

# 数学 (京改版)

八年级上册

## 第十一章 实数和二次根式

### 11.5 二次根式及其性质



# 学习目标

1. 理解二次根式的概念；
2. 掌握二次根式有意义的条件；
3. 会利用二次根式的非负性解决相关问题；
4. 经历二次根式的性质的发现过程，体验归纳、猜想的思想方法；
5. 会运用二次根式的两个性质进行化简计算.

1. 什么叫做一个数的平方根？如何表示？

一般地，若一个数的平方等于 $a$ ，则这个数就叫做 $a$ 的平方根.

$a$ 的平方根是 $\pm\sqrt{a}$  ( $a\geq 0$ ).

2. 什么是一个数的算术平方根？如何表示？

正数正的平方根叫做它的算术平方根.

0的算术平方根是0.

用 $\sqrt{a}$  ( $a\geq 0$ )表示.

## 知识点一 二次根式的概念

### 活动1 回忆算术平方根和平方根知识填空

(1) 9 的平方根是  $\pm 3$ , 9 的算术平方根是 3,

(2) 7 的平方根是  $\pm\sqrt{7}$ , 7 的算术平方根是  $\sqrt{7}$

(3) 0 有算术平方根吗? 负数有算术平方根吗?

(4) 什么叫做平方根? 什么叫做算术平方根吗?

## 归纳知识

1. 如果一个数的平方等于  $a$  , 那么这个数叫做  $a$  的平方根. 表示为  $\pm\sqrt{a}$
2. 如果  $x^2 = a$  ( $x \geq 0$ ) , 那么  $x$  称为  $a$  的算术平方根. 表示为  $:\sqrt{a}$
3. 负数没有算术平方根.

**活动2** 思考下列各式表示什么意义，其结果有什么特点？

$$\sqrt{9} \quad \sqrt{\frac{9}{25}} \quad \sqrt{0} \quad \sqrt{7} \quad \sqrt{a} (a \geq 0)$$

**特点：** 非负数的算术平方根



## 归纳知识

### 二次根式的定义：

形如  $\sqrt{a}$  ( $a \geq 0$ ) 的式子叫做二次根式. “ $\sqrt{\quad}$ ” 称为二次根号.

### 注意：

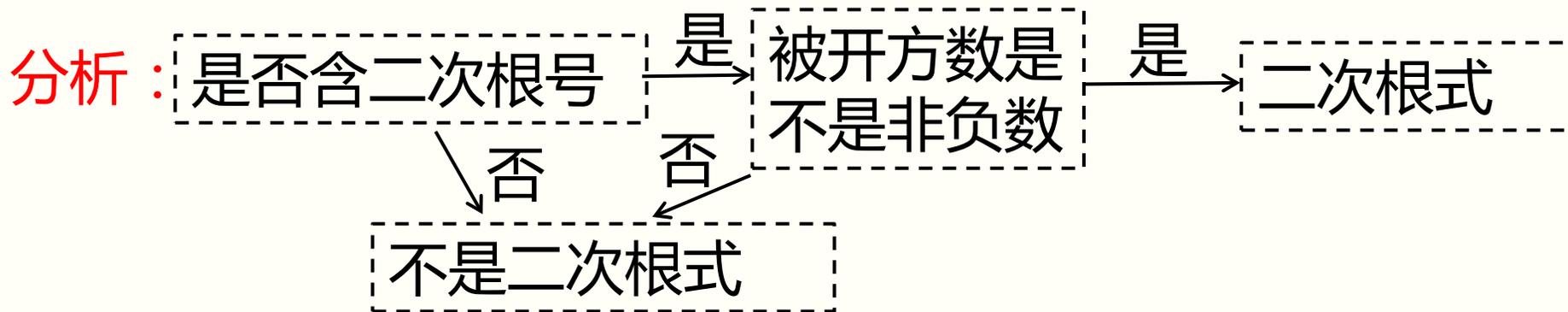
1.  $\sqrt{a}$  既可表示开方运算,也可表示运算的结果.
2. 二次根式实质上是非负数的算术平方根.
3.  $a$  既可以是一个数,也可以是一个式子.

## 典例精析

【例1】下列各式中，哪些是二次根式？哪些不是？

(1)  $\sqrt{32}$ ; (2) 6; (3)  $\sqrt{-12}$ ; (4)  $\sqrt{-m}$  ( $m \leq 0$ );

(5)  $\sqrt{xy}$  ( $x, y$  异号); (6)  $\sqrt{a^2 + 1}$ ; (7)  $\sqrt[3]{5}$ .



解：(1)(4)(6)均是二次根式，其中 $a^2+1$ 属于“非负数+正数”的形式一定大于零。  
 (3)(5)(7)均不是二次根式。

## 练一练

1、判断下列式子，哪些是二次根式？

(1)  $\sqrt{\frac{1}{3}}$       (2)  $\sqrt{-3}$       (3)  $-\sqrt{x^2+1}$       (4)  $\sqrt[3]{7}$       (5)  $\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$

(1)(3)(5)均是二次根式，其中 $x^2+1$ 属于“非负数+正数”的形式一定大于零.

(2)(4)均不是二次根式.

## 知识点二 二次根式有意义的条件

当 $x$ 取何值时，下列根式有意义？

$$(1)\sqrt{x-2}; \quad (2)\sqrt{-2x+1}.$$

解：(1)由 $x-2 \geq 0$ ，得 $x \geq 2$ ；

(2)由 $-2x+1 \geq 0$ ，得 $x \leq \frac{1}{2}$

.

二次根式有意义的条件

被开方数大于或等于0，即 $a \geq 0$ .

思考：当 $x$ 是怎样的实数时  $\sqrt{x^2}$  在实数范围内有意义？ $\sqrt{x^3}$  呢？

解：由 $x^2 \geq 0$ ，得 $x$ 是任意实数，

$\therefore$ 当 $x$ 为任意实数时， $\sqrt{x^2}$  都有意义.

由 $x^3 \geq 0$ ，得 $x \geq 0$ ，

$\therefore$ 当 $x \geq 0$  时， $\sqrt{x^3}$  有意义.

## 典例精析

【例2】当 $x$ 是怎样的实数时 $\sqrt{x-2}$  在实数范围内有意义？

解：由 $x-2 \geq 0$ ，得  
 $x \geq 2$ .

当 $x \geq 2$ 时， $\sqrt{x-2}$  在实数范围内有意义.

## 练一练

1、当 $x$ 是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？

$$(1) \frac{1}{\sqrt{x-1}};$$

$$(2) \frac{\sqrt{x+3}}{x-1}.$$

解 (1) 由题意得 $x-1 > 0$ ,

$$\therefore x > 1.$$

(2)  $\because$ 被开方数需大于或等于零,

$$\therefore 3+x \geq 0,$$

$$\therefore x \geq -3.$$

$\because$ 分母不能等于零,  $\therefore x-1 \neq 0$ ,  $\therefore x \neq 1$ .

$$\therefore x \geq -3 \text{ 且 } x \neq 1.$$

1. 单个二次根式如  $\sqrt{A}$  有意义的条件:  $A \geq 0$
2. 多个二次根式相加如  $\sqrt{A} + \sqrt{B} + \dots + \sqrt{N}$  有意义的条件: 
$$\begin{cases} A \geq 0; \\ B \geq 0; \\ \dots \\ N \geq 0; \end{cases}$$
3. 二次根式作为分式的分母如  $\frac{B}{\sqrt{A}}$  或  $\sqrt{\frac{1}{A}}$  有意义的条件:  $A > 0$
4. 二次根式与分式的和如  $\frac{\sqrt{A}}{B}$  或  $\sqrt{A} + \frac{C}{B}$  有意义的条件:  $A \geq 0$  且  $B \neq 0$



**思考** 1. 当 $x$ 是怎样的实数时,  $\sqrt{x^2}$  在实数范围内有意义?  $\sqrt{x^3}$  呢?

2. 二次根式 $\sqrt{a}$  的被开方数 $a$ 的取值范围是什么? 它本身的取值范围又是什么?

$x$ 为任意实数时,  $\sqrt{x^2}$  都有意义; 当 $x \geq 0$ 时,  $\sqrt{x^3}$  有意义.

当 $a > 0$ 时,  $\sqrt{a}$  表示 $a$ 的算术平方根, 因此 $\sqrt{a} > 0$ ; 当 $a = 0$ 时,  $\sqrt{a}$  表示 $0$ 的算术平方根, 因此 $\sqrt{a} = 0$ . 这就是说, 当 $a \geq 0$ 时 $\sqrt{a} \geq 0$ .

二次根式的双重非负性

1、若  $|a-2| + \sqrt{b-3} + (c-4)^2 = 0$ ，求  $a-b+c$  的值.

解：因为  $|a-2| \geq 0, \sqrt{b-3} \geq 0, (c-4)^2 \geq 0$ ,

由题意可知  $a-2=0, b-3=0, c-4=0$ ,

解得  $a=2, b=3, c=4$ .

所以  $a-b+c=2-3+4=3$ .

2、已知  $|3x-y-1|$  和  $\sqrt{2x+y-4}$  互为相反数，求  $x+4y$  的平方根.

解：由题意得  $3x-y-1=0$  且  $2x+y-4=0$ .

解得  $x=1$ ,  $y=2$ .

$$\therefore x+4y=1+2 \times 4=9,$$

$\therefore x+4y$  的平方根为  $\pm 3$ .

## 知识点三 二次根式的化简求值

 **探究** 根据算术平方根的意义填空：

$$(\sqrt{4})^2 = \underline{4}; \quad (\sqrt{2})^2 = \underline{2}; \quad \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = \underline{\frac{1}{3}}; \quad (\sqrt{0})^2 = \underline{0}.$$

$\sqrt{4}$  是 4 的算术平方根，根据算术平方根的意义， $\sqrt{4}$  是一个平方等于 4 的非负数. 因此有  $(\sqrt{4})^2 = 4$ .

同理， $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ,  $\sqrt{0}$  分别是 2,  $\frac{1}{3}$ , 0 的算术平方根，因此有  $(\sqrt{2})^2 = 2$ ,  $(\sqrt{\frac{1}{3}})^2 = \frac{1}{3}$ ,  $(\sqrt{0})^2 = 0$ .

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad (a \geq 0)$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：  
<https://d.book118.com/778123050040006137>