸡传染8只鸡．

（2）解：依题意，$81+81x=81+81\times8=729$，

答：经过3轮传染后共有729只鸡受到传染．

**【变式2-1】**（2023上·河北张家口·九年级统考期末）“国庆”节老同学聚会，每两个人都握一次手，所有人共握手10次，则参加聚会的人数是_____人．

【答案】5

【分析】本题考查了一元二次方程的应用，根据“每两个人都握一次手，所有人共握手10次”，列式求解即可．

【详解】解：设有$x$人参加聚会，

根据题意得，$\frac{x(x-1)}{2}=10$，

整理得$x^2-x-20=0$，

解得$x_1=-4$（舍去），$x_2=5$.

所以有 5 人参加聚会.

故答案为：5.

**【变式 2-2】**（2023 上·湖南湘西·九年级校考期中）随着人们生活水平的提高，节假日大家都喜欢游览观光祖国的大好河山，但一定要注意安全，特别要防止病毒的传染．我们利用学过的数学知识来解决一个关于病毒传染的问题：一个游客在旅游时，因不意防范，患上了流感，回家后，经两轮传染后有 81 人患上了流感，那么平均一个人传染了几个人？经过三轮传染后共有多少人患上了流感？

【答案】平均一个人传染了 8 个人，经过三轮传染后共有 729 人患上了流感

【分析】本题考查了一元二次方程的应用，关键是根据题意列方程求解．设平均一人传染了 $x$ 人，根据有一人患了流感，经过两轮传染后共有 81 人患了流感，列方程求出 $x$ 的值，进而表示出经过三轮传染后患上流感的人数.

【详解】解：设平均一人传染了 $x$ 人，

$x+1+(x+1)x=81$，

解得$x_1=8$，$x_2=-10$（不符合题意，舍去）

经过三轮传染后患上流感的人数为：$81+8\times81=729$（人），

答：平均一个人传染了 8 个人，经过三轮传染后共有 729 人患上了流感.

**【变式 2-3】**（2023 上·河南南阳·六年级校考阶段练习）今年秋冬季是支原体肺炎的感染高发期，多见于 5 岁及以上儿童，如果外出时能够戴上口罩、做好防护，可以有效遏制支原体肺炎病毒的传染，现在，有一个人患了支原体肺炎，经过两轮传染后共有 49 人患了支原体肺炎（假设每个人每轮传染的人数同样多）.

(1)每轮传染中平均一个人传染了几个人？

(2)某药房最近售出了普通医用口罩和 $N95$ 医用口罩共 180 盒，已知售出的普通医用口罩的盒数不少于 $N95$ 医用口罩的 5 倍，每盒 $N95$ 医用口罩的价格为 10 元，每盒普通医用口罩的价格为 4 元，则售出 $N95$ 医用口罩和普通医用口罩各多少盒时，总销售额最多？请说明理由.

【答案】(1)每轮传染中平均一个人传染了 6 个人

(2)售出 $N95$ 医用口罩和普通医用口罩各 30 盒和 150 盒时，总销售额最多

【分析】本题主要考查一元二次方程，一次函数的应用，不等式的应用，解题的关键是找到等量(或不等量)关系，列方程或列不等式.

（1）设平均一人传染了 $x$ 人，根据有一人患了流感，经过两轮传染后共有 49 人患了流感，列方程求解；

（2）设售出的 $N95$ 医用口罩的数量是 $a$ 盒，普通医用口罩的数量是 $(180-a)$ 盒，根据题意得列不等式得到 $a\le30$，设总销售额为 $y$ 元，根据题意得到 $y=10a+4(180-a)=6a+720$

，根据一次函数的性质得到结论.

【详解】（1）解：设每轮传染中平均一个人传染了 $x$ 个人.

由题意，得 $1+x+x(1+x)=49$ 解得 $x_1=6$，$x_2=-8$．经检验，$x=6$ 符合题意.

答：每轮传染中平均一个人传染了 6 个人.

（2）设售出 $N95$ 医用口罩的盒数是 $a$ 盒，则售出普通医用口罩的盒数是 $(180-a)$ 盒．总销售额为 $y$ 元.

由题意，得 $5a\le 180-a$，解得 $a\le 30$.

$y=10a+4(180-a)=6a+720$.

$\because 6>0$，

$\therefore y$ 随 $a$ 的增大而增大.

$\therefore$ 当 $a=30$ 时，$y$ 有最大值，此时 $180-30=150$.

答：售出 $N95$ 医用口罩和普通医用口罩各 30 盒和 150 盒时，总销售额最多.

## 考点三：用一元二次方程解决数字问题

例 3.（2023 上·河南信阳·九年级校联考阶段练习）读诗词解题：大江东去浪淘尽，千古风流人物；而立之年督东吴，早逝英年两位数；十位恰小个位三，个位平方与寿符；哪位同学算得快，多少年华属周瑜？则周瑜去世时的年龄是_____岁.

【答案】36

【分析】设个位数字 $x$，则十位数字为 $(x-3)$，根据个位平方与寿符，列出一元二次方程进行求解即可.

【详解】解：设个位数字 $x$，则十位数字为 $(x-3)$，由题意，得：

$x^2=10(x-3)+x$，

整理，得：$x^2-11x+30=0$，

解得：$x_1=5, x_2=6$，

当 $x=5$ 时，两位数为：25；当 $x=6$ 时，两位数为 36，

$\because$ 而立之年，

$\therefore$ 25 不合题意，舍去；

$\therefore$ 周瑜去世时的年龄是 36 岁；

故答案为：36.

【点睛】本题考查一元二次方程的应用．读懂题意，找准等量关系，正确的列出方程，是解题的关键.

**【变式 3-1】**（2023 上·四川泸州·九年级统考期中）小明同学是一位古诗文的爱好者，在学习了一元二次方程这一章后，改编了苏轼诗词《念奴娇•赤壁怀古》：“大江东去浪淘尽，早逝英年两位数．十位恰小个位三，个位平方与寿同．哪位学子算得快，则可列方程为（　　）

$A$．$10x+(x-3)=(x-3)^2$　　$B$．$10(x-3)+x=x^2$

$C$．$10x+(x+3)=(x+3)^2$　　$D$．$10(x+3)+x=(x+3)^2$

【答案】$C$

【分析】本题考查一元二次方解决数字问题，设周瑜去世时年龄的十位数字是 $x$，根据个位平方与寿同列式即可得到答案；

【详解】解：设周瑜去世时年龄的十位数字是 $x$，由题意可得，

$10x+(x+3)=(x+3)^2$，

故选：$C$.

**【变式 3-2】**（2023 上·河南驻马店·九年级统考阶段练习）苏轼在《念奴娇－赤壁怀古》中写道：遥想公瑾当年，小乔初嫁了，雄姿英发．羽扇纶巾，谈笑间，樯橹灰飞烟灭．根据资料，周瑜三十岁当上了东吴都督，去世时年龄是两位数，个位数比十位数大 3，个位数的平方等于去世时的年龄．若设周瑜去世时年龄的十位数为 $x$，则根据题意可列出方程_____.

【答案】$(x+3)^2=10x+x+3$

【分析】根据个位及十位数字间的关系，可得出他去世时年龄的个位数为 $x+3$，结合个位数的平方等于他去世时的年龄，可列出关于 $x$ 的一元二次方程，此题得解.

【详解】解：∵去世时年龄是两位数，十位数比个位数小 3，他去世时年龄的十位数为 $x$，

∴他去世时年龄的个位数为 $x+3$，

根据题意得：$(x+3)^2=10x+x+3$，

故答案为：$(x+3)^2=10x+x+3$.

【点睛】本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键.

**【变式 3-3】**（2023 上·辽宁·九年级统考期中）一个两位数的个位数字与十位数字的和为 11，并且个位数字与十位数字的平方和为 85，求这个两位数.

【答案】两位数为 92 或 29

【分析】本题考查了一元二次方程的应用，设这个两位数的个位数字为 $x$，则十位数字为 $(11-x)$，根据个位数字与十位数字的平方和为 85，即可得出关于 $x$ 的一元二次方程，解之即可得出结论．找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键.

【详解】解：设个位数字为 $x$，则十位数字为 $(11-x)$，

$x^2+(11-x)^2=85$，

解得：$x_1=2$，$x_2=9$，

当 $x=2$ 时，两位数为 92，

当 $x=9$ 时，两位数为 29.

答：两位数为 92 或 29.

## 考点四：用一元二次方程解决营销问题

例 4.（2023 下·八年级课时练习）今年大德福超市以每件 25 元的进价购进一批商品，当商品售价为 40 元时，三月份销售 256 件，四、五月该商品十分畅销，销售量持续上涨，在售价不变的基础上，五月份的销售量达到 400 件.

(1)求四、五这两个月销售量的月平均增长率.

(2)从六月份起，商场为了减少库存，从而采用降价促销方式，经调查发现，该商品每降价 1 元，月销量增加 5 件，当商品降价多少元时，商场月获利 4250 元？

【答案】(1)四、五这两个月销售量的月平均增长率为 25%

(2)当商品降价 5 元时，商场月获利 4250 元

【分析】本题主要考查了一元二次方程的实际应用，正确理解题意找到等量关系列出方程是解题的关键.

（1）设四、五这两个月销售量的月平均增长率为 $x$，则四月份的销售量为 $256(1+x)$ 件，五月份的销售量为 $256(1+x)^2$ 件，再根据五月份的销售量为 400 件列出方程求解即可；

（2）设商品降价 $m$ 元时，商场月获利 4250 元，则月销售量为 $(400+5x)$ 件，每件的利润为 $(40-25-x)$，再根据总利润＝每件利润×销售量列出方程求解即可.

【详解】（1）解：设四、五这两个月销售量的月平均增长率为 $x$，

由题意得 $256(1+x)^2=400$，

解得 $x=0.25=25\%$ 或 $x=-2.25$（舍去），

∴四、五这两个月销售量的月平均增长率为 25%；

（2）解：设商品降价 $m$ 元时，商场月获利 4250 元，

由题意得，$(40-25-x)(400+5x)=4250$，

整理得：$x^2+65x-350=0$，

解得 $x=5$ 或 $x=-70$，

∴当商品降价 5 元时，商场月获利 4250 元.

【点睛】，

**【变式 4-1】**（2023 上·河南商丘·九年级校联考阶段练习）2023 河南省消费帮扶“土特产”产销对接专项行动在漯河市隆重开幕，此次活动以“打造‘土特产’名优品牌，赋能乡村产业振业”为主题，吸纳全省各地市的商户前来参展．某商场从展销会签订合同购进某种特产商品，每件进价为 100 元．经调查发现，若每件售价为 150 元，平均每天售出 60 件；当特产商品售价每降低 1 元时，商品平均每天可多售出 3 件.

(1)当特产商品售价降低 5 元时，每天销售量可达到_____件，每天盈利_____元.

(2)为了减少库存，当每件特产商品降价多少元时，商场通过销售这种特产商品每天可盈利 3600 元？

【答案】(1)75；3375

(2)当每件特产商品降价 20 元时，商场通过销售这种特产商品每天可盈利 3600 元

【分析】本题考查应用一元二次方程解决实际问题.

（1）根据每件的利润×件数＝总利润求解即可；

（2）设每件特产商品降价 $x$ 元，则每件特产商品的销售利润为 $(150-x-100)$ 元，每天可售出 $(60+3x)$ 件．根据“每天可盈利 3600 元”即可列出方程，求解即可.

【详解】（1）当特产商品售价降低 5 元时，销售量为：$60+3\times5=75$（件），

每天盈利：$(150-100-5)\times75=3375$（元）.

故答案为：75，3375

（2）设每件特产商品降价 $x$ 元，则每件特产商品的销售利润为 $(150-x-100)$ 元，每天可售出 $(60+3x)$ 件．根据题意，得

$(150-x-100)(60+3x)=3600$，

整理，得 $x^2-30x+200=0$，

解得 $x_1=10, x_2=20$.

为了减少库存，则 $x=20$.

答：当每件特产商品降价 20 元时，商场通过销售这种特产商品每天可盈利 3600 元.

**【变式 4-2】**（2023 上·广东东莞·九年级校联考期中）海战博物馆在 2021 年共接待游客达 10 万人次，预计在 2023 年将接待游客达 12.1 万人次.

(1)求海战博物馆 2021 至 2023 年接待游客人次的平均增长率.

(2)海战博物馆销售一款水果茶，每杯成本价为 6 元，若每杯定价 25 元，则平均每天可销售 300 杯，若每杯价格降低 1 元，则平均每天可多销售 30 杯，设每杯降价 $a$ 元，为了每天利润达到 6300 元，又能让顾客获得最大优惠，求每杯水果茶的定价.

【答案】(1)博物馆 2021 至 2023 年接待游客人次的平均增长率是10%

(2)当每杯售价定为 20 元时，既能让顾客获得最大优惠，又可让店家在此款水果茶实现平均每天 6300 元的利润额

【分析】本题考查一元二次方程的应用，解题的关键是读懂题意，列出一元二次方程；

（1）设博物馆 2021 至 2023 年期间接待游客人次的平均增长率是 $x\%$，可得：$10(1+x\%)^2=12.1$，即可解得博物馆 2021 至 2023 年期间接待游客人次的平均增长率是10%；

（2）设每杯降价为 $a$ 元，可得：$(25-a-6)(300+30a)=6300$，解得 $a=5$ 或 $a=4$，又让顾客获得最大优惠，即知当每杯售价定为 20 元时，既能让顾客获得最大优惠，又可让店家在此款水果茶实现平均每天 6300 元的利润额.

【详解】（1）解：设博物馆 2021 至 2023 年接待游客人次的平均增长率是 $x$，

根据题意得：$10(1+x)^2=12.1$，解得 $x=10\%$，$x=-2.1$（舍去），

答：博物馆 2021 至 2023 年接待游客人次的平均增长率是10%；

（2）设每杯降价为$a$元，

根据题意得：$(25-a-6)(300+30a)=6300$,

解得$a=5$或$a=4$，

∵让顾客获得最大优惠，

∴$a$取 5，

定价为：$25-5=20$元，

答：当每杯售价定为 20 元时，既能让顾客获得最大优惠，又可让店家在此款水果茶实现平均每天 6300 元的利润额.

**【变式 4-3】**（2023 上·河北张家口·九年级统考期末）某商场一种商品的进价为每件 30 元，售价为每件 40 元时，每天可以销售 48 件，为尽快减少库存，商场决定降价促销.

(1)若该商品连续两次下调相同的百分率后售价降至每件 32.4 元，求两次下降的百分率；

(2)经调查，若该商品每降价 0.5 元，每天可多销售 4 件.

①每天要想获得 504 元的利润，每件应降价多少元？

②能不能一天获得 520 元的利润？请说明理由.

【答案】(1)10%

(2)①3 元；②不能，理由见解析

【分析】本题主要考查了一元二次方程的应用，理解题意，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解此题的关键.

（1）设下降的百分率是$x$，利用经过两次降价后的价格=原价×（1−两次下降的百分率）$^2$，即可得出关于$x$的一元二次方程，解方程即可得出答案；

（2）①设每件应降价$y$元，根据“每天获得 504 元的利润”列出一元二次方程，解方程即可；②设每件应降价$z$元，根据“一天获得 520 元的利润” 列出一元二次方程，解方程即可.

【详解】（1）解：设下降的百分率是$x$，

由题意得：$40(1-x)^2=32.4$，

解得$x_1=0.1$，$x_2=1.9$（舍去），

答：下降的百分率是10%；

（2）解：①设每件应降价$y$元，

由题意得：$(40-y-30)\left(48+4\times\dfrac{y}{0.5}\right)=504$，

解得$y_1=3$，$y_2=1$，

Q 要尽快减少库存，

∴每件应降价 3 元；

②不能，

设每件应降价 $z$ 元，

由题意得：$(40-z-30)\left(48+4\times\dfrac{z}{0.5}\right)=520$，

整理得：$z^2-4z+5=0$，

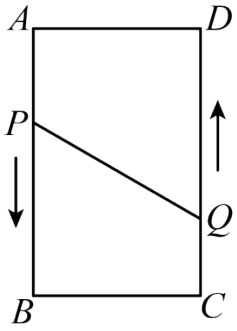
$\because\Delta=(-4)^2-4\times1\times5=16-20=-4<0$，

∴方程没有实数根，

∴不能一天的利润是 520 元.

## 考点五：用一元二次方程解决动态几何问题

例 5.（2023 上·全国·九年级专题练习）如图，$A$、$B$、$C$、$D$ 为矩形的四个顶点，$AB=16\text{cm}$，$AD=6\text{cm}$，动点 $P$、$Q$ 分别从点 $A$、$C$ 同时出发，点 $P$ 以 $3\text{cm/s}$ 的速度向点 $B$ 移动，一直到达 $B$ 为止，点 $Q$ 以 $2\text{cm/s}$ 的速度向 $D$ 移动.




(1)$P$、$Q$ 两点从出发开始到几秒时，四边形 $PBCQ$ 的面积为 $33\text{cm}^2$；

(2)$P$、$Q$ 两点从出发开始到几秒时，点 $P$ 和点 $Q$ 的距离是 $10\text{cm}$.

【答案】(1)$P$、$Q$ 两点从出发开始到 5 秒时四边形 $PBCQ$ 的面积为 $33\text{cm}^2$

(2)从出发到 1.6 秒或 4.8 秒时，点 $P$ 和点 $Q$ 的距离是 $10\text{cm}$

【分析】此题考查了图形与动点问题，勾股定理，解一元一次方程，解一元二次方程：

（1）设 $P$、$Q$ 两点从出发开始到 $x$ 秒时四边形 $PBCQ$ 的面积为 $33\text{cm}^2$，根据梯形面积公式列方程求解即可；

（2）设 $P$，$Q$ 两点从出发经过 $t$ 秒时，点 $P$，$Q$ 间的距离是 $10\text{cm}$，作 $QE\perp AB$，垂足为 $E$，求出 $PE=AB-AP-BE=|16-5t|$，由勾股定理，得 $(16-5t)^2+6^2=10^2$，求解即可.

【详解】（1）解：设 $P$、$Q$ 两点从出发开始到 $x$ 秒时四边形 $PBCQ$ 的面积为 $33\text{cm}^2$，

则 $PB=(16-3x)\text{cm}$，$QC=2x\text{cm}$，

根据梯形的面积公式得 $\dfrac{1}{2}(16-3x+2x)\times6=33$，

解之得 $x=5$，

（2）设 $P$，$Q$ 两点从出发经过 $t$ 秒时，点 $P$，$Q$ 间的距离是10cm，

作 $QE \perp AB$，垂足为 $E$，

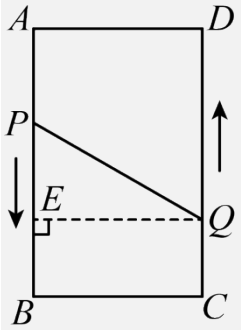
则 $QE=AD=6$，$PQ=10$，

$\because PA=3t$，$CQ=BE=2t$，

$\therefore PE=AB-AP-BE=|16-5t|$，

由勾股定理，得 $(16-5t)^2+6^2=10^2$，

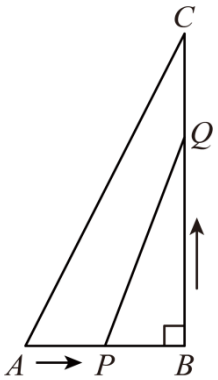
解得 $t_1=4.8$，$t_2=1.6$.




答：（1）$P$、$Q$ 两点从出发开始到 5 秒时四边形 $PBCQ$ 的面积为 $33cm^2$；

（2）从出发到 1.6 秒或 4.8 秒时，点 $P$ 和点 $Q$ 的距离是10cm.

**【变式 5-1】**（2023 上·辽宁沈阳·九年级统考期末）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=5cm$，$BC=10cm$，$\angle ABC=90°$，点 $P$ 从点 A 开始沿 $AB$ 边向点 $B$ 以1cm/s 的速度移动，点 $Q$ 从点 $B$ 开始沿 $BC$ 边向点 $C$ 以 2cm/s 的速度移动．如果点 $P$，$Q$ 分别从点 A，$B$ 同时出发，那么出发后____秒时，线段 $PQ$ 的长度等于5cm.




【答案】2

【分析】本题考查了一元二次方程的应用，勾股定理，设出发后 $x$ 秒时，线段 $PQ$ 的长度等于5cm，可列出方程 $(5-x)^2+(2x)^2=5^2$，解方程即可求解，根据题意列出方程是解题的关键.

【详解】解：设出发后 $x$ 秒时，线段 $PQ$ 的长度等于5cm，依题意得，

$(5-x)^2+(2x)^2=5^2$，

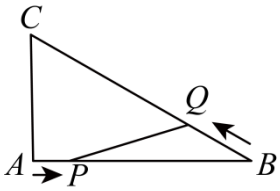
整理得，$x^2-2x=0$，

解得 $x_1=0$（不符合题意，舍去），$x_2=2$，

∴出发后2秒时，线段$PQ$的长度等于5cm，

故答案为：2．

**【变式5-2】**（2023上·江苏无锡·九年级校考阶段练习）如图，在$\triangle ABC$中$AB=6\text{cm}$，$BC=7\text{cm}$，$\angle ABC=30°$点$P$从$A$点出发，以1cm/s的速度向$B$点移动，点$Q$从$B$点出发，以2cm/s的速度向$C$点移动，当一个点到达终点时，另一个点也随即停止运动．如果$P$、$Q$两点同时出发．请回答：




(1)经过几秒后$\triangle PBQ$的面积等于$4\text{cm}^2$？

(2)$\triangle PBQ$的面积能否等于$5\text{cm}^2$，并说明理由？

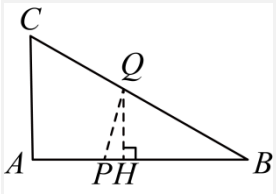
【答案】(1)$t=2$；

(2)不能，理由见解析．

【分析】（1）本题主要考查一元二次方程的应用，解答本题的关键在于明确题意，根据动点表示出，动点运动$t$秒后$BP=6-t$，表示出$\triangle PBQ$的高，$\triangle PBQ$的面积即可求解．

（2）本题主要考查一元二次方程的应用，解答本题的关键在于明确题意，和（1）一样，根据动点表示出，动点运动$t$秒后$BP=6-t$，表示出$\triangle PBQ$的高，表示出$\triangle PBQ$的面积列方程求解即可求解．

【详解】（1）解：设动点运动$t$秒后$\triangle PBQ$的面积等于$4\text{cm}^2$，$\triangle PBQ$的高为$h$，




∵点$P$以1cm/s从$A$点出发，$t$秒后，$AP=t$，$BP=6-t$，$0\le t\le 6$；

点$Q$以2cm/s从$B$点出发，$t$秒后，$BQ=2t$，$0\le 2t\le 7$

过点$Q$作$AB$的垂线$QH$，则$QH$即为$\triangle PBQ$的高；

又∵$\angle ABC$=30°，

∴$\triangle PBQ$的高即为$BQ$的一半，

∴$h=t$．

$$S_{\triangle PBQ}=\frac{1}{2}PB\cdot h$$

$$=\frac{1}{2}(6-t)t$$

$$=-\frac{1}{2}t^2+3t\ .$$

当$\triangle PBQ$的面积等于$4\text{cm}^2$，

即，$-\frac{1}{2}t^2+3t=4$

解得：$t=2$，$t=4$（舍去）．

（2）$S_{\triangle PBQ}=-\frac{1}{2}t^2+3t$

当$S_{\triangle PBQ}=5$时，

即，$-\frac{1}{2}t^2+3t=5$

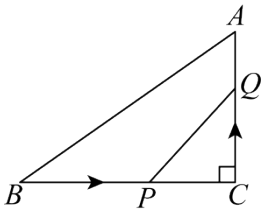
$-\frac{1}{2}t^2+3t-5=0$

$\Delta=9-4\times(-\frac{1}{2})\times(-5)=-1<0$，

此时方程无实数根，

$\therefore\triangle PBQ$的面积不能等于$5\text{cm}^2$．

**【变式 5-3】**（2023 上·内蒙古包头·九年级校考阶段练习）如图，$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=6\text{cm}$，$BC=8\text{cm}$，动点$P$从点$B$出发以4cm/s的速度向点$C$移动，同时动点$Q$从点$C$出发以2cm/s的速度向点$A$移动，其中一点到达终点后另一点也随之停止运动，设它们的运动时间为$t\text{s}$．




(1)运动几秒时，$\triangle CPQ$为等腰三角形？

(2)$t$为何值时，$\triangle CPQ$的面积等于$\triangle ABC$面积的$\frac{1}{8}$？

(3)在运动过程中，$PQ$的长度能否为$2\text{cm}$？试说明理由．

【答案】(1)运动$\frac{4}{3}$秒时，$\triangle CPQ$为等腰三角形

(2)$t$为$\frac{1}{2}$或$\frac{3}{2}$秒，$\triangle CPQ$的面积等于$\triangle ABC$面积的$\frac{1}{8}$

(3)不能，理由见详解

【分析】本题考查了动点问题，三角形的面积，一元二次方程的应用，特别是（2）注意分类讨论．

（1）根据$PC=CQ$列方程求解即可；

（2）根据$\triangle CPQ$的面积等于$\triangle ABC$面积的$\frac{1}{8}$，列出关于$t$的方程，解方程即可；

（3）根据勾股定理列方程，此方程无解，于是得到在运动过程中，$PQ$的长度能否为$2\text{cm}$．

【详解】（1）解：经过$t$秒后，$PC=(8-4t)\text{cm}$，$CQ=2t\text{cm}$，

若$\triangle CPQ$为等腰三角形，

则$PC=CQ$，即$(8-4t)=2t$

则$4-2t=t$，

解得：$t=\frac{4}{3}$，

∴运动$\frac{4}{3}$秒时，$\triangle CPQ$为等腰三角形；

（2）解：当$\triangle CPQ$的面积等于等于$\triangle ABC$面积的$\frac{1}{8}$，

即$\frac{1}{2}\times(8-4t)\times 2t=\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}\times 6\times 8$

整理得：$4t^2-8t+3=0$，

解得：$t_1=\frac{1}{2}$，$t_2=\frac{3}{2}$，

∴经过$\frac{1}{2}$或$\frac{3}{2}$秒后，$\triangle CPQ$的面积等于$\triangle ABC$面积的$\frac{1}{8}$；

（3）解：不能，过程如下：

∵$\angle C=90°$，

∴$(8-4t)^2+(2t)^2=2^2$，

整理得：$5t^2-16t+15=0$，

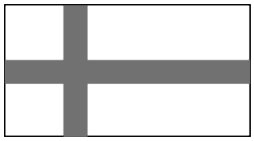
∵$\Delta=16^2-4\times5\times15=256-300=-44<0$，

∴此方程无实数解，

∴在运动过程中，$PQ$的长度不能为$2\text{cm}$．

## 考点六：用一元二次方程解决与图形有关的问题

例 6.（2023 上·江苏南京·九年级统考期中）如图，在长 40$m$、宽 22$m$ 的矩形地块，修筑两条等宽且互相垂直的道路，余下的铺上草坪．要使草坪的面积是$760\text{m}^2$，道路的宽应为多少？



【答案】2m

【分析】本题考查一元二次方程的实际应用，通过平移，四块草坪可以拼成一个矩形，设道路的宽为$x\text{m}$，则拼成矩形的长和宽分别为$(40-x)\text{m}$，$(22-x)\text{m}$，根据草坪的面积是$760\text{m}^2$列一元二次方程，解方程即可．

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/778072037020006111