

第三章 运输问题

在生产实际中，经常需要将某种物资从一些产地运往一些销地，因而存在如何调运使总的运费最小的问题。这类问题一般可用线性规划模型来描述，当然可以用单纯形法求解。但由于其模型结构特殊，学者们提供了更为简便和直观的解法——表上作业法。此外,有些线性规划问题从实际意义上看，并非运输问题，但其模型结构类似运输问题，也可以化作运输问题进行求解。

第一节 运输问题及其数学模型

首先来分析下面的问题。

例 3。1 农产品经销公司有三个棉花收购站，向三个纺织厂供应棉花。三个收购站 A_1 、 A_2 、 A_3 的供应量分别为 50kt、45kt 和 65kt，三个纺织厂 B_1 、 B_2 、 B_3 的需求量分别为 20kt、70kt 和 70kt。已知各收购站到各纺织厂的单位运价如表 3-1 所示（单位：千元/kt）问如何安排运输方案，使得经销公司的总运费最少？

表 3-1

收购站 \ 纺织厂	纺织厂		
	B_1	B_2	B_3
A_1	4	8	5
A_2	6	3	6
A_3	2	5	7

设 x_{ij} 表示从 A_i 运往 B_j 的棉花数量，则其运输量表如下表所示。

表 3—2

收购站 \ 纺织厂	纺织厂			供应量 (kt)
	B_1	B_2	B_3	
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	50
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	45
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	65
需求量 (kt)	20	70	70	160

由于总供应量等于总需求量，因此，一方面从某收购站运往各纺织厂的总棉花数量等该收购站的供应量，即

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 50 \\x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 45 \\x_{31} + x_{32} + x_{33} &= 65\end{aligned}$$

另一方面从各收购站运往某纺织厂的总棉花数量等该纺织厂的需要量,即

$$\begin{aligned}x_{11}+x_{21}+x_{31} &= 20 \\x_{12}+x_{22}+x_{32} &= 70 \\x_{13}+x_{23}+x_{33} &= 70\end{aligned}$$

因此有该问题的数学模型为

$$\begin{aligned}\min f &= 4x_{11}+8x_{12}+5x_{13}+6x_{21}+3x_{22}+6x_{23}+2x_{31}+5x_{32}+7x_{33} \\x_{11}+x_{12}+x_{13} &= 50 \\x_{21}+x_{22}+x_{23} &= 45 \\x_{31}+x_{32}+x_{33} &= 65 \\x_{11}+x_{21}+x_{31} &= 20 \\x_{12}+x_{22}+x_{32} &= 70 \\x_{13}+x_{23}+x_{33} &= 70 \\x_{ij} &\geq 0, \quad i=1, 2, 3; \quad j=1, 2, 3\end{aligned}$$

生产实际中的一般的运输问题可用以下数学语言描述。

已知有 m 个生产地点 $A_i, i=1, \cdots, m$, 可供应某种物资,其供应量(产量)为 $a_i, i=1, \cdots, m$; 有 n 个销售地点 $B_j, j=1, \cdots, n$, 需要该种物资, 其需要量(销量)为 $b_j, j=1, \cdots, n$; 从 A_i 到 B_j 运输单位物资的运价(单价)为 c_{ij} ; 设 $\sum a_i = \sum b_j$, 这些数据可汇总于如下产销平衡表, 现要制定一个使总运费最小的调运方案。

表 3—3 运输问题产销平衡表

销地 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	$\begin{matrix} \Sigma a_i \\ \Sigma b_j \end{matrix}$

若用 x_{ij} 表示从 A_i 到 B_j 的运量, 在产销平衡的条件下, 要求得总运费最小的调运方案, 其数学模型如下 (模型 Y)

$$\begin{aligned}\min f &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i \quad i=1, \cdots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j \quad j=1, \cdots, n \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i=1, \cdots, m; \quad j=1, \cdots, n\end{aligned}$$

该模型中, 包含了 $m \times n$ 个变量, $(m+n)$ 个约束条件, 且有特殊结构的系数矩阵, 即

$$\begin{array}{cccccccccc}
 X_{11} & X_{12} & & X_{1n} & X_{21} & X_{22} & & X_{2n} & & X_{m1} & X_{m2} & & X_{mn} \\
 1 & 1 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & & 1 \\
 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & 1
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 m \text{ 行} \\
 n \text{ 行}
 \end{array}$$

上述矩阵的列向量可用 p_{ij} 来描述, 显然 p_{ij} 中除第 i 个元素和第 $m+j$ 个元素为 1 以外, 其余元素均为 0。

第二节 表上作业法

一、运输问题数学模型的基本概念

对于运输问题的数学模型 (模型 Y) 有如下定理。

定理 3.1 运输问题的数学模型必有最优解。

首先, 运输问题一定有可行解; 而任何单位运价 $c_{ij} \geq 0$, 因此对于任一可行解必有目标函数值大等于零, 即目标函数有下界。因此, 对于极小化的运输问题必有最优解。

定理 3.2 运输问题约束方程系数矩阵 A 的秩为 $m+n-1$, 即 $R(A)=m+n-1$ 。

由定理 3.1 可知, 我们在求解运输问题时就不需要进行无最优解的判别; 另外从定理 3.2 可知, 运输问题任一基可行解的非零分量的个数不能多于 $m+n-1$, 或者说基变量的个数为 $m+n-1$ 。

定义 3.1 (闭回路的定义) 在运输问题的调运表中, 凡能排成 $x_{i_1j_1}, x_{i_1j_2}, x_{i_2j_2}, \dots, x_{i_sj_s}, x_{i_sj_1}$ 形式的变量集合, 称为一个闭回路, 其中诸变量称为该闭回路的顶点。下表中即为两个闭回路。

表 3—4

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{27}
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}	x_{37}

闭回路 1: $x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{31}, x_{11}$;

闭回路 2: $x_{15}, x_{16}, x_{36}, x_{37}, x_{27}, x_{25}, x_{15}$;

闭回路有如下特点：①每个顶点都是转角；②每行或每列只有且仅有两个顶点；③每个顶点的连线都是水平的或垂直的。

定理 3.3 运输问题 $m+n-1$ 个变量 $x_{i_1j_1}, x_{i_2j_2}, \dots, x_{i_sj_s}$ ($s=m+n-1$) 构成某一基可行解的基变量的充要条件是：不包含以这些变量为顶点的闭回路。

该定理能帮助我们简便地求出基可行解或判别某一可行解是否为基可行解。

二、表上作业法

和一般线性规划一样，运输问题的最优解也一定可以在其基可行解中找到.类似于单纯形法，表上作业法仍然需要解决如下问题：

- (1) 确定初始基可行解
- (2) 最优解的判定；
- (3) 基可行解的转换。

(一)初始基可行解的确定

确定初始基可行解的方法很多,如最小元素法、伏格尔法、西北角法等。这里仅介绍既常用又简便的方法——最小元素法。

这种方法的基本思想就是就近供应,即从单位运价表中最小的运价开始确定供销关系，然后次小。一直到求出初始基可行解为止。结合例 3.2 给出最小元素法的具体步骤。

例 3.2 设有某物资从 A_1, A_2, A_3 处运往 B_1, B_2, B_3, B_4 四个地方，各处供应量、需求量及单位运价见下表。问应如何安排运输方案，才能使总运费最少？

表 3—5

销 地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	7	6	4	50
A_2	2	4	3	3	20
A_3	8	3	8	9	30
销量	40	20	15	25	100 100

- (1)列出如表 3—6 所示的调运表（包括单价、产量与销量）；
- (2) 在调运表中找出一个单位运价最小的格子，在相应的运量位置上填上尽可能大的数(必须满足约束条件)。
如表 3—6 中，单位运价 $c_{21}=2$ 为最小，这样在 c_{12} 所在格子相应运量位置上填上尽可能大的数 20（满足 A_2 产量为 20 的约束条件）；
- (3) 在填有数字的格子所在行或者列运量应该为 0 的位置上打“×”，（即表示该运量为 0，相应的变量为非基变量）且只能在行或列的方向上打“×”，不能同时在两个方向上打“×”；

如第 2 行第 1 个填有运量为 20 的格子,由于 A_2 的供应量已全部用完, 因此, 该行的其它格子的运量应全部为零, 这样在相应的运量位置上打 “ $\times$ ”。

(4)在没有填数，也未打 “ $\times$ ” 的格子重复上述 (2)、(3) 步；

(5) 最后剩下的一行或列只能填数,不能打 “ $\times$ ”。

表 3—6

销 地 产地	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	产量
A ₁	320	7 $\times$	6 5	4 25	50
A ₂	2 20	4 $\times$	3 $\times$	3 $\times$	20
A ₃	8 $\times$	3 20	8 10	9 $\times$	30
销量	40	20	15	25	

表中给出的 $x_{11}=20$, $x_{13}=5$, $x_{14}=25$, $x_{21}=20$, $x_{32}=20$, $x_{33}=10$, 其它 $x_{ij}=0$, 显然是该运输问题的一个可行解,同时，调运表中不包含以这些非零变量为顶点的闭回路。因此,该可行解就是该运输问题的一个基可行解。更一般地,可以证明，由最小元素法给出的可行解就是运输问题的一个基可行解。

(二)最优解的判定

最优解的判定，通常有两种方法，即闭回路法和位势法。

1. 闭回路法

在表 3-6 所描述的调运表中,任一非基可变量都可以作出这样的闭回路：该闭回路以选定的非基变量为第一个顶点，其余的顶点都是基变量。可以证明，对于任一非基变量，这样的闭回路只有唯一一条。

在这样的闭回路上,可以对调运方案进行调整，而能使调运方案仍然满足所有约束条件,即满足产销平衡的要求。例如,对表 3—6 中非基变量 x_{12} 作闭回路,如表 3—7。

表 3—7

销 地 产地	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	产量
A ₁	320	7 ●	6 5 ●	4 25	50
A ₂	2 20	4	3	3	20
A ₃	8	3 20 ●	8 10 ●	9	30
销量	40	20	15	25	

在表中所示的闭回路上,为满足产销平衡条件,若要使 x_{12} 增加 1 个单位运量, x_{13} 就必须减少 1 个运量,同理 x_{33} 必须增加 1 个运量, x_{32} 必须减少 1 个运量.

再来观察这样调整后,目标函数的变化。 x_{12} 增加 1 个单位运量,则运费增加 7 个单位, x_{13} 减少 1 个单位运量,则运费减少 6 个单位, x_{33} 增加 1 个单位运量,则运费增加 8 个单位, x_{32} 减少 1 个单位运量,则运费减少 3 个单位。这样,调整后目标函数总的变化量为： $7-6 + 8-3=6$ ，即目标函数增加 6 个单位。因此，以上的调整是不合算的,即上 x_{12} 为非基变量的选择是正确的。

这种在闭回路上进行的 1 个单位运量的调整所得到的目标函数值的变化量，实际上是相应非基变量的检验数.如上述 x_{12} 的检验数 $\sigma_{12}=6$ 。 ,由于运输问题为极小化，所以若所有的非基变量的检验数大等于零，则表中的基可行解就是最优解,否则,就要进行基可行解的转换.

对表 3—6 中，所有非基变量的检验数计算如下：

表 3—8

非基变量	闭回路	检验数
x_{12}	$x_{12} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{12}$	6
x_{22}	$x_{22} \rightarrow x_{21} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{22}$	4
x_{23}	$x_{23} \rightarrow x_{21} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{23}$	-2
x_{24}	$x_{24} \rightarrow x_{21} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{14} \rightarrow x_{24}$	0
x_{31}	$x_{31} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{31}$	3
x_{34}	$x_{34} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{14} \rightarrow x_{34}$	3

x_{23} 的检验数 $\sigma_{23}=-2 < 0$,故表 3—6 中的基可行解不是最优解。

2. 位势法

当运输问题变量个数较多时，闭回路法计算比较烦琐，此时位势法更为简便。

对于运输问题

$$\begin{aligned} \min f &= CX \\ AX &= b \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

设 B 为其一可行基，则相应的基可行解的各变量的检验数可用下式计算，即

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - C_B B^{-1} p_{ij}$$

又运输问题的对问题为

$$\begin{aligned} \max z &= Yb \\ YA &\geq C \\ Y &\text{ 无限制} \end{aligned}$$

其中, $Y=(u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_n)$ 为对偶变量，其中的各分量分别对应 $m+n$ 个条件.

根据对偶理论有 $Y= C_B B^{-1}$

因此有 $\sigma_{ij} = c_{ij} - Y p_{ij}$

又因为, p_{ij} 中除第 i 个元素和第 $m+j$ 个元素为 1 以外，其余元素均为 0，即 $p_{ij} = e_i + e_{m+j}$

所以有

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= c_{ij} - \sum p_{ij} = c_{ij} - (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n) p_{ij} \\ &= c_{ij} - (u_i + v_j)\end{aligned}$$

而所有基变量的检验数等于零，因此有

$$c_{ij} - (u_i + v_j) = 0$$

即 $u_i + v_j = c_{ij} \quad (i, j) \in I \text{ (基变量下标集)}$

由于 u_i 对应与调运表中的第 i 行，称其为第 i 行的行位势； v_j 对应与调运表中的第 j 列，称其为第 j 列的列位势；

位势法的具体办法如下：

(1) 在调运表中,对于每一个基变量都按公式 $u_i + v_j = c_{ij}$ 列出一个位势方程,形成位势方程组；

(2) 任决定其中一个位势的数值，然后求出其它位势的数值；

(3) 按公式 $\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ 计算非基变量的检验数，若所有非基变量的检验数均大等于零,则调运表中的基可行解就是最优解，否则不是最优解；

下面用位势法对表 3—6 中的基可行解进行最优性检验。

表 3—9

销地 产地	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	产量	行位势
A ₁	320	7	65	425	50	u ₁
A ₂	220	4	3	3	20	u ₂
A ₃	8	320	810	9	30	u ₃
销量	40	20	15	25		
列位势	v ₁	v ₂	v ₃	v ₄		

位势方程组为

$u_1 + v_1 = 3$
 $u_1 + v_3 = 6$

$u_1 + v_4 = 4$
 $u_2 + v_1 = 2$

$u_3 + v_2 = 3$
 $u_3 + v_3 = 8$

取 $u_1 = 0$ ，解上述方程组得

$u_1 = 0$
 $u_2 = -1$
 $u_3 = 2$

$v_1 = 3$
 $v_2 = 1$
 $v_3 = 6$
 $v_4 = 4$

各非基变量的检验数为

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= c_{12} - (u_1 + v_2) = 7 - (0 + 1) = 4 > 0 \\ \sigma_{22} &= c_{22} - (u_2 + v_2) = 4 - (-1 + 1) = 2 > 0 \\ \sigma_{23} &= c_{23} - (u_2 + v_3) = 3 - (-1 + 6) = -2 < 0 \\ \sigma_{24} &= c_{24} - (u_2 + v_4) = 3 - (-1 + 4) = 0 \\ \sigma_{31} &= c_{31} - (u_3 + v_1) = 8 - (2 + 3) = 3 > 0 \\ \sigma_{34} &= c_{34} - (u_3 + v_4) = 9 - (2 + 4) = 3 > 0\end{aligned}$$

由于 $\sigma_{23} = -2 < 0$ ，故表中基可行解不是最优解。

（三）基可行解的转换

当调运表中,仍然有非基变量的检验数为负,则说明问题还没有得到最优解,需要进行基可行解的转换。具体办法为：

- （1）以某一个 $\sigma_{ij} < 0$ (若有多个则取最小者) 对应的变量 x_{ij} 作为进基变量；
- （2）以所选的 x_{ij} 为第一个顶点作闭回路，该闭回路除 x_{ij} 外，其余顶点都是基变量，并排序；
- （3）以顺序为偶数的顶点的基变量最小值 $\min \{(x_{ij})_k \mid k \text{ 为偶数} \}$ 作为调整量，在顺序为奇数的顶点上加上该调整量，在顺序为偶数的顶点上减去该调整量，即可得到新的基可行解。

这里对表 3—6 中的基可行解进行转换。

由于 $\sigma_{23} = -2 < 0$ ，故以 x_{23} 为进基变量,并以 x_{23} 为第一个顶点作闭回路，如表 3—10。

表 3—10

销 地 产地	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	产量
A ₁	20 3	7	5 6	25 4	50
A ₂	20 2	4	x_{23} 3	3	20
A ₃	8	20 3	10 8	9	30
销量	40	20	15	25	

该闭回路上，偶数顶点上的基变量最小值为 5,以该调整量进行调整得到如表 3—11 的新的基可行解。

表 3—11

销 地 产地	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	产量
A ₁	325	7	6	425	50
A ₂	215	4	35	3	20
A ₃	8	320	810	9	30
销量	40	20	15	25	

新基可行解的位势方程组为

$u_1+v_1=3$
 $u_1+v_4=4$

$u_2+v_1=2$
 $u_2+v_3=3$

$u_3+v_2=3$
 $u_3+v_3=8$

取 $u_1=0$,解上述方程组得

$u_1=0$
 $u_2=-1$
 $u_3=4$

$v_1=3$
 $v_2=-1$
 $v_3=4$
 $v_4=4$

各非基变量的检验数为

$\sigma_{12}=7-(0-1)=8>0$
 $\sigma_{13}=6-(0+4)=2>0$
 $\sigma_{22}=4-(-1-1)=6>0$

$\sigma_{24}=3-(-1+4)=0$
 $\sigma_{31}=8-(4+3)=1>0$
 $\sigma_{34}=9-(4+4)=1>0$

由于所有非基变量的检验数均大等于零，故从表 3-11中得到最优解为

$x_{11}=25, x_{14}=25, x_{21}=15, x_{23}=5, x_{32}=20, x_{33}=10$, 其它 $x_{ij}=0$

最优目标值为

$f=3\times 25+4\times 25+2\times 15+3\times 5+3\times 20+8\times 10=360$

此外，由于 $\sigma_{24}=0$ ，故此问题有另一最优基可行解。具体求法是在表 3—11 中，以 x_{24} 为进基变量作闭回路，进行调整后得到。

由上面分析可知，表上作业法的实质是单纯形方法用于求解运输问题这样一类特殊形式线性规划问题的简化，因而也称它为运输单纯形法。

最后总结表上作业法的解题步骤。

- (1)编制调运表（包括产销平衡表及单位运价表）；
- (2)正在调运表上求出初始基可行解；
- (3)用位势法或闭回路法计算非基变量的检验数。若所有非基变量的检验数 ≥ 0 ，则已得到问题的最优解，停止计算。否则转下一步；
- (4)选取小于 0 的检验数中的最小者对应的变量作为进基变量，用闭回路法进

行基可行解的转换,得到新的基可行解, 转(3)。

第三节 产销不平衡的运输问题及其求解

对于产销平衡的问题可用表上作业法求解, 但对于产销不平衡的问题则需要进行处理, 将其化成平衡问题, 才能用表上作业法求解。

一、产大于销

产大于销的运输问题的特征是 $\sum a_i > \sum b_j$, 其数学模型为:

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i \quad i=1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j \quad j=1, \dots, n \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i=1, \dots, m; \quad j=1, \dots, n \end{aligned}$$

解此类问题可假想一个销地 B_{n+1} , 其需要量为: $b_{n+1} = \sum a_i - \sum b_j$; 若用 $x_{i, n+1}$ 表示从 A_i 到 B_{n+1} 的运量, 可令 $c_{i, n+1} = 0$ 或等于第 A_i 产地储存单位物资的费用。因为 $x_{i, n+1}$ 实际上表示 A_i 产地没有运出去而库存的物资数量。经处理后, 问题变成了产销平衡的运输问题, 其数学模型为:

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} &= a_i \quad i=1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j \quad j=1, \dots, n+1 \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i=1, \dots, m; \quad j=1, \dots, n+1 \end{aligned}$$

这样, m 个产地、 n 个销地的不平衡运输问题, 转化成了 m 个产地、 $n+1$ 个销地的平衡运输问题, 此时可用表上作业法求解。在用最小元素法求解该类问题初始基可行解时, 若某列的运价全为零时, 则该列最后考虑。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/778127056137007005>