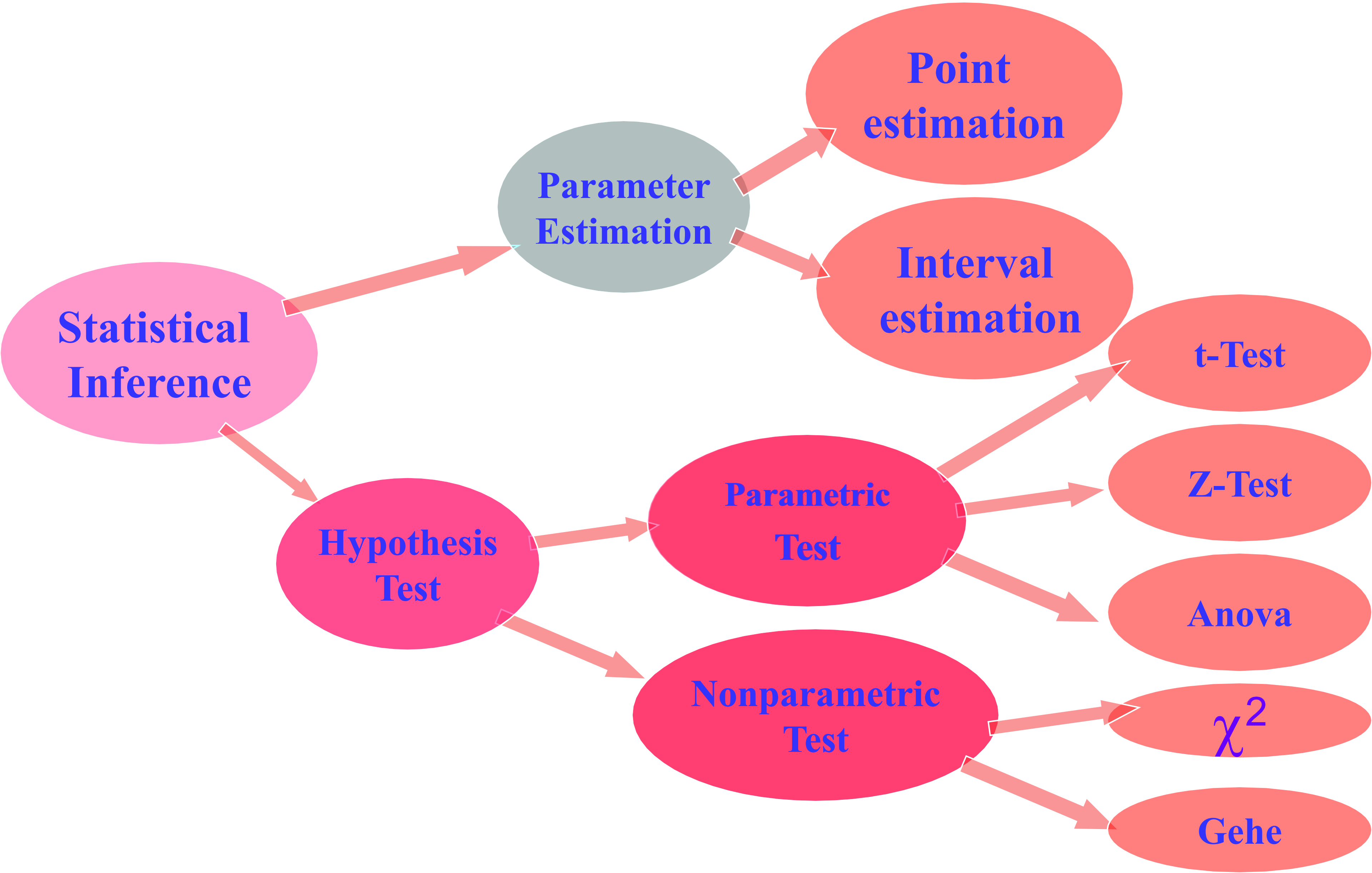
第九章 基于秩次的非参数检验

2025年1月9日

第九章 基于秩次的非参数检验

Review——Statistical Inference

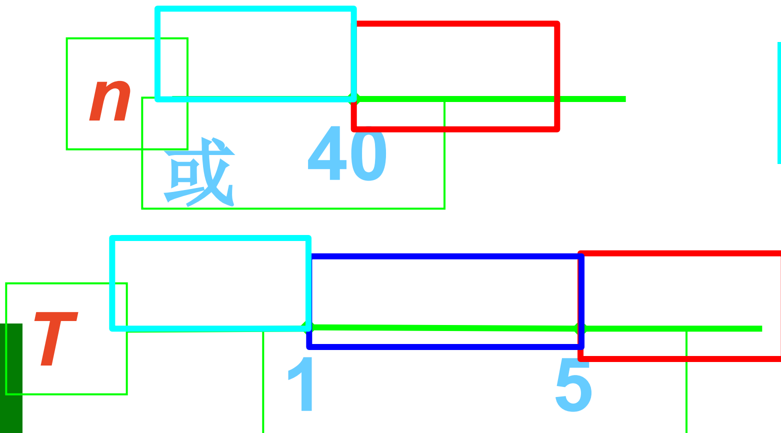


四格表资料的假设检验

应用条件：$n \ge 40$，且 $T \ge 5$

$n \ge 40$，且 $1 \le T < 5$

$n < 40$ 或 $T < 1$



确切概率法

R.A.Fisher(1934)

问题的提出：

前面学习了连续型资料假设检验方法(t检验、方差分析)：

配对t检验、单样本t检验、两独立样本t检验、方差分析

如果各样本所来自总体的分布不清、已知不服从正态分布或经变量转换后仍不服从正态分布时，如何进行检验呢？

★需要一种不依赖于总体分布类型的检验方法，非参数检验方法–**Nonparametric test**。

学习目标

- 掌握参数统计、非参数统计的概念；
- 掌握非参数统计法的优缺点、适用范围；
- 掌握各秩和检验的编秩原则与判断方法。
- 了解秩和检验方法与参数检验方法的检验效能的差别。

主要内容

第一节　参数检验与非参数检验
第二节　单样本及配对设计资料的符号秩和检验
第三节　两独立样本比较的秩和检验
第四节　完全随机设计多组比较的秩和检验
第五节　多组相关样本资料比较的秩和检验

第一节、参数检验与非参数检验

1、参数统计（parametric test）

对于总体分布类型已知的资料，用相应于参数的统计量来估计参数所在范围或推断参数有无差别的统计方法。如t检验，F检验， Z检验等

2、非参数检验（nonparametric test）

$\bar{x}\pm1.96S_{\bar{x}}$

对总体分布类型不作要求，而对总体的分布或分布位置进行检验。亦称任意分布检验（Distribution-free test）。

非参数统计方法的优缺点

参数统计
（parametric statistics）

↓

已知总体分布类型，对未知参数（μ、π）进行统计推断

↓

依赖于特定分布类型，比较的是参数

↓

统计量有明确的理论依据，有严格的使用条件

非参数统计
（nonparametric statistics）

↓

对总体的分布类型不作任何要求

↓

不受总体参数的影响，比较分布或分布位置

↓

适用范围广；可用于任何类型资料(等级资料，或“>50mg”

稳健性强 ，方法简单。

非参数检验的缺点

其检验效能较低仅是参数统计的95%。利用资料信息不充分。
对于符合参数统计分析条件者，采用非参数统计分析。

10、15、20　秩和=6
20、50、80　秩和=6

2025年1月9日

非参数统计方法具体适用范围

1、计量非正态资料

2、极度偏态、分布类型不易确定的资料；

3、等级分组资料；

4、初筛的资料；

※符合参数统计条件的首先应用参数统计方法

※不符合参数统计条件的，经变量变化后符合参数统计条件了，应用参数统计方法

若不符合参数统计条件的，应用非参数统计方法.

第二节 单样本和配对设计资料的符号秩和检验

（Wilcoxon signed rank test）

适用资料

1、单样本资料

2、配对的计量非正态资料

一、单样本资料的符号秩和检验
Wilcoxon signed rank test

Frank Wilcoxon（1892-1965）

例1 已知某地正常人尿铅含量中位数为2.5μmol/L

表1 某厂16名工人与当地正常人的尿铅含量比较

尿铅含量xi	差值di	秩次	尿铅含量xi	差值d	秩次
0.62	-1.88	-12 ~~11~~	3.13	0.63	7
0.782	-1.72	-10	3.27	0.77	8
2.13	-0.37	-5	3.54	1.04	9
2.48	-0.02	-1	4.38	1.88	12 ~~12~~
2.54	0.04	2	4.38	1.88	12 ~~13~~
2.68	0.18	3	5.05	2.55	14
2.73	0.23	4	6.08	3.58	15
3.01	0.51	6	11.27	8.77	16

资料分析：

对上表中的这些差值进行正态性检验，P≤0.05，因此不满足t检验关于样本来自正态分布的条件。该资料应该用非参数统计方法,在此选用 Wilcoxon 符号秩和检验。

秩次是将数值变量值从小到大，或等级变量值从弱到强所排列的序号

基本思想

求d

将|d|按大小编秩

求出正、负秩和

正负d个数应相差不多

如果两组结果相同H_0

差数的总体中位数为0，即服从以0为中心的对称分布。

正秩和与负秩和相差不大

2025年1月9日

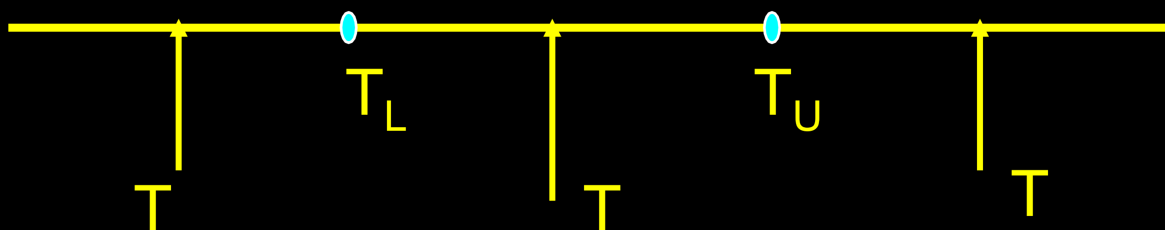
检验过程：

- 1. 检验假设，确定检验水准
  - H_0:差值的总体中位数等于零，即该工厂工人的尿铅含量与正常人相同
  - H_1：差值的总体中位数大于零，即该工厂工人的尿铅含量高于正常人 $\alpha=0.05$

- 2、计算统计量
  - （1）求差值$d_i=x_i-2.5$
  - （2）编秩：按差值的绝对值由小到大编秩，并按差值的正负给秩次加上正负号
    - （a）编秩时，若差值为0，舍去不计，n-1；
    - （b）若差值的绝对值相等，称为相持（tie），这时取平均秩次；
    - （c）求秩和并确定统计量T
      - 分别求出正、负差值秩次之和，T_+和T_-.双侧时，以绝对值较小者为T值，即$T=\min(T_+,T_-)$；单侧检验时，任取T_+或T_-为统计量T

3、确定P值和作出推断结论。

（1）查表法，T界值表附表9（查P423），判断标准：“内大外等小”。内大:即若T在上下界值范围内，则P值大于相应的概率；外等小:若T在上下界值范围外(或等于界值)，则P值小于(或等于)相应的概率.



$T \le T_L$ 或 $T \ge T_U$，则 $P \le \alpha$，有统计学意义。认为两总体的分布不相同。

$T_L < T < T_U$，则 $P > \alpha$，无统计学意义。尚不能认为两总体的分布不同。

- 本例中，$T_{0.05\ (16)}=35-101$ ，本例T=28 在$T_{0.05}$范围外，P<0.05, 按所定检验水准，拒绝H_0，认为该工厂工人尿氟含量高于当地正常人。
  - （2）正态近似法（n>50时）这时可利用秩和分布的正态近似法作出判断。已知H_0成立时，近似地有

$$Z=\frac{\left|T-n(n+1)/4\right|-0.5}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}}$$

正态近似法：
n>50时采用

当相同差值较多（>25%）时，应进行校正

$$Z_c=\frac{\left|T-n(n+1)/4\right|-0.5}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}-\frac{\sum\left(t_j^3-t_j\right)}{48}}}$$

假定有2个差值为1.5，3个差值为6，5个差值为3，则有

$$\sum\left(t_j^3-t_j\right)=(2^3-2)+(3^3-3)+(5^3-5)$$

式中t_j为第j次相持所含相同秩次的个数。

二、配对设计资料符号秩和检验 (Wilcoxon配对法）

一、适用资料

自身对照、异体配对的计量非正态资料

例2 某医院检验科试用新旧两种方法检测谷-丙转氨酶，新方法的检测时间由20分钟缩短为10分钟。用两种方法检测同一份血清，结果见表1第（2）、（3）栏，问两法测得结果有无差别？

表2 两种方法测定血清谷-丙转氨酶（nmol/s/L）

样品号 （1）	旧法 （2）	新法 （3）	差值 （4）=（2）-（3）	正差值秩次 （5）	负差值秩次 （6）
1	60	80	-20		8
2	142	152	-10		5.5 ~~6~~
3	242	240	2	1	
4	80	90	-10		5.5 ~~5~~
5	38	50	-12		7
6	212	243	-31		9
7	220	227	-7		4
8	95	100	-5		2.5 ~~3~~
9	236	200	36	10	
10	38	43	-5		2.5 ~~2~~

二、检验步骤

1、建立假设

H_0:差值总体中位数$M_d = 0$

H_1:差值总体中位数$M_d \neq 0$ $\alpha = 0.05$

2、计算统计量T:

（1）求差值

（2）编秩

编秩原则

①依差值绝对值大小，从小到大依次编秩，并冠以“+”或“-”号；

②若差值相等，符号不同，求平均秩，再冠以+、-号；

③若差值为零，去掉，对子数相应减少。

（3）正负秩次分别求和，以T_+和T_-表示

（4）双侧时，以绝对值较小者为T值，即$T=\min(T_+, T_-)$；单侧检验时，任取T_+或T_-为统计量。

3、确定P值 ，做出结论

（1）查表法：5≤n≤50时，查T界值表(p423)

$T_{0.05(10)}$=8-47 ，本例T=11，在$T_{0.05}$范围内，，所以P>0.05,按所定检验水准，不拒绝H_0,故尚不能认为两种方法测定血清中谷-丙转氨酶含量有差别。

（2）正态近似法：n>50时

$$Z=\frac{\left|T-n(n+1)/4\right|-0.5}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}}$$

第三节　完全随机设计两样本的秩和检验（Wilcoxon两样本比较法）

- **适用资料：**
  - 两定量非正态资料
  - 或两组有序分类（等级）资料。

一 、定量变量两组独立样本的秩和检验

例3：两种药物杀灭钉螺，每批用200-300只活钉螺，用药后清点钉螺的死亡数，并计算死亡率（%），结果先表3，试比较两种药物杀灭钉螺的效果有无差别？

表3 两种药物杀灭钉螺死亡率比较

甲药		乙药	
死亡率%	秩次	死亡率%	秩次
32.5	5.5	16.0	1
35.5	7	22.5	2
40.5	10	26.0	3
40.5	10	28.5	4
49.0	12	32.5	5.5
49.5	13	38.0	8
51.5	14	40.5	10
$n_1=7$	$T_1=71.5$	$n_2=7$	$T_2=33.5$

秩和检验的基本思想

$$1+4+10+11+12+13+14+15=80$$

$$2+3+5+6+7+8+9+16=56$$

二、检验步骤

1、建立假设

H_0:两种药物杀灭钉螺死亡率的总体中位数相等 M1=M2

H_1:两种药物杀灭钉螺死亡率的总体中位数不相等 M1≠M2

$\alpha＝0.05$

2、计算统计量

编秩原则

（1）两组数据混合按升序编秩

（2）如有相同数据在不同组时，求平均秩次。

（3）两组数据分别求秩和

（4）统计量的确定：

$n_1 \neq n_2$, 以n小者的秩和为统计量T

$n_1 = n_2$,则以任一组秩和为统计量T

$T_1=71.5$, $T_2=33.5$

3、确定P值 ，做出结论

(1)查表法: $n_1<=10, n_2-n_1<=10$时

(2)正态近似法：$n_1>10, n_2-n_1>10$时

$$Z=\frac{\left|T-n_1(N+1)/2\right|-0.5}{\sqrt{n_1 n_2 (N+1)/12}}$$

相同秩次较多时，计算出的Z值偏小，应进行校正

$$Z_c=Z/\sqrt{C} \qquad C=1-\frac{\sum(t_j^3-t_j)}{N^3-N}$$

本例$n_1=10$， $n_2-n_1=0$ 查T表附表10，双侧$P=0.05$时，T界值范围是36—69，$T_{0.01}$界值范围是32-73，而今统计量$T=33.5$，在$T_{0.01}$界值范围外，故$P<0.01$。

按$\alpha=0.05$，拒绝H_0，接受H_1，可认为两种药物杀灭钉螺死亡率的总体死亡率不相等

二、两独立样本比较的Mann-Whitey *U*检验

两独立样本比较还常用Mann-Whitney *U* 检验（Mann-Whitney *U* test）。检验统计量*U*定义为：

两个样本分别排序后，把第一个样本的n_1（$n_1 \le n_2$）个变量中的每个值，与第二个样本的n_2个变量值逐个比较，小于记1，相等记0.5，大于记0，求其和。当n_1和n_2小时，如$n_1 + n_2 \le 30$，有专门的*U*界值表；