研究性课题：

杨辉三角

杨 辉 三 角

第0行 1

第1行 1 1

第2行 1 2 1

第3行 1 3 3 1

第4行 1 4 6 4 1

第5行 1 5 10 10 5 1

第6行 1 6 15 20 15 6 1

…… ……

第n-1行 1 C_{n-1}^{1} C_{n-1}^{2} … C_{n-1}^{r-1} C_{n-1}^{r} … C_{n-1}^{n-2} 1

第n行 1 C_{n}^{1} C_{n}^{2} … C_{n}^{r} … C_{n}^{n-1} 1

…… … …

4=1+3

10=6+4

15=5+10

6=3+3

10=6+4

20=10+10

$$C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^{r}$$

一.复习:杨辉三角的基本性质

1）表中每个数都是组合数，第n行的第r+1个数是

$$C_n^r=\frac{n!}{r!\bullet(n-r)!}$$

2）三角形的两条斜边上都是数字1，而其他的数都等于它肩上的两个数字相加，也就是

$$C_n^r=C_{n-1}^{r-1}+C_{n-1}^r$$

3）杨辉三角具有对称性 $C_n^r=C_n^{n-r}$

4）杨辉三角的第n行是二项式（a+b）^{n}展开式的二项式系数即

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$$

求证：$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n$

证明：1）当n=1时，左边＝a+b，右边＝a+b 所以等式成立.

2）假设当n=k时等式成立，即

$$(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b^1 + \cdots + C_k^r a^{k-r} b^r + \cdots + C_k^k b^k$$

则当n=k+1时，$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b)$

$$= (C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b^1 + \cdots + C_k^r a^{k-r} b^r + \cdots + C_k^k)(a+b)$$

$$= C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + \cdots + C_k^{r+1} a^{k-r} b^{b+1} + \cdots + C_k^k a b^k +$$

$$C_k^0 a^k b + \cdots + C_k^r a^{k-r} b^{r+1} + \cdots + C_k^{k-1} a b^k + C_k^k b^{k+1}$$

$$= C_k^0 a^{k+1} + (C_k^1 + C_k^0) a^k b + \cdots + (C_k^{r+1} + C_k^r) a^{k-r} b^{b+1} +$$

$$\cdots + (C_k^k + C_k^{k-1}) a b^k + C_k^k b^{k+1}$$

利用组合数的主要性质可得

$$(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b^1 + \cdots + C_{k+1}^{r+1} a^{k-r} b^{r+1} + \cdots + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}$$

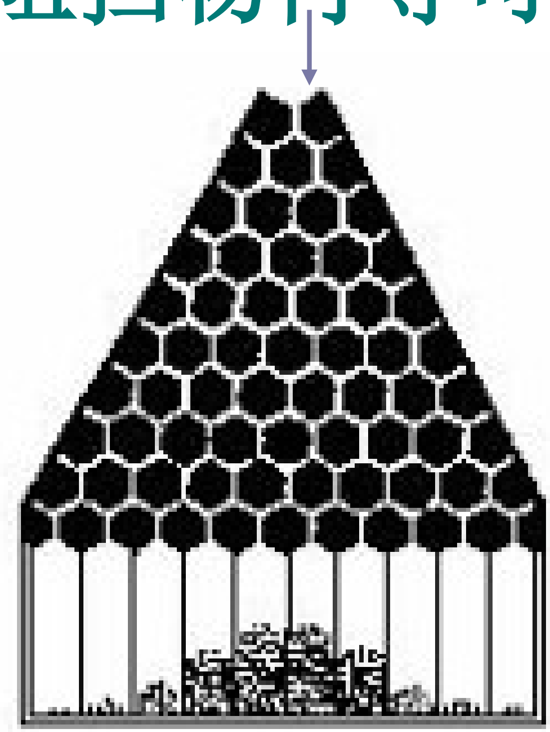
二. 引入

1. 斐波那契“兔子繁殖问题”:

中世纪意大利数学家**斐波那契**的传世之作《算术之法》中提出了一种饶有趣味的问题：假定一对刚出生的兔子一种月就能长成大兔子，再过一种月就开始生下一对小兔子，而且后来每月都生一对小兔子．设所生一对兔子均为一雄一雌，且均无死亡．问一对刚出生的小兔一年内能够繁殖成多少对兔子?

2. 杨辉三角与弹子游戏

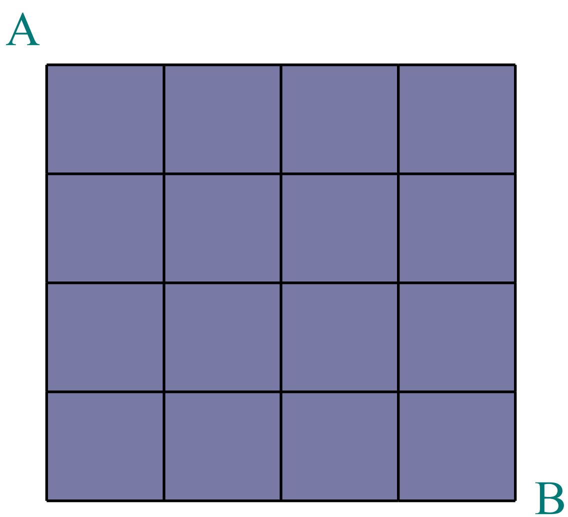
在游艺场，能够看到如图的弹子游戏，小球（黑色）向容器内跌落，遇到第一层阻挡物后等可能地向两侧跌落，遇到第二层阻挡物再等可能地向两侧第三层跌落，



如是，一直下跌，最终小球落入底层，根据详细区域取得奖品。试问：为何两边区奖品高于中间区奖品？

3.杨辉三角与“纵横路线图”

“纵横路线图”是数学中的一类有趣的问题：如图是某城市的部分街道图，纵横各有五条路，假如从A处走到B处(只能由北到南，由西向东)，那么有多少种不同的走法？



从某种意义上说，

发觉问题更主要.

三. 新课:杨辉三角蕴含的数字排列规律.

第0行 1

第1行 1 1

第2行 1 2 1

4=1+3

第3行 1 3 3 1

6=3+3

10=6+4

第4行 1 4 6 4 1

10=6+4

20=10+10

15=5+10

第5行 1 5 10 10 5 1

第6行 1 6 15 20 15 6 1

$$C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$$

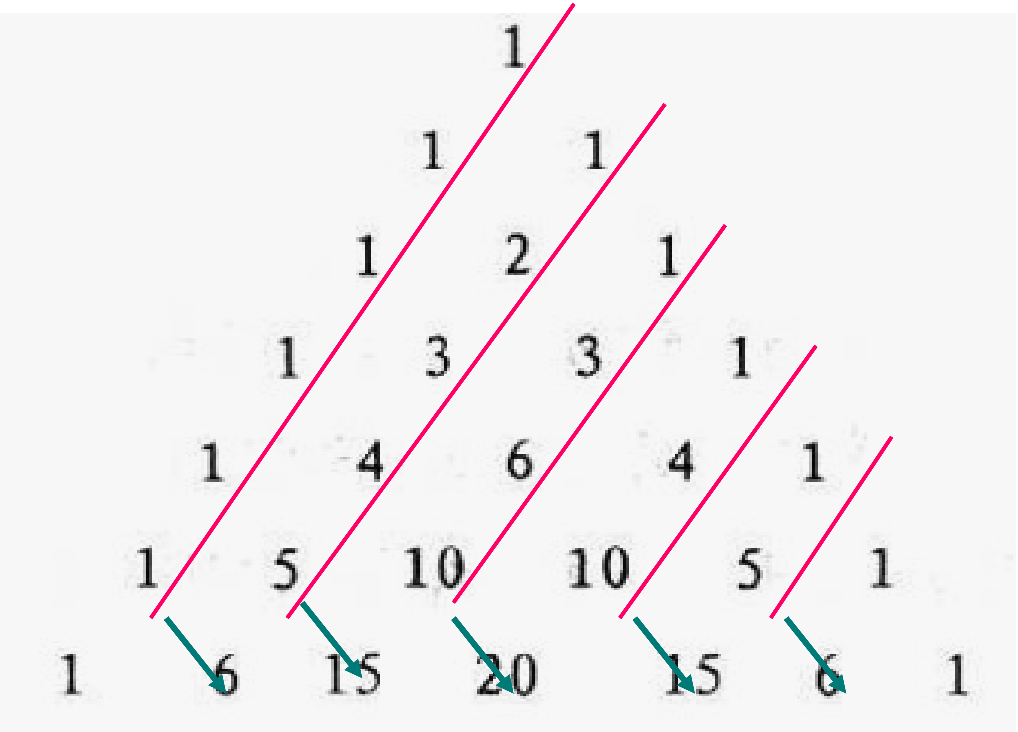
…… ……

第n-1行 $1 \quad C_{n-1}^1 \quad C_{n-1}^2 \cdots C_{n-1}^{r-1} \quad C_{n-1}^r \quad \cdots \quad C_{n-1}^{n-2}$

第n行 $1 \quad C_n^1 \quad C_n^2 \quad \cdots \quad C_n^r \quad \cdots \quad C_n^{n-1}$

…… … …

1.研究斜行规律：



第一条斜线上：

1+1+1+1+1+1=6$=C_6^1$

第二条斜线上：

1+2+3+4+5=15 $=C_6^2$

第三条斜线上：1+3+6+10=20 $=C_6^3$

第四条斜线上：1+4+10=15$=C_6^4$

猜测：在杨辉三角中，第m条斜线（从右上到左下）上前n个数字的和，等于 第m+1条斜线上的第n个数.

0行 1

1行 1 1

2行 1 2 1

3行 1 3 3 1

4行 1 4 6 4 1

5行 1 5 10 10 5 1

6行 1 6 15 20 15 6 1

7行 1 7 21 35 35 21 7 1

... ...

n−1行 $1 \quad C_{n-1}^{1} \quad C_{n-1}^{2} \quad \cdots \quad C_{n-1}^{r-1} \quad C_{n-1}^{r} \quad \cdots \quad C_{n-1}^{n-2} \quad 1$

n行 $1 \quad C_{n}^{1} \quad C_{n}^{2} \quad \cdots \quad C_{n}^{r} \quad \cdots \quad C_{n}^{n-1} \quad 1$

... ...

$1+1+1+\ .\ .\ .\ +1=C_{n}^{1}$ （第1条斜线）

$1+2+3+\ .\ .\ .\ +C_{n-1}^{1}=C_{n}^{2}$ （第2条斜线）

$1+3+6+\ .\ .\ .\ +C_{n-1}^{2}=C_{n}^{3}$ （第3条斜线）

$1+4+10+\ .\ .\ .\ +C_{n-1}^{3}=C_{n}^{4}$ （第4条斜线）

$C_{r}^{r}+C_{r+1}^{r}+C_{r+2}^{r}+\square+C_{n-1}^{r}=C_{n}^{r+1}$ (n>r) ?

结论1：杨辉三角中，第m条斜(从右上到左下)上前n个数字的和，等于第m+1条斜线上第n个数

即 $C_r^r+C_{r+1}^r+C_{r+2}^r+\cdots C_{n-1}^r=C_n^{r+1}(n>r)$

根据杨辉三角的对称性，类似可得：杨辉三角中，第m条斜(从左上到右下)上前n个数字的和，等于第m+1条斜线上第n个数。

即 $C_r^0+C_{r+1}^1+C_{r+2}^2+\cdots C_{n-1}^{n-r+1}=C_n^{n-r-1}(n>r)$

从第三个数起，任一数都等于前两个数的和;

这就是著名的斐波那契数列 。

第0行 1

第1行 1 1

第2行 1 2 1

第3行 1 3 3 1

第4行 1 4 6 4 1

第5行 1 5 10 10 5 1

第6行 1 6 15 20 15 6 1

第7行 1 7 21 35 35 21 7 1

第8行 1 8 28 56 70 56 28 8 1

……

1 1 2 3 5 8 13 21 34