重庆市南开中学校2023-2024学年高二下学期期末考试数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合 $A=\{x\mid|\log_2 x|<1\},B=\left\{x\left|\frac{1-x}{x+2}>0\right.\right\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$\left(\frac{1}{2},1\right)$　　B．$(1,2)$

C．$\left(-2,\frac{1}{2}\right)$　　D．$\left(\frac{1}{2},2\right)$

2．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1,+\infty)$，则函数 $g(x)=\frac{f(\mathrm{e}^x)}{x}$ 的定义域为（　）

A．$(1,+\infty)$　　B．$[1,+\infty)$　　C．$(0,+\infty)$　　D．$[0,+\infty)$

3．已知命题 p: $|x|+|x+1|\geq a$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立，　命题 q: 函数 $f(x)=\ln(1-ax)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，　则 p 是 q 的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

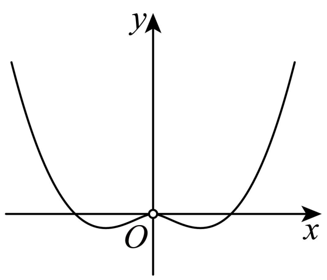
C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．已知 $a>b>1$，则下列不等式不一定成立的是（　）

A．$\frac{a}{a+1}>\frac{b}{b+1}$　　B．$\log_a b<\log_b a$

C．$\log_a b+\log_b a>2$　　D．$a^b>b^a$

5．已知函数 $f(x)$ 的图象如下图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能为（　）



A．$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{x}$　　B．$f(x)=\ln(x^2+1)$

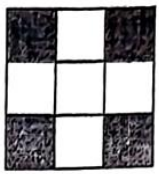
C．$f(x)=\dfrac{e^{x}-e}{x^{2}}$　　　　D．$f(x)=x^{2}\ln|x|$

6．已知 $a=\log_{\frac{2}{3}}2, b=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{4}{3}, c=\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{5}{4}$,则$a,b,c$的大小关系是（　）

A．$a<b<c$　　　　B．$a<c<b$

C．$c<b<a$　　　　D．$c<a<b$

7．将 1，2，3，4，5，6，7，8，9 这 9 个数填入如图所示的 3×3 的九宫格中， 每个格子中只填入 1 个数，已知 4 个偶数分别填入有阴影的格子中，则每一行的 3 个数字之积都能被 3 整除的概率为（　）



A．$\dfrac{1}{5}$　　B．$\dfrac{3}{10}$　　C．$\dfrac{2}{5}$　　D．$\dfrac{1}{2}$

8．已知 m，n，k 均为正实数， $m>2k$，且$3k^{2}-(3m+2n)k+mn=0$,若$(3m+n)t-3k\geq 0$恒成立，则实数 t 的最小值为（　）

A．$\dfrac{1}{15}$　　B．$\dfrac{1}{5}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　D．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

二、多选题

9．关于 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-2x\right)^{6}$ 的展开式，下列说法中正确的是（　）

A．各项系数之和为 1

B．第二项与第四项的二项式系数相等

C．常数项为 60

D．有理项共有 4 项

10．已知非常值函数 $f(x)$ 及其导函数 $g(x)$ 的定义域均为 R ,则（）

A．若 $f(4-x)+f(x)=2$,则 $f(x-2)-1$ 为奇函数

B．若 $f(1-x)$ 为偶函数,则 $g(1)=0$

C．若 $f(x-2)$ 为偶函数, $f(2x-1)$ 为奇函数,则 $f(3)=0$

D．若 $f\left(\frac{1}{2}-2x\right)$ 与 $g(x+1)$ 均为偶函数,则 $f(0)=0$

11．16、17 世纪之交，随着天文、航海、工程、贸易以及军事的发展，改进数字计算方法成了当务之急.约翰·纳皮尔正是在研究天文学的过程中，为了简化其中的计算而发明了对数.对数的发明是数学史上的重大事件. 恩格斯曾经把对数的发明称为 17 世纪数学的三大成就之一. 已知 $\lg 2\approx 0.3010$，$\lg 3\approx 0.4771$, $\lg 2024\approx 3.306$， 则下列说法中正确的是 （ ）

A．若正实数 x，y，z 满足 $3^x=4^y=6^z$ ，则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$

B．若一个正整数 n 的 20 次方是一个 13 位整数，则 $n=4$

C． 2024^{2024} 是位数为 6692 的正整数

D．将无理数 $\log_3 5$ 写成小数形式后，其小数点后第一位数字为 4

三、填空题

12．已知函数 $f(x)=\begin{cases}3^{2x+3}-2 & x\geq -1\\ \log_2(1-x) & x<-1\end{cases}$,则不等式 $f(x)\leq 7$ 的解集为___

13．写出一个同时具有下列性质的函数 $f(x)$=_______.

① $f(x)$ 为定义在 R 上的非常值函数;

② $\forall x_1\in\mathbf{R}$ 且 $x_1\neq 2$,均存在唯一的 $x_2\in$ R（$x_2\neq 2$ 且 $x_1\neq x_2$）使得 $f(x_1)=f(x_2)$ 成立;

③ $\forall x_1\in\mathbf{R}$ 均存在. $x_2\in$ R 使得 $f(x_1)=4f(x_2)$ 成立.

14.已知函数 $f(x)=-x|x-2a|+a^2+2a$，若函数 $f(x)$ 有三个不同的零点 x_1,x_2,x_3（$x_1<x_2<x_3$）则实数 a 的取值范围为________； $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}$ 的取值范围为________.

四、解答题

15．已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)-f(x)=2x-2$ 且 $f(1)=0$.

(1)求 $f(x)$ 的解析式;

(2)设 $g(x)=f(x)+(a+3)x-1$， $x\in[-2,1]$，求函数 $g(x)$ 的最小值 $h(a)$.

16．甲，乙，丙，丁四名选手进行象棋比赛，已知甲和乙是专业选手，丙和丁是业余选手.已知专业选手对业余选手时专业选手获胜的概率为 0.7、业余选手获胜的概率为 0.3，专业

选手对专业选手时每人获胜的概率均为0.5，业余选手对业余选手时每人获胜的概率均为0.5，比赛规则为：第一轮随机安排两两对赛，胜者进入第二轮，负者淘汰；第二轮胜者为第一名.

(1)求选手甲和丁在第一轮对赛的概率；

(2)求选手甲和丁在第二轮对赛的概率；

(3)现有两种比赛方案，

方案一：第一轮安排专业选手与专业选手对赛；

方案二：第一轮安排业余选手与专业选手对赛.

比较两种方案中业余选手获得第一名的概率的大小，并解释结果.

17．已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{3^x+a}{3^x-a}$，$a\in \mathrm{R}$.

(1)当$a=1$时，　证明: $f(x)$为奇函数;

(2)当$a<0$时，　函数$f(x)$在$\left[m,n\right]\left(m<n\right)$上的值域为 $\left[-\dfrac{1}{3^m},-\dfrac{1}{3^n}\right]$,求 a 的取值范围:

(3)当$a<0$时，　证明: $f(x)$为中心对称函数.

18．已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x-1}$.

(1)求$f\left(x\right)$的单调性；

(2)若$f\left(x\right)<x^a$，求实数a的取值集合.

19．已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的左右顶点为$A_1$，$A_2$，　左右焦点为$F_1$，$F_2$，过$F_1$，$F_2$分别作两条互相平行的直线$l_1$，$l_2$，其中$l_1$交$E$于$A$，$B$两点，　l_2交E于C，D两点，且点A，C位于x轴同侧，　直线A_1C与A_2A交于点P. 当l_1与x轴垂直时，$\triangle PF_1F_2$是面积为1的等腰直角三角形.

(1)求椭圆E的方程;

(2)若直线A_1C与直线A_2A的斜率之和为1，　求直线l_1，l_2的方程;

(3)求 $\dfrac{\left|PF_1\right|}{\left|PF_2\right|}$的取值范围.

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	C	B	D	D	A	B	B	ACD	BC
题号	11									
答案	BCD									

1．A

【分析】先解对数不等式，分式不等式，化简集合 A,B，再根据集合的交集运算求解即可.

【详解】因为$-1<\log_2 x<1, 2^{-1}<x<2$,所以$A=\left(\frac{1}{2},2\right)$,

因为$\frac{1-x}{x+2}>0, \frac{x-1}{x+2}<0, (x-1)(x+2)<0, -2<x<1$,所以$B=(-2,1)$,

所以$A\cap B=\left(\frac{1}{2},1\right)$.

故选：A.

2．C

【分析】由$\begin{cases}x\neq 0\\ e^x\geq 1\end{cases}$即可由指数函数的单调性求解.

【详解】$g(x)=\frac{f(e^x)}{x}$的定义域满足$\begin{cases}x\neq 0\\ e^x\geq 1\end{cases}$，解得$x>0$，

故选：C

3．B

【分析】根据$p:|x|+|x+1|\geq a$对于$\forall x\in \mathbf{R}$恒成立,求出a的取值范围，$q:f(x)=\ln(1-ax)$在$[0,1]$上单调递减，,求出a的取值范围，进而判断.

【详解】$p:|x|+|x+1|\geq a$对于$\forall x\in \mathbf{R}$恒成立，则$(|x|+|x+1|)_{\min}\geq a$，故$a\leq 1$，

$q:f(x)=\ln(1-ax)$在$[0,1]$上单调递减，则$\begin{cases}1-ax>0\\ a>0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a<\frac{1}{x}\\ a>0\end{cases}$，即$0<a<1$.

所以p得不到q，但是q可以得到p.

故p是q必要而不充分条件.

故选：B

4．D

【分析】根据不等式的性质即可求解 A，根据对数的运算性质即可求解 BC，举反例即可求解 D.

【详解】对于 A,由$a>b>1$可得$a+1>b+1>2$，故$\frac{1}{a+1}<\frac{1}{b+1}$，

因此$1-\frac{1}{a+1}>1-\frac{1}{b+1}$，即$\frac{a}{a+1}>\frac{b}{b+1}$，A 正确，

对于 B，$\log_a b<\log_a a=1,\log_b a>\log_b b=1$，故$\log_a b<\log_b a$，B 正确，

对于 C，$\log_a b+\log_b a=\log_a b+\frac{1}{\log_a b}>2$ （由于$\log_a b\neq 1$，故等号取不到），C 正确，

对于 D，取$a=4,b=2$，则$a^b=b^a=16$，故 D 错误，

故选：D

5．D

【分析】根据函数的奇偶性，以及$x=0$处是否有定义，即可结合选项逐一判断.

【详解】由图象可知$f(x)$为 $\{x|x\neq 0\}$上的偶函数，

对于 A，$f(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{x}=-f(x)$，故$f(x)$为奇函数，不符合，

对于 B，$f(x)=\ln(x^2+1)$在$x=0$处有定义，故不符合，

对于 C，$f(-x)=\frac{e^{-x}-e}{x^2}\neq f(x)$，不符合，

对于 D，$f(-x)=(-x)^2\ln|-x|=f(x)$，且$f(x)$在$x=0$处没有定义，故 D 符合，

故选：D

6．A

【分析】方法一：借助对数运算和中间值来进行大小判断;方法二：利用特殊对数值$\lg 2\approx 0.3010,\lg 3\approx 0.4771,$来估计这三个对数值即可作出判断.

【详解】方法一：由$a=\log_{\frac{2}{3}}2=\frac{\lg 2}{\lg\frac{2}{3}}=\frac{2\lg 2}{2\lg\frac{2}{3}}=\frac{\lg 4}{\lg\frac{4}{9}},b=\log_{\frac{1}{3}}4=\frac{\lg 4}{\lg\frac{1}{3}}$，

所以$a-b=\frac{\lg 4}{\lg\frac{4}{9}}-\frac{\lg 4}{\lg\frac{1}{3}}=\lg 4\frac{\lg\frac{1}{3}-\lg\frac{4}{9}}{\lg\frac{4}{9}\cdot\lg\frac{1}{3}}<0$，所以$a<b$，

又因为$b=\log_{\frac{1}{3}}4=-\log_3 4$，而$\log_3 4>\log_3 3=1$，所以$b<-1$，

而$c=\log_{\frac{1}{4}}\frac{5}{4}=-\log_4\frac{5}{4}$，而$\log_4\frac{5}{4}<\log_4 4=1,\ \log_4\frac{5}{4}>\log_4 1=0$,

所以$c\in(-1,0)$，即$b<c$，

故$a<b<c$；

故选：A.

方法二：取近似值$\lg 2 \approx 0.3010, \lg 3 \approx 0.4771$，

由$a=\log_{\frac{2}{3}} 2=\frac{\lg 2}{\lg \frac{2}{3}}=\frac{\lg 2}{\lg 2-\lg 3} \approx \frac{0.3010}{0.3010-0.4771} \approx-1.71$，

$b=\log_{\frac{1}{3}} 4=\frac{\lg 4}{\lg \frac{1}{3}}=\frac{2 \lg 2}{-\lg 3} \approx \frac{2 \times 0.3010}{-0.4771} \approx-1.26$，

$c=\log_{\frac{1}{4}} \frac{5}{4}=\frac{\lg \frac{5}{4}}{\lg \frac{1}{4}}=\frac{\lg 5-2 \lg 2}{-2 \lg 2}=\frac{1-3 \lg 2}{-2 \lg 2} \approx \frac{1-3 \times 0.3010}{-2 \times 0.3010}=\frac{1}{-2 \times 0.3010}+\frac{3}{2} \approx-0.16$ ，

所以$a<b<c$，

故选：A.

7．B

【分析】求出把 5 个奇数填入白色格子的试验的基本事件总数，再求出每一行的 3 个数字之积都能被 3 整除的事件含有的基本事件数即可求出概率.

【详解】依题意，5 个奇数填入白色格子的试验的基本事件总数为A_5^5，

中间行必有一格填奇数 3，9 之一，另一个填入不含 6 的那一行，有$2 \mathrm{A}_3^1$种方法，

再排奇数 1，5，7，有A_3^3种方法，

因此每一行的 3 个数字之积都能被 3 整除的事件含有的基本事件数为$2 \mathrm{A}_3^1 \mathrm{A}_3^3$，

所以每一行的 3 个数字之积都能被 3 整除的概率$p=\frac{2 \mathrm{A}_3^1 \mathrm{A}_3^3}{\mathrm{A}_5^5}=\frac{2 \times 3 \times 6}{120}=\frac{3}{10}$.

故选：B

8．B

【分析】通过不等式分离变量，再利用等式得出$n=\frac{3 k^2-3 m k}{2 k-m}$,代入不等式进行化简，构造函数，再利用函数导数得出函数的最大值，从而得出结果；

【详解】由题意知 m，n，k 均为正实数，

$\because(3 m+n) t-3 k \geq 0$恒成立，$\therefore t \geq \frac{3 k}{3 m+n}$恒成立，

因为$3 k^2-(3 m+2 n) k+m n=0$，

所以$3k^2-3mk-2nk+mn=0,3k^2-3mk=2nk-mn,\therefore n=\dfrac{3k^2-3mk}{2k-m}$

$$\frac{3k}{3m+n}=\frac{3k}{3m+\dfrac{3k^2-3mk}{2k-m}}=\frac{2k^2-mk}{k^2-m^2+mk}=\frac{2-\dfrac{m}{k}}{1-(\dfrac{m}{k})^2+\dfrac{m}{k}},\frac{m}{k}>2$$

令$x=\dfrac{m}{k}>2$，则$f(x)=\dfrac{2-x}{1-x^2+x},\therefore f'(x)=\dfrac{-x^2+4x-3}{(1-x^2+x)^2}$，

令$f'(x)=0$，则$x=1$（舍）或$x=3$，

当$x\in(2,3)$时，$f'(x)>0,\ f(x)$在区间$(2,3)$上单调递增；

当$x\in(3,+\infty)$时，$f'(x)<0,\ f(x)$在区间$(3,+\infty)$上单调递减；

所以函数$f(x)$有最大值，最大值为$f(3)=\dfrac{1}{5}$，

因此$t\geq\dfrac{1}{5},t$的最小值为$\dfrac{1}{5}$.

故选：B.

【点睛】方法点睛：最值求解方法：

1.从函数的最值出发，构造函数，求函数的最值.

2.利用函数单调性，求得最值

3.利用基本不等式求最值

4.利用三角函数有界性求最值

9．ACD

【分析】根据二项式定理的定义、通项的运用和赋值法即可得到答案.

【详解】对于A，令$x=1$时，则$\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-2x\right)^6$展开式中各项系数之和为1，故A正确；

对于B，第二项二项式系数$C_6^1=6$,第四项的二项式系数$C_6^3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$,第二项与第四项的二项式系数不相等，故B错误；

对于C，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-2x\right)^6$展开式的通项为$C_6^r(\dfrac{1}{\sqrt{x}})^{6-r}\left(-2x\right)^r=(-2)^rC_6^rx^{-\frac{6-r}{2}+r},(r=0,1,2,3,4,5,6)$，

令$-\frac{6-r}{2}+r=0$，$\therefore r=2$，展开式中的常数项为$(-2)^2C_6^2=4\times15=60$，故C正确；

对于D，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-2x\right)^6$展开式的通项为$C_6^r(\dfrac{1}{\sqrt{x}})^{6-r}\left(-2x\right)^r=(-2)^rC_6^rx^{-3+\frac{3r}{2}},(r=0,1,2,3,4,5,6)$，当

$r=0,2,4,6$ 时，$-3+\frac{3r}{2}\in Z$，所以展开式的有理项共有 4 项，故 D 正确.

故选：ACD.

10．BC

【分析】利用函数的对称性和函数的奇偶性求解各个选项，其中抽象函数可以求导进而找到导函数的对称性，可以举具体的例子用具体的函数求解.

【详解】A 选项：若 $f\left(4-x\right)+f\left(x\right)=2$,则 $f\left(x\right)$ 关于 $(2,1)$ 对称，则 $f\left(x-2\right)-1$ 是将函数 $f\left(x\right)$ 的图象像右平移 2 个单位，并向下平移 1 个单位，则函数 $f\left(x-2\right)-1$ 的图象关于 $\left(4,0\right)$ 对称，则函数 $f\left(x-2\right)-1$ 不是奇函数，故选项 A 错误.

B 选项：若 $f\left(1-x\right)$ 为偶函数，则 $f(1+x)=f(1-x)$, 则函数 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，

则 $g(1+x)=f'(1+x)=-f'(1-x)=-g(1-x)$,

令 $x=0$, 则 $g(1)=-g(1)$,

则 $g\left(1\right)=0$, 故选项 B 正确.

C 选项:若 $f\left(x-2\right)$ 为偶函数, $f\left(2x-1\right)$ 为奇函数,

则 $f(x-2)=f(-x-2)$, $f(2x-1)=-f(-2x-1)$,

则 $f(x)$ 关于 $x=-2$ 对称， $f(x)$ 关于 $(-1,0)$ 对称，

则 $f(-x)=f(x-4)$, $f(-x)=-f(x-2)$,

则 $f(x-4)=-f(x-2)$, $f(x)=-f(x+2)$, 故 $f(x)$ 半周期为 2.

则 $f(x)$ 周期为 4，则 $f(3)=f(-1)=0$,

故选项 C 正确.

D 选项：若 $f\left(\frac{1}{2}-2x\right)$ 与 $g(x+1)$ 均为偶函数，

则 $f\left(\frac{1}{2}+2x\right)=f\left(\frac{1}{2}-2x\right)$, 令 $x=\frac{1}{2}x$ 则 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=f\left(\frac{1}{2}-x\right)$, $f'\left(\frac{1}{2}+x\right)=-f'\left(\frac{1}{2}-x\right)$,

即 $g\left(\frac{1}{2}+x\right)=-g\left(\frac{1}{2}-x\right)$, $g(x+1)=g(-x+1)$, $g(x)$ 关于 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 和 $x=1$ 对称，

则 $f(x)$ 关于 $x=\frac{1}{2}$ 对称， $g(x)$ 关于 $x=1$ 对称，

例如 $f(x)=\sin \pi x+5$, $f\left(0\right)\neq 0$.

故选：BC.

11．BCD

【分析】利用对数的运算性质，把指数式化为对数式进行计算，即可得到判断.

【详解】对于 A，令 $3^x=4^y=6^z=k$，则 $x=\log_3 k, y=\log_4 k, z=\log_6 k,$

所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{\log_3 k}+\frac{1}{\log_4 k}-\frac{1}{\log_6 k}=\log_k 3+\log_k 4-\log_k 6=\log_k \frac{3\times 4}{6}=\log_k 2\neq 0$，

故 A 是错误的；

对于 B，设 $n^{20}=k\Rightarrow 20\lg n=\lg k$，

则当 $n=3$ 时，$20\lg 3\approx 20\times 0.4771=9.542$，此时 $\lg k\approx 9.542\Rightarrow k\approx 10^{9.542}=10^{0.542}\times 10^{9}$，因为 $10^{0.542}\in(1,10)$，所以不符合题意，

则当 $n=4$ 时，$20\lg 4\approx 40\times 0.3010=12.04$，此时 $\lg k\approx 12.04\Rightarrow k\approx 10^{12.04}=10^{0.04}\times 10^{12}$，因为 $10^{0.02}\in(1,10)$，所以符合题意，

则当 $n=5$ 时，$20\lg 5\approx 20\times(1-0.3010)=13.98$，此时 $\lg k\approx 13.98\Rightarrow k\approx 10^{13.98}=10^{0.98}\times 10^{13}$，因为 $10^{0.98}\in(1,10)$，所以不符合题意，

当 $n\geq 5$ 时，位数一定超 14 位，故 B 是正确的；

对于 C，设 $2024^{2024}=t\Rightarrow 2024\lg 2024=\lg t$，

因为 $\lg 2024\approx 3.306$，所以 $2024\lg 2024\approx 2024\times 3.306=6691.344,$

则 $\lg k\approx 6691.344\Rightarrow k\approx 10^{6691.344}=10^{0.344}\times 10^{6691}$，同理 $10^{0.334}\in(1,10)$，

所以 2024^{2024} 是位数为 6692 的正整数，故 C 是正确；

对于 D，$\log_3 5=\frac{\lg 5}{\lg 3}=\frac{\lg\frac{10}{2}}{\lg 3}=\frac{1-\lg 2}{\lg 3}\approx\frac{1-0.301}{0.4771}=\frac{0.699}{0.4771}=1.46510166$，

故 D 是正确的；

故选：BCD.

12．$\left[-127,-\frac{1}{2}\right]$

【分析】根据分段函数解析式，分段列出不等式组求解即可.

【详解】$\begin{cases}x\geq -1\\ 3^{2x+3}-2\leq 7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<-1\\ \log_2(1-x)\leq 7\end{cases}$，

$\begin{cases}x\geq -1\\ 3^{2x+3}\leq 3^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<-1\\ 1-x\leq 2^7\end{cases}$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/785224314244011313