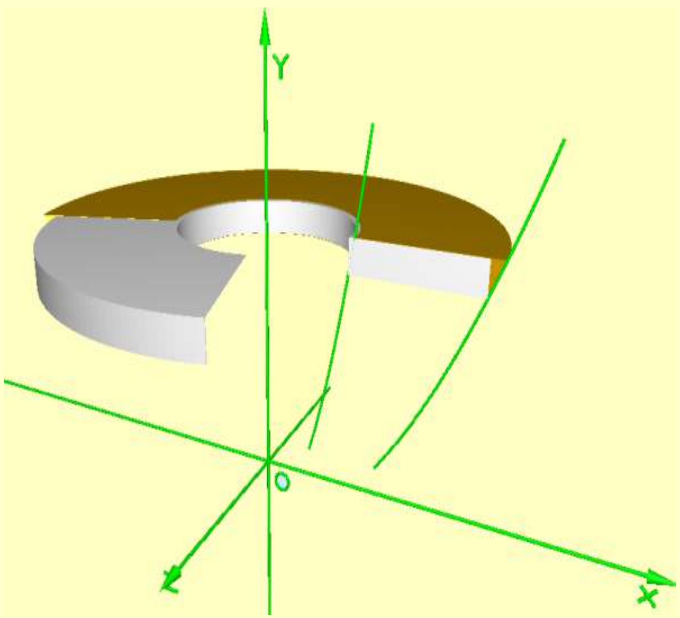
高等数学教程



北京工业大学

为什么要研究无穷级数

无穷级数是数和函数的一种表现形式.
是进行数值计算的有效工具(如计算函数值、造函数值表).

因无穷级数中包含有许多非初等函数,故它在积分运算和微分方程求解时,也呈现出它的威力.

在自然科学和工程技术中,也常用无穷级数来分析问题,如谐波分析等.

引例

一人骑车从距家a公里处以每小时b公里的速度回家. 一只苍蝇以每小时$2b$公里的速度在车的前轮和家门之间往返飞行. 问：骑车人到家时，苍蝇飞行了多少公里.

第一个往返，人与苍蝇通过的路程之和是$2a$公里. 苍蝇速度是人的2倍. 所以苍蝇飞行了$\frac{4a}{3}$公里, 人走了$\frac{2a}{3}$公里, 距家$\frac{a}{3}$公里.

次数	距家	人	苍蝇
1	a	$\frac{2a}{3}$	$\frac{4a}{3}$
2	$\frac{a}{3}$	$\frac{2a}{9}$	$\frac{4a}{9}=\frac{4a}{3^2}$
3	$\frac{a}{9}$	$\frac{2a}{27}$	$\frac{4a}{27}=\frac{4a}{3^3}$
……			
n	$\frac{a}{3^{n-1}}$	$\frac{2a}{3^n}$	$\frac{4a}{3^n}$
……			

$$\frac{4a}{3}+\frac{4a}{3^2}+\frac{4a}{3^3}+\cdots+\frac{4a}{3^n}+\cdots=\frac{4a}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=2a.$$

骑车人走了a公里, 苍蝇速度是人的2倍, 飞了$2a$公里.

第七章　无穷级数

7.1　常数项级数的概念和性质

7.1.1 常数项级数的概念

给定一个常数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$

那么表达式 $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$

称为(常数项)**无穷级数**, 简称**级数**. 记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$,

即
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

其中第 n 项 u_n 称为级数的**一般项**, 或**通项**.

一般项

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \mathrm{L} + u_n + \mathrm{L} \qquad (1)$$

(常数项)无穷级数

如
$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \mathrm{L} + \frac{3}{10^n} + \mathrm{L} \ ;$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \mathrm{L} + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \mathrm{L} \ ;$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \mathrm{L} + (-1)^{n-1} + \mathrm{L} \ .$$

以上均为**(常)数项**级数.

无穷级数定义式(1)的含义是什么?

按通常的加法运算一项一项的加下去,永远也算不完, 那么如何计算?

称无穷级数(1)的前n项之和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$ 为级数(1)的 第n局部和.

这样, 级数(1)对应一个局部和数列:

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \cdots,$$

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \quad \cdots$$

部分和数列可能存在极限,也可能不存在极限.

定义7.1 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前n 项和 $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

称为级数的局部和. 如果数列$\{s_n\}$有极限s, 即

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**, 极限s 称为级数的**和**,

记为 $$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

如果部分和数列$\{s_n\}$的极限不存在, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**.

注: 如果级数发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 只是形式上的和, 无数值意义.

当级数收敛时，其局部和 s_n 是级数和s的近似值.

误差为 $$r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

称为级数的余项.

显然有 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, 当$n$充分大时，$s \approx s_n$.

注 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$存在(不存在) $\Leftrightarrow$ 常数项级数收敛(发散).

例　讨论**等比级数**(又称**几何级数**)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \qquad (a \neq 0)$$

的收敛性, 其中q 叫做级数的**公比**.

解　　如果$q \neq 1$,

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q}$$

当$|q| < 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}$ **收敛;**

当$|q| > 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ **发散;**

如果$|q|=1$，当$q=1$时，$s_n = na \to \infty$ **发散;**

当$q=-1$时，**级数变为** $a-a+a-a+\cdots$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} s_n$不存在，**发散.**

综上所述 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} 当|q|<1时,收敛 \\ 当|q|\ge 1时,发散 \end{cases}$

重要结论:

公比为q的几何级数的和 $= \dfrac{首项}{1-公比}$, $|q|<1$.

例 当$|q|<1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n =$ $\underline{\dfrac{q}{1-q}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{2n+1} =$ $\underline{-\dfrac{q^3}{1+q^2}}$.

例 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty} 3\ln^n a\,(a>0)$的敛散性.

解 因为$\sum_{n=1}^{\infty} 3\ln^n a$是以$\ln a$为公比的等比级数,

故

当$\frac{1}{e}<a<e$时, $|\ln a|<1$, 级数收敛.

当$0<a\le\frac{1}{e}$或$a\ge e$时, $|\ln a|\ge 1$, 发散.

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} 当|q|<1时,收敛 \\ 当|q|\ge 1时,发散 \end{cases}$$

例 形如 $\sum_{n=1}^{\infty}(a+nd)$的级数称为等差级数, 其中

a,d 为常数,且$d \neq 0$. 证明等差级数是发散的.

证 因

$$s_n = na + \frac{n(n+1)}{2}d,$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$$

所以, 该级数发散.